Факультатив. Метод последовательных приближений вычисления квазистационарных электромагнитных полей

(этого вопроса нет в учебниках).

Если электромагнитные поля изменяются во времени медленно, то уравнения Максвелла можно решать методом последовательных приближений.

Суть метода состоит в том, чтобы сначала найти решение в очень грубом приближении, затем в более точном приближении, в еще более точном, и так далее до бесконечности.

Если поля медленные, то производные по времени малы. Следовательно, производные по времени достаточно знать с меньшей относительной точностью, чем остальные слагаемые в системе уравнений Максвелла

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}.$$

Если в более грубом приближении мы знаем решение для полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$, то мы можем подставить это решение под знак производной $\frac{\partial}{\partial t}$ в правую часть уравнений Максвелла и получить уравнения с неизвестными полями в левой части и заданной правой частью уравнений. Решение этих приближенных уравнений проще, чем решение точных уравнений Максвелла. Новое приближенное решение будет более точным приближением для полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$, чем исходное грубое приближение.

Обсудим начальное самое грубое так называемое нулевое приближение.

В самом грубом приближении отбросим слагаемые $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ и $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ в правой части уравнений Максвелла и получим уравнения:

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}_0\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}_0\right) = 0 \\ div\left(\vec{B}_0\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}_0\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$$

— система в нулевом приближении. Обозначим ее, как систему (0).

Система из четырех уравнений распадается на две независимые друг от друга системы: два уравнения задачи электростатики $\begin{cases} div\left(\vec{D}_0\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}_0\right) = 0 \end{cases}$ и два уравнения задачи магнитостатики $\begin{cases} div\left(\vec{B}_0\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}_0\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$. Только эти задачи нужно решить для каждого момента времени. Будем считать, что мы умеем решать такие задачи и решили их.

В таком случае мы нашли нулевое приближение $\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ для полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Например, в вакууме решения можно найти, суммируя уравнения:

$$\begin{cases} d\vec{E} = \dfrac{\rho \cdot dV}{r^3}\vec{r} \\ d\vec{B} = \dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{\left[\vec{j}, \vec{r}\right]}{r^3} \cdot dV \end{cases}.$$

Первое приближение $\vec{E}_1$ и $\vec{B}_1$ будем искать в виде суммы нулевого приближения $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, и первых поправок к нему $\delta\vec{E}_1$ и $\delta\vec{B}_1$:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \delta\vec{E}_1 \\ \vec{D}_1 = \vec{D}_0 + \delta\vec{D}_1 \\ \vec{B}_1 = \vec{B}_0 + \delta\vec{B}_1 \\ \vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \delta\vec{H}_1 \end{cases}$$

Для первого приближения получим уравнения:

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}_1\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}_1\right) = -\dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{\partial\vec{B}_0}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}_1\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}_1\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{\partial\vec{D}_0}{\partial t} \end{cases} \quad \text{— система (1).}$$

Рассмотрим разность систем (1)-(0). Разность имеет следующий вид:

$$\begin{cases} div\left(\delta\vec{D}_1\right)=0 \\ rot\left(\delta\vec{E}_1\right)=-\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}_0}{\partial t} \\ div\left(\delta\vec{B}_1\right)=0 \\ rot\left(\delta\vec{H}_1\right)=\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{D}_0}{\partial t} \end{cases}.$$

Это две полностью подобные друг другу независимые задачи аналогичные задачам магнитостатики, так как дивергенция поля равна нулю, а ротор поля задан.

Будем считать, что мы умеем их решать и решили.

