Магнитная энергия взаимодействия системы токов (продолжение).

(с учетом работы ЭДС индукции)

Поменяем знаки в равенстве и подставим сюда выражение для работы dA из предыдущего вопроса. Тогда получим

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki} - \sum_k \mathcal{E}_k I_k dt .$$

Подставим сюда выражение для ЭДС индукции $\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{d\Phi}{dt}$ и получим

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki} - \sum_k \left(-\frac{1}{c}\cdot\frac{d\Phi_k}{dt}\right) I_k dt .$$

Сократим dt в числителе и знаменателе, тогда

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki} - \sum_k \left(-\frac{1}{c}\cdot d\Phi_k\right) I_k .$$

Подставим сюда выражение для потока через коэффициент взаимной индукции $\Phi_k = \sum_i L_{ki}\frac{I_i}{c}$ и получим

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki} + \sum_k \frac{I_k}{c}\cdot d\left(\sum_i L_{ki}\frac{I_i}{c}\right).$$

Разложим $d\left(L_{ki}\frac{I_i}{c}\right)$, как дифференциал от произведения и получим

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki} + \sum_{k,i}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki} + \sum_{k,i}\frac{I_k}{c}L_{ki}d\frac{I_i}{c} .$$

Первые две суммы имеют разные знаки. Объединим эти две суммы в одну и получим

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki} + \sum_{k,i}\frac{I_k}{c}L_{ki}d\frac{I_i}{c} .$$

Разобьем правую сумму на две тождественные суммы с точностью до замены $i \leftrightarrow k$ и получим

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki} + \frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_k}{c}L_{ki}d\frac{I_i}{c} + \frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_i}{c}L_{ki}d\frac{I_k}{c} .$$

Объединим две правые суммы с учетом того, что $\frac{I_k}{c}d\frac{I_i}{c} + \frac{I_i}{c}d\frac{I_k}{c} = d\frac{I_k I_i}{c^2}$ и получим

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki} + \frac{1}{2}\sum_{k,i}L_{ki}d\frac{I_k I_i}{c^2} .$$

Эти две суммы тоже можно объединить в одну сумму, как дифференциал от произведения L_{ki} на $\dfrac{I_k I_i}{c^2}$, тогда

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{k,i} d\left(L_{ki}\frac{I_k I_i}{c^2}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$W = \sum_{k,i}\frac{L_{ki} I_k I_i}{2c^2}$$ — магнитная энергия взаимодействия системы токов. Эту формулу нужно запомнить к экзамену, а ее вывод помнить не нужно.

Если контур один, например, катушка индуктивности, то

$$W = \frac{LI^2}{2c^2}$$ — энергия магнитного поля соленоида с током. Эту формулу можно рассматривать, как определение индуктивности L, если энергию W удастся найти другим способом. Этот способ будет рассмотрен в следующем вопросе.

Формулу $W = \dfrac{LI^2}{2c^2}$ нужно помнить к экзамену без ее вывода.

В системе СИ: $\quad W = \dfrac{LI^2}{2}$.

Энергия магнитного поля.

Это та же магнитная энергия токов, только выраженная через поле, а не через токи.

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_k I_i}{c^2}L_{ki} = \frac{1}{2}\sum_{k}\frac{I_k}{c}\cdot\left(\sum_{i} L_{ki}\frac{I_i}{c}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k}\frac{I_k}{c}\cdot\left(\sum_{i}\Phi_{ki}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k}\frac{I_k}{c}\Phi_k$$

Подставим сюда полученное раньше выражение для потока $\Phi_B = \int\limits_S\left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int\limits_S\left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S}\right) = \oint\limits_l\left(\vec{A}, d\vec{l}\right)$ и получим

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k}\frac{I_k}{c}\oint\limits_{l_k}\left(\vec{A}, d\vec{l}_k\right).$$

Заменим здесь элемент тока $Id\vec{l}$ на $\vec{j}dV$, тогда

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k}\int\limits_{V_k}\left(\vec{A}, \frac{\vec{j}_k}{c}\right)dV_k \qquad \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_{V}\left(\vec{A}, \frac{\vec{j}}{c}\right)dV.$$

