Токи Фуко (продолжение)**.**

$$E=-\frac{r}{2c}\cdot\frac{\partial B}{\partial t}=-\frac{r}{2c}\cdot\frac{\partial\left(B_0\cdot\cos(\omega t)\right)}{\partial t}=\frac{B_0\omega}{2c}\cdot r\cdot\sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$E=\frac{B_0\omega}{2c}\cdot r\cdot\sin(\omega t).$$

Это электрическое поле вызывает токи Фуко

$$j=\lambda E=\frac{\lambda B_0\omega}{2c}\cdot r\cdot\sin(\omega t).$$

В системе СИ: $j=\lambda E=\dfrac{\lambda B_0\omega}{2}\cdot r\cdot\sin(\omega t)$.

Интересно рассмотреть среднюю мощность ленц-джоулева тепла, идущего на нагрев цилиндра.

Пусть $\langle \nu\rangle$ — среднее по времени и по объему значение объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла.

$\nu=\left(\vec{j},\vec{E}\right)=\lambda E^2=\dfrac{\lambda\omega^2 B_0^2}{4c^2}r^2\sin^2(\omega t)$ — объемная плотность мощности в соответствии с законом Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.

Усреднение по времени сомножителя синус в квадрате дает: $\left\langle \sin^2(\omega t)\right\rangle_t=\dfrac{1}{2}$. И действительно, $\sin$ и $\cos$ отличаются только сдвигом фаз на $\dfrac{\pi}{2}$, тогда средние значения их квадратов равны, а сумма средних значений квадратов равна единице, так как $\sin^2(\omega t)+\cos^2(\omega t)=1$.

Тогда

$\langle\nu\rangle_t=\dfrac{\lambda\omega^2 B_0^2}{8c^2}r^2$ — среднее по времени значение объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла. Осталось усреднить эту величину по объему цилиндра.

$$\langle\nu\rangle=\int_V\langle\nu\rangle_t\frac{dV}{V}=\frac{\int_V\langle\nu\rangle_t\,dV}{V}$$

Для вычисления интеграла мысленно разобьем объем цилиндра цилиндрическими поверхностями с близкими радиусами, тогда

$$\int_V\langle\nu\rangle_t\,dV=\int_0^R\langle\nu\rangle_t\,h\cdot 2\pi r\,dr=\int_0^R\frac{\lambda\omega^2B_0^2}{8c^2}r^2h\cdot 2\pi r\,dr=$$

$$=\frac{\pi\lambda\omega^2B_0^2h}{4c^2}\cdot\int_0^R r^3dr=\frac{\pi\lambda\omega^2B_0^2h}{4c^2}\cdot\frac{R^4}{4}=\frac{\pi\lambda\omega^2B_0^2h}{16c^2}R^4\qquad\Rightarrow$$

$$\langle \nu \rangle = \frac{1}{V} \cdot \int_V \langle \nu \rangle_t \, dV = \frac{1}{h \cdot \pi R^2} \cdot \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{16 c^2} R^4 = \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{16 c^2} R^2 \sim R^2 \qquad =>$$

чем больше радиус цилиндра R, тем сильнее нагрев в единице объема.

Качественно такой результат можно объяснить тем, что в случае большого радиуса цилиндра токам Фуко есть, где разбежаться.

Сердечник трансформатора делают наборным из большого числа тонких пластин, чтобы уменьшить потери на нагрев сердечника токами Фуко.

Дело в том, что если в первичную обмотку трансформатора подать переменное напряжение, то в сердечнике возникает переменное магнитное поле и токи Фуко.

В наборном сердечнике им трудно разбежаться.

В системе СИ: $\langle \nu \rangle = \dfrac{\lambda {B_0}^2 \omega^2}{16} R^2$

<u>**Вектор Пойнтинга.**</u>

(вектор Умова — Пойнтинга)

Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии электромагнитного поля или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения энергии.

Энергия в некотором объеме уменьшается, если она вытекает через границу объема.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна сумме энергий электрического и магнитного полей:

$$w = \frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{8\pi} + \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{8\pi}.$$

Рассмотрим изменение энергии, например, электрического поля:

$$dw_э = d\left(\frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{8\pi}\right) = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\vec{D}, d\vec{E}\right) + \left(\vec{E}, d\vec{D}\right)\right\}.$$

Два слагаемых в этой сумме одинаковы по величине.