Аналогично для n-го приближения:

$$\begin{cases} \vec{E}_n=\vec{E}_{n-1}+\delta\vec{E}_n=\vec{E}_0+\sum\limits_{i=1}^{n}\delta\vec{E}_i \\ \vec{B}_n=\vec{B}_{n-1}+\delta\vec{B}_n=\vec{B}_0+\sum\limits_{i=1}^{n}\delta\vec{B}_i \\ \vec{D}_n=\vec{D}_{n-1}+\delta\vec{D}_n=\vec{D}_0+\sum\limits_{i=1}^{n}\delta\vec{D}_i \\ \vec{H}_n=\vec{H}_{n-1}+\delta\vec{H}_n=\vec{H}_0+\sum\limits_{i=1}^{n}\delta\vec{H}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}_n\right)=4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}_n\right)=-\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}_{n-1}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}_n\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}_n\right)=\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}+\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{D}_{n-1}}{\partial t} \end{cases} \text{— система (n).}$$

Рассмотрим разность систем (n)-(n-1):

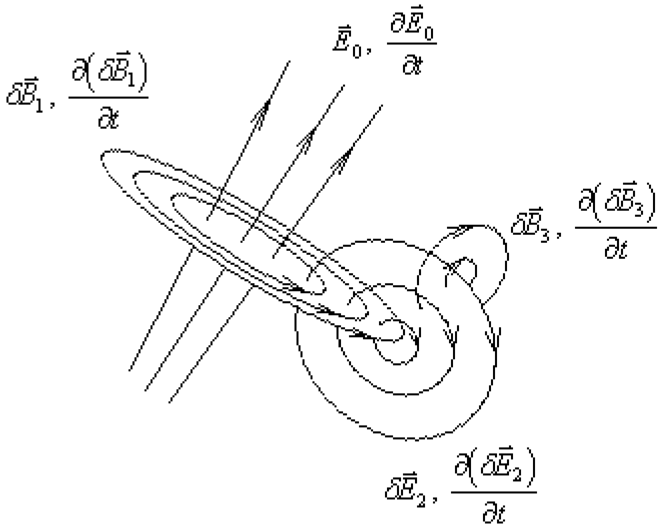
$$\begin{cases} div\left(\delta\vec{D}_n\right)=0 \\ rot\left(\delta\vec{E}_n\right)=-\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\left(\delta\vec{B}_{n-1}\right)}{\partial t} \\ div\left(\delta\vec{B}_n\right)=0 \\ rot\left(\delta\vec{H}_n\right)=\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\left(\delta\vec{D}_{n-1}\right)}{\partial t} \end{cases}.$$

Это опять две независимые задачи аналогичные задачам магнитостатики. Мы их умеем решать, и будем считать, что решили.

Таким образом, мы можем найти все поправки для любого приближения.

Без доказательства заметим, что ряды поправок сходятся при условии $r << \lambda$, где r — размер области с полем, λ — длина волны поля, $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$, ν — частота изменения электромагнитного поля.

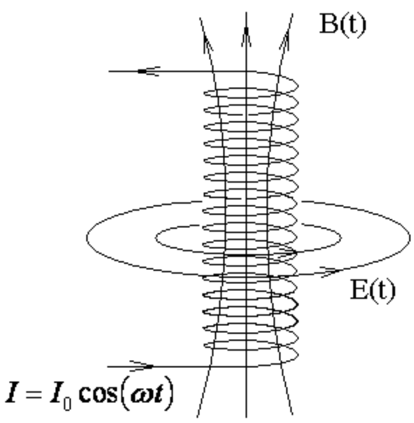
На следующем рисунке покажем, как может выглядеть ряд поправок.



<u>**Факультатив. Задача 1.**</u>

В длинном соленоиде задан переменный ток $I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t)$. Найти поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Решение:



В нулевом приближении (в приближении магнитостатики) внутри длинного соленоида есть однородное магнитное поле, направленное вдоль его оси:

$B_0(t) = \frac{4\pi}{c} \cdot nI = \frac{4\pi}{c} \cdot nI_0 \cdot \cos(\omega t)$ — магнитное поле вдоль оси соленоида, где n — число витков на единице длины соленоида.

В нулевом приближении электрического поля нет, так как нет отличной от нуля объемной плотности зарядов: $E_0(t) = 0$.