Подставим сюда плотность токов проводимости $\vec{j}$ из равенства $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$, откуда $\frac{\vec{j}}{c}=\frac{1}{4\pi}\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]$. Тогда

$$W=\frac{1}{8\pi}\int_V\left(\vec{A},\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]\right)dV.$$

Возьмем интеграл по частям. Перебросим производную $\vec{\nabla}$ с одного сомножителя $\vec{H}$ на другой $\vec{A}$ и получим

$$W=\frac{1}{8\pi}\oint_S\left(\vec{A},\left[d\vec{S},\vec{H}\right]\right)-\frac{1}{8\pi}\int_V\left(\underline{\vec{A}},\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]\right)dV$$

Здесь в правом интеграле производную $\vec{\nabla}$ нужно брать от подчеркнутого выражения $\vec{A}$. Левый интеграл по поверхности стремится к нулю при стремлении объема, ограниченного поверхностью, к бесконечности. В правом интеграле поменяем местами сомножители векторного произведения с изменением знака интеграла и сделаем циклическую перестановку векторов в смешанном скалярно векторном произведении. Тогда

$$W=\frac{1}{8\pi}\int_{V=\infty}\left(\vec{H},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right)dV$$

Здесь $\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]=rot\left(\vec{A}\right)=\vec{B}$, тогда

$W=\int_{V=\infty}\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}dV$ — энергия магнитного поля. Эту формулу нужно знать к экзамену, но ее вывод помнить не нужно.

Тогда $w=\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}$ — объемная плотность энергии магнитного поля.

В изотропной среде $\vec{B}=\mu\vec{H}$ и $w=\frac{\mu H^2}{8\pi}$.

В самом общем случае нелинейной или гистерезисной зависимости $\vec{B}$ от $\vec{H}$ справедлива следующая формула

$$dw=\frac{1}{4\pi}\left(\vec{H},d\vec{B}\right)$$

без доказательства.

В системе СИ: $w=\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{2}$ и $dw=\left(\vec{H},d\vec{B}\right)$.

$$\oint_S\xrightarrow[V\to\infty]{}0.$$

Докажем, что $\oint_S\left(\vec{A},\left[d\vec{S},\vec{H}\right]\right)\xrightarrow[V\to\infty]{}0$.

Пусть S — сфера с очень большим радиусом. Тогда из любой точки на поверхности S все токи выглядят, как один точечный магнитный диполь. Тогда

$$\left.\begin{aligned} H &\sim \frac{1}{r^3} \\ A &\sim \frac{1}{r^2} \\ S &\sim r^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \oint_S \sim \frac{1}{r^3} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Строгое определение индуктивности.

$$W = \frac{LI^2}{2c^2} = \int_{V=\infty} \frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi} dV \qquad \Rightarrow$$

$L \equiv \dfrac{c^2}{4\pi I^2} \cdot \displaystyle\int_{V=\infty} \left(\vec{B},\vec{H}\right) \cdot dV$ — индуктивность контура L не зависит от величины тока I в контуре, так как магнитные поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$ пропорциональны току I.

Аналогично можно определить коэффициент взаимной индукции:

$L_{ki} \equiv \dfrac{c^2}{4\pi I_i I_k} \cdot \displaystyle\int_{V=\infty} \mu\left(\vec{H}_k,\vec{H}_i\right) \cdot dV$, где $\vec{H}_k$ и $\vec{H}_i$ — напряженности магнитного поля, создаваемые токами в k-м и i-м контурах.

Сравнение формул для энергии электрического и магнитного полей.

Электричество	Магнетизм
$W = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\substack{i,k \\ i\neq k}} \dfrac{q_k q_i}{r_{ki}}$ (в вакууме)	$W = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k,i} \dfrac{I_k I_i}{c^2} L_{ki}$
$\dfrac{1}{r_{ki}} = \dfrac{1}{\left\lvert\vec{r}_k - \vec{r}_i\right\rvert}$	$L_{ki} = \displaystyle\oint_{l_k}\oint_{l_i} \dfrac{\left(d\vec{l}_k, d\vec{l}_i\right)}{\left\lvert\vec{r}_k - \vec{r}_i\right\rvert}$ (в вакууме)
$W = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_i q_i\varphi_i$ (сумма по свободным зарядам)	$W = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_i \dfrac{I_i}{c}\Phi_i$ (сумма по токам проводимости)
$W = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \rho\varphi \cdot dV$ (по свободным зарядам)	$W = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_V \left(\vec{j},\vec{A}\right) \cdot dV$ (по токам проводимости)
$w = \dfrac{\varepsilon E^2}{8\pi}$	$w = \dfrac{\mu H^2}{8\pi}$

$$w=\frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi}$$
$$dw=\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E},d\vec{D}\right)$$

$$w=\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}$$
$$dw=\frac{1}{4\pi}\left(\vec{H},d\vec{B}\right)$$

Гипотеза Максвелла о токах смещения.