<u>Факультативная вставка.</u>

И действительно, для линейного, возможно, анизотропного диэлектрика

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E} \qquad => \qquad D_k = \sum_i \varepsilon_{ki} E_i \qquad =>$$

$$\left(\vec{D}, d\vec{E}\right) = \sum_k D_k dE_k = \sum_k \left(\sum_i \varepsilon_{ki} E_i\right) dE_k = \sum_{k,i} \varepsilon_{ki} E_i dE_k$$

$$\left(\vec{E}, d\vec{D}\right) = \sum_i E_i dD_i = \sum_i E_i d\left(\sum_k \varepsilon_{ik} E_k\right) = \sum_{k,i} \varepsilon_{ik} E_i dE_k$$

С учетом $\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}$ получаем $\left(\vec{D}, d\vec{E}\right) = \left(\vec{E}, d\vec{D}\right)$.

Конец факультативной вставки.

Тогда

$$dw_э = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}, d\vec{D}\right).$$

Аналогично для энергии магнитного поля $dw_м = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}, d\vec{B}\right)$.

$dw = \frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\left(\vec{E}, d\vec{D}\right)+\left(\vec{H}, d\vec{B}\right)\right\}$ — изменение объемной плотности энергии электромагнитного поля. Эта формула справедлива в более общем случае, чем исходная формула $w = \frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{8\pi}+\frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{8\pi}$. Формула $dw = \frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\left(\vec{E}, d\vec{D}\right)+\left(\vec{H}, d\vec{B}\right)\right\}$ справедлива и в случае нелинейной зависимости индукции поля от напряженности и в случае гистерезисной зависимости.

Тогда $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\left(\vec{E}, \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)+\left(\vec{H}, \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\right\}$, куда в правую часть производные по времени можно подставить из уравнений Максвелла

$$\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad =>$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = c\cdot rot\left(\vec{H}\right)-4\pi\vec{j} \\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -c\cdot rot\left(\vec{E}\right) \end{cases} \quad =>$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}, c\cdot rot\left(\vec{H}\right)-4\pi\vec{j}\right)+\left(\vec{H}, -c\cdot rot\left(\vec{E}\right)\right)\right\} \quad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, \vec{j}\right)+\frac{c}{4\pi}\left\{-\left(\vec{E}, rot\left(\vec{H}\right)\right)+\left(\vec{H}, rot\left(\vec{E}\right)\right)\right\} \quad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, \vec{j}\right)+\frac{c}{4\pi}\left\{-\left(\vec{E}, \left[\vec{\nabla}, \underline{\vec{H}}\right]\right)+\left(\vec{H}, \left[\vec{\nabla}, \underline{\vec{E}}\right]\right)\right\}$$

Здесь подчеркнуты величины, на которые действует оператор дифференцирования $\vec{\nabla}$.

В обоих смешанных скалярно–векторных произведениях сделаем циклические перестановки векторов так, чтобы вектор $\vec{\nabla}$ оказался на первом месте, а затем в первом векторном произведении поменяем местами векторы с изменением знака произведения. Тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{j}, \vec{E}\right)+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla}, \left[\underline{\vec{E}}, \vec{H}\right]\right)+\left(\vec{\nabla}, \left[\vec{E}, \underline{\vec{H}}\right]\right)\right\}.$$

Два слагаемых в фигурных скобках можно объединить, как производную от произведения:

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+\frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla},\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right),$$

где убраны подчеркивания, так как производные берутся от всех величин, которые стоят за знаком производной $\vec{\nabla}$.

Скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на какой-либо другой вектор — это дивергенция другого вектора, тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right).$$

Тогда

$\underline{-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)}$, где $\underline{\vec{S}\equiv\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]}$ — вектор Пойнтинга. Эти два равенства нужно помнить к экзамену.

Из равенства $-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)$ виден физический смысл вектора Пойнтинга $\vec{S}$. Чтобы его понять рассмотрим объем, в котором нет потерь на ленц-джоулево тепло, то есть $\left(\vec{j},\vec{E}\right)=0$. Тогда получим равенство $\frac{\partial w}{\partial t}+div\left(\vec{S}\right)=0$. Рассмотрим другое, но очень похожее равенство $\frac{\partial \rho}{\partial t}+div\left(\vec{j}\right)=0$. Это равенство следует, из закона сохранения заряда. Если объемная плотность заряда уменьшается, то заряд вытекает из объема, так что $\vec{j}$ — плотность потока заряда, то есть заряд, протекающий в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную току заряда. Равенство $\frac{\partial w}{\partial t}+div\left(\vec{S}\right)=0$ с учетом закона сохранения энергии можно прочитать аналогично. Если объемная плотность энергии уменьшается, то энергия вытекает из объема, так что $\vec{S}$ — плотность потока энергии, то есть энергия, протекающая в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную току энергии.

В системе СИ: $\vec{S}\equiv\left[\vec{E},\vec{H}\right]$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Равенство $-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)$ можно уточнить с учетом возможного присутствия батареек или аккумуляторов со сторонними силами с напряженностью $\vec{E}_{стор}$.