В следующем приближении (в первом приближении) переменное магнитное поле нулевого приближения является источником вихревого электрического поля в соответствии с уравнением Максвелла

$$rot(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad => \qquad rot(\vec{E}_1) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}.$$

Это уравнение удобнее использовать в интегральной форме:

$$\oint_l E_l dl = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) \qquad =>$$

$$E_1(t) \cdot 2\pi r = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(B_0(t) \cdot S\right).$$

Подставим сюда $B_0(t) = \frac{4\pi}{c} \cdot nI_0 \cdot \cos(\omega t)$ и получим

$$E_1(t) \cdot 2\pi r = \frac{S}{c} \cdot \frac{4\pi}{c} nI_0 \omega \cdot \sin(\omega t).$$

Внутри соленоида при $r \le R$ имеем $S = \pi r^2$ и получаем

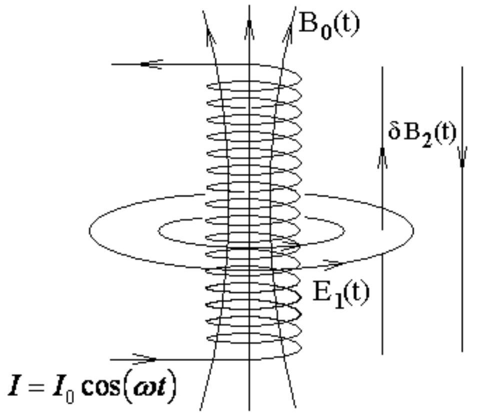
$E_1(t) = \frac{2\pi \cdot rnI_0 \omega \cdot \sin(\omega t)}{c^2}$ при $r \le R$, где R — радиус соленоида.

Снаружи соленоида при $r \ge R$ получим $S = \pi R^2$, так как магнитное поле есть только внутри соленоида. Тогда

$E_1(t) = \frac{2\pi \cdot R^2 nI_0 \omega \cdot \sin(\omega t)}{c^2 r}$ при $r \ge R$.

Обсудим теперь поправку второго приближения. Первая поправка к электрическому полю $\delta\vec{E}_1 = \vec{E}_1$ является источником второй поправки $\delta\vec{B}_2$, которая добавляется к магнитному полю нулевого приближения $\vec{B}_0$.

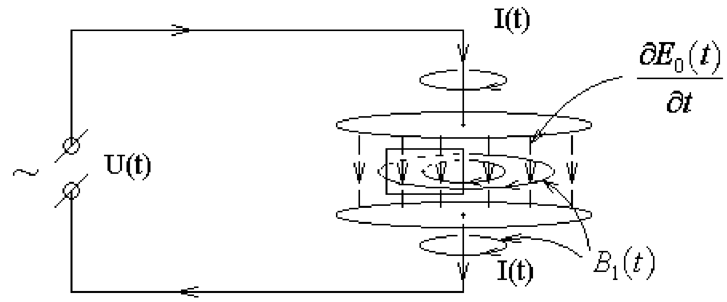
$$rot(\delta\vec{B}_2) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \qquad => \qquad \oint_l (\delta B_2)_l \, dl = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{E}_1, d\vec{S})$$



Вторая поправка $\delta B_2(t)$ расходится при $r \to \infty$ как $\ln(r)$. Поправка $\delta B_2(t)$ расходится при $r \to \infty$, так как при этом не выполняется условие квазистационарности $r << \lambda$.

<u>Факультатив. Задача 2.</u>

Пусть плоский конденсатор подключен к источнику косинусоидального напряжения $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$.



Пусть конденсатор представляет собой два параллельных проводящих диска.

Пусть внутри конденсатора расположена прямоугольная проводящая рамка с большим сопротивлением. Одна из сторон рамки расположена по оси конденсатора. Требуется найти силу тока в прямоугольной рамке.

В самом грубом нулевом приближении в конденсаторе есть только электрическое поле, направленное вдоль оси конденсатора. Производная от этого поля по времени — токи смещения Максвелла. В первом приближении вокруг этих токов по правилу правого винта возникает магнитное поле, величину которого можно найти по теореме о циркуляции $B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \cdot \left(j_{CM} \cdot \pi r^2 \right)$, где $j_{CM} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$ — плотность токов смещения. Во втором приближении переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля, которое и создает ток в рамке. Величину тока можно найти через ЭДС индукции в рамке.