Не путайте токи смещения со связанными токами намагниченных сред.

Рассмотрим дивергенцию равенства $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$.

Дивергенция левой части равенства равна нулю:

$div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]\right)=\left(\vec{H},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right)=0$.

Дивергенция правой части не равна нулю при $\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$:

$div\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}\right)=\frac{4\pi}{c}div\left(\vec{j}\right)=\frac{4\pi}{c}\cdot\left(-\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\neq 0$.

Чтобы обобщить уравнение $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ на случай $\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$ можно предположить, что

$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\vec{X}$, где $\vec{X}$ — необходимая поправка к уравнению магнитостатики.

$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\vec{X}$ =>

$0=div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=div\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\vec{X}\right)=\frac{4\pi}{c}div\left(\vec{j}\right)+div\left(\vec{X}\right)$.

Учтем, что $div\left(\vec{j}\right)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ и получим

$0=-\frac{4\pi}{c}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\vec{X}\right)$

Учтем теперь, что $4\pi\rho=div\left(\vec{D}\right)$ и получим

$0=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\left(div\left(\vec{D}\right)\right)}{\partial t}+div\left(\vec{X}\right)=div\left(\vec{X}-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0$.

Из того, что дивергенция некоторого поля равна нулю, вовсе не следует, что само поле равно нулю. Например, $div\left(\vec{B}\right)=0$ не означает равенства нулю магнитного поля $\vec{B}$.

Максвелл сделал предположение, что $\vec{X}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$ =>

$\vec{X} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, которое не обязательно следует из того, что $div\left(\vec{X}\right) = div\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$. Таким образом Максвелл получил:

$$rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Максвелл ввел понятие токов смещения $\vec{j}_{см} \equiv \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, тогда

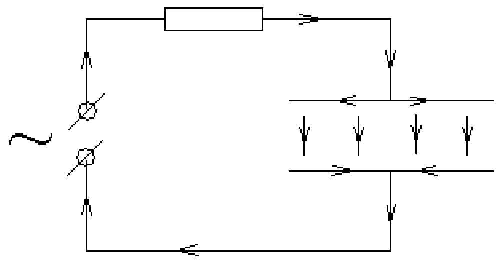
$$rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_{см}\right)$$

Токи смещение, потому что они выражаются через вектор электрического смещения $\vec{D}$.

Аналогично $\mathcal{E}_{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_B}{dt}$ — ЭДС индукции выражается через вектор магнитной индукции $\vec{B}$.

$\begin{cases} rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_{см}\right) \\ div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right) = 0 \end{cases}$ => $div\left(\vec{j} + \vec{j}_{см}\right) = 0$ => $\Phi_{\vec{j}+\vec{j}_{см}} = 0$ — поток вектора $\vec{j} + \vec{j}_{см}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю. Тогда линии суммы токов проводимости и токов смещения замкнуты (не рвутся).

Например, в следующей схеме линии токов проводимости замыкаются линиями токов смещения внутри конденсатора.



Система уравнений Максвелла.

(основной вопрос курса)

Уравнения Максвелла справедливы для переменных электромагнитных полей.

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$ — система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Для решения задач обычно удобнее использовать те же уравнения Максвелла только в интегральной форме:

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ \oint\limits_l E_l dl = -\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) \\ \oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \\ \oint\limits_l H_l dl = \dfrac{4\pi}{c} I + \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) \end{cases}$$

Прокомментируем каждое из 4-х уравнений.

Первое из уравнений Максвелла можно записать в виде $\Phi_D = 4\pi Q$. Для полей независящих от времени — это электростатическая теорема Гаусса. Для переменных полей теорема не может быть доказана, но Максвелл предположил, что равенство остается верным и для переменных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом.