Рассмотрим закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме с учетом сторонних сил:

$\nu=\left(\vec{j},\vec{E}+\vec{E}_{стор}\right)$ => $\left(\vec{j},\vec{E}\right)=\nu-\left(\vec{j},\vec{E}_{стор}\right)$ =>

$$\left(\vec{j},\vec{E}_{стор}\right)-\frac{\partial w}{\partial t}=\nu+div\left(\vec{S}\right)$$

Это же уравнение в интегральной форме примет следующий вид:

$$\sum_i \mathcal{E}_i I_i-\frac{\partial W}{\partial t}=N+\oint_S\left(\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right],d\vec{S}\right),$$

где в единицу времени энергия ЭДС и энергия поля расходуются на нагрев (ленц-джоулево тепло) и вытекает через границу объема. Здесь $\mathcal{E}_i$ — любые другие ЭДС, кроме ЭДС индукции (батарейки, аккумуляторы), работа которых добавляется к уменьшению энергии электромагнитного поля.

Из последней формулы также следует физический смысл вектора Пойнтинга. Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку перпендикулярную направлению движения энергии.

Заметим, что для одного фотона

$$\left.\begin{aligned}W&=mc^2\\p&=mc\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad p=\frac{W}{c}=\frac{h\nu}{c}.$$

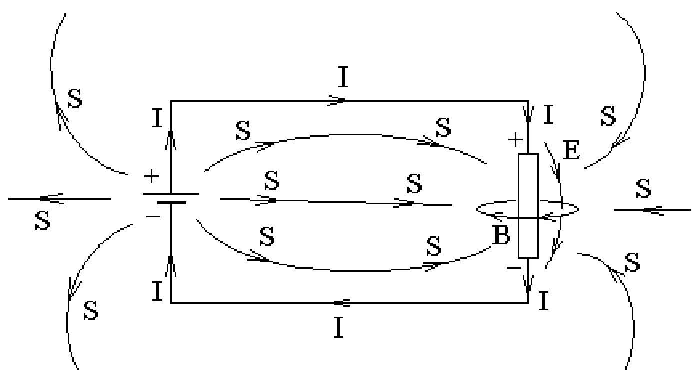
Из равенств $\begin{cases}\vec{S}=\dfrac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]\\ p=\dfrac{W}{c}\end{cases}$ следует, что

$\dfrac{\vec{S}}{c}=\dfrac{1}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ — плотность потока импульса.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

<u>Примеры движения энергии электромагнитного поля.</u>

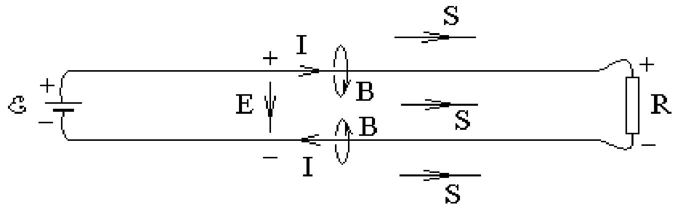
<u>1. Поле вокруг резистора с током.</u>



$$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right].$$

Линии поля $\vec{S}$ втекают в резистор со всех сторон, а из батареи ЭДС — вытекают.

<u>2. Двухпроводная линия.</u>



Энергия распространяется от ЭДС к нагрузке рядом с проводами линии, а не по проводам.

Есть два способа описания одной и той же энергии:

1). Энергия зарядов, которая передается по проводам.

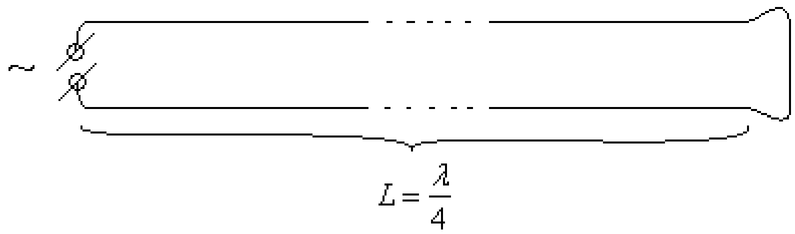
2). Энергия поля, которая проходит рядом с проводами.

Энергия зарядов — это потенциальная энергия $W = q\varphi$.

Если рассматривать переменные поля, то поле не потенциально. Поэтому у зарядов нет энергии в обычном смысле. Остается только энергия поля.

Энергию зарядов можно рассматривать до тех пор, пока $r \ll \lambda$, где r — размер электрической схемы. Так для частоты 50 Гц: $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$ = (300000 км/с) / (50 1/с) = 6000 км.