Второе уравнение $rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ — интерпретация Максвелла половины закона электромагнитной индукции Фарадея $\mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{d\Phi_B}{dt}$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Заметим, что закон Фарадея содержит полную производную, а уравнение Максвелла в интегральной форме $\oint\limits_l E_l dl = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ содержит частную производную от потока $\Phi_B = \int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ по времени. Дело в том, что изменение потока при перемещении контура дает вклад в ЭДС индукции $\mathcal{E}_{инд} = \mathcal{E} \equiv \oint\limits_l \left(\vec{E}_{стор}, d\vec{l}\right)$ через силы Лоренца $\vec{F}_Л$, которые рассматриваются, как сторонние силы с напряженностью $\vec{E}_{стор} = \dfrac{\vec{F}_{Л}}{q} = \dfrac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right]$, но перемещение контура никак не влияет на циркуляцию $\oint\limits_{l}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)$ поля $\vec{E}$. Отличная от нуля циркуляция поля $\vec{E}$ появляется только при изменении магнитного поля $\vec{B}$, поэтому вклад в циркуляцию поля $\vec{E}$ дает только частная производная по времени от потока $\Phi_B = \int\limits_{S}\left(\vec{B},d\vec{S}\right)$ при неизменных координатах, а изменение потока при перемещении контура в клад в циркуляцию поля $\vec{E}$ не дает.

Конец факультативной вставки.

Третье уравнение $\Phi_B = 0$ означает отсутствие магнитных зарядов.

Четвертое уравнение $\oint\limits_{l} H_l dl = \dfrac{4\pi}{c} I + \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S}\left(\vec{D},d\vec{S}\right)$ представляет собой теорему о циркуляции поля в магнитостатике дополненное токами смещения Максвелла.

Чтобы уравнения имело смысл решать относительно электрического и магнитного полей, нужно дополнить их так называемыми материальными связями:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \end{cases}.$$

Кроме того, заряды и токи связаны уравнением непрерывности:

$$div\left(\vec{j}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

В некоторых случаях уравнения можно дополнить законом Ома $\vec{j} = \lambda\vec{E}$, если он выполнятся, и если токи не заданы явным образом.

В системе СИ: $$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = \rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}.$$

В системе СИ: $$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0\mu\vec{H} \\ div\left(\vec{j}\right) + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{j} = \lambda\vec{E} \end{cases}.$$

Факультативная вставка.

Система уравнений Максвелла избыточна. В ней есть лишние уравнения.

Дело в том, что уравнения $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \end{cases}$ не нужны, так как являются следствием другой пары уравнений $\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right)=\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}+\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$.

И действительно. Рассмотрим дивергенцию от уравнения $rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Дивергенция ротора любого поля равна нулю:

$div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right)=\left(\vec{E},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right)=\left(\vec{E},0\right)=0$, где использовано то, что циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно–векторном произведении $\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right)$ не изменяет его величину. Тогда

$$0=div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=div\left(-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{B}\right) \qquad =>$$

$-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{B}\right)=0$ => $div\left(\vec{B}\right)=const$ — дивергенция поля $\vec{B}$ в каждой точке пространства не изменяется во времени.

Если когда-то в рассматриваемой области не было магнитного поля $\vec{B}$, то и его дивергенция была равна нулю $div\left(\vec{B}\right)=0$, а затем дивергенция не могла измениться. Следовательно

$$div\left(\vec{B}\right)=0.$$

Аналогично взяв дивергенцию от уравнения $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ можно получить, что

$$div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho.$$

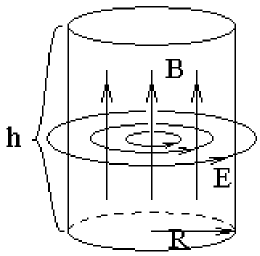
<u>Конец факультативной вставки.</u>

<u>Токи Фуко.</u>

Токи Фуко — это те же токи индукции только в сплошном проводнике, а не в проводящем контуре, как обычные токи индукции.

Рассмотрим проводящий цилиндр в однородном переменном магнитном поле $B=B_0\cdot\cos\left(\omega t\right)$, которое направлено вдоль оси цилиндра.

Переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля



$$rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_l E_l dl = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} \qquad \Rightarrow$$

$$E\cdot 2\pi r = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\pi r^2 B\right) \qquad \Rightarrow$$