Рассмотрим источник переменного напряжения, в котором потенциалы на контактах изменяются синусоидально в противофазе друг другу. Пусть, для определенности, напряжение изменяется с частотой 50 Гц. Источник напряжения присоединен к длинной двухпроводной линии, а на удаленном конце двухпроводная линия короткозамкнута.



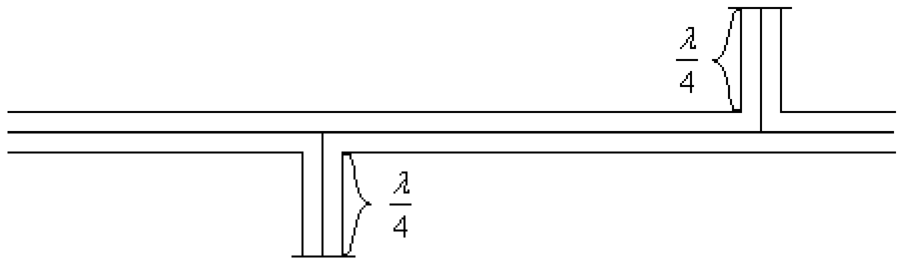
Пусть длина двухпроводной линии $L = \dfrac{\lambda}{4}$ = 1500 км. В таком случае оказывается, что короткое замыкание на удаленном конце линии будет восприниматься источником напряжения, как разрыв, а не как короткое замыкание.

Длина $\dfrac{\lambda}{4}$ эквивалентна сдвигу фаз $\dfrac{\pi}{2}$. Пусть в какой-то момент времени потенциал верхней клеммы источника максимален. На правом конце линии распространяющийся потенциал отстает по фазе на $\dfrac{\pi}{2}$, а доходя до нижней клеммы отстает еще на $\dfrac{\pi}{2}$. В сумме отставание фазы на π, что означает, что сигнал от верхней клеммы приходит к нижней клемме в противоположной фазе. То есть, когда на верхней клемме максимальный потенциал, к нижней клемме только доходит предыдущее минимальное значение потенциала. В этот же момент времени источник напряжения подает на нижнюю клемму минимальный потенциал, тот же, что и пришедший по двухпроводной линии. Следовательно, ток от источника не течет.

В этом смысле источник напряжения воспринимает короткое замыкание на удаленном конце линии, как разрыв.

В радиолокационных станциях старого типа использовалось излучение с длиной волны $\lambda = (10 \div 100)$ см. Сигнал от генератора к антенне передавался по коаксиальному кабелю, который состоит из центрального провода и цилиндрической проводящей оболочки вокруг него. Обычно оболочку называют оплеткой, что действительно справедливо только для гибкого коаксиального кабеля. К антенне от генератора подавалась большая мощность. При этом любой диэлектрик в пространстве между центральной жилой и оплеткой не выдерживает разогрева. Если же пространство между центральной жилой и оплеткой оставить пустым, то непонятно, как удержать центральную жилу по центру оплетки.

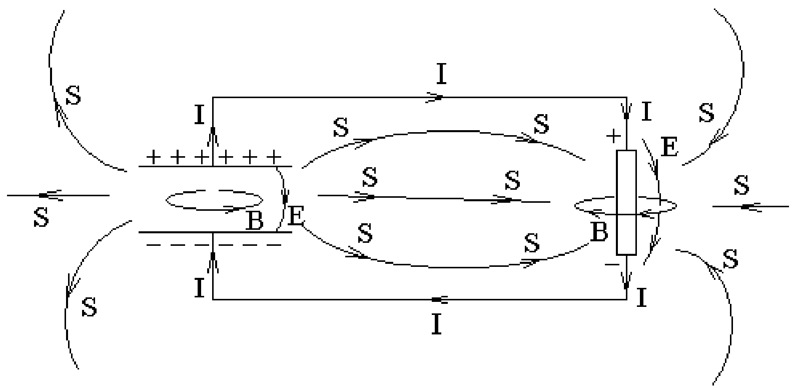
Решение было найдено в виде четвертьволнового стакана.



Конец четвертьволнового стакана является коротким замыканием, а сам стакан воспринимается сигналом центральной жилы, как разрыв, а не как короткое замыкание. По ходу распространения сигнала таких стаканов может быть несколько. В настоящее время четвертьволновым стаканом называют несколько иную конструкцию, а то, что рассмотрели мы, называется четвертьволновым штырем.

<u>3). Разряд конденсатора через сопротивление.</u>

Энергия вытекает из плоского конденсатора через щели между пластинами.



4). Равномерно и прямолинейно движущийся заряд.

В нерелятивистском случае энергия перетекает по полуокружностям, обегая вокруг заряда в направлении его движения.

$$\vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{B} = \frac{q}{c}\cdot\frac{\left[\vec{V},\vec{r}\right]}{r^3} \qquad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{B}\right]$$