Электрические цепи переменного тока.

(рассмотрение этой темы будет проведено в системе СИ)

Связь тока и напряжения для линейных элементов цепи переменного тока.

Для резистора:

$U = RI$

Для конденсатора:

$$\begin{cases} C \equiv \dfrac{q}{U} \\ I \equiv \dfrac{dq}{dt} \end{cases} \quad =>$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I(t') \cdot dt'$$

Для катушки индуктивности в системе единиц Гаусса $\begin{cases} \mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{d\Phi_B}{dt} \\ \Phi_B = L\dfrac{I}{c} \end{cases}$, а в системе СИ:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} \\ \Phi_B = LI \end{cases} \quad => \quad \mathcal{E}_{инд} = -L\dot{I}, \quad \text{где } \dot{I} \equiv \frac{dI}{dt}.$$

Рассмотрим закон Ома для участка цепи с учетом ЭДС:

$U + \mathcal{E} = RI$.

Пусть сопротивление участка цепи стремится к нулю $R \to 0$, тогда

$U = -\mathcal{E}$.

То есть согласно принятым правилам знаков напряжение, падающее на ЭДС, отличается знаком от величины самой ЭДС. Аналогично для катушки индуктивности:

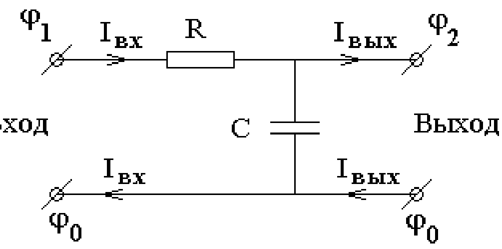
$U_L = -\mathcal{E}_{инд}$.

Тогда связь тока и напряжения для линейных элементов цепи имеет вид:

$$\begin{cases} U_R = RI \\ U_C = \dfrac{1}{C} q = \dfrac{1}{C} \displaystyle\int_0^t I(t')\, dt' \\ U_L = L\dot{I} \end{cases}$$

Интегрирующая RC-цепочка.

Пусть напряжение $U_{вх}(t)$ подается на последовательно включенные резистор и конденсатор, а снимается с конденсатора напряжение $U_{вых}(t)$.



Факультативная вставка.

Если бы выходной ток различался в верхнем и нижнем проводе, то заряды тока где-то справа от схемы накапливались на проводнике, у которого большая емкость относительно бесконечности. Более того, при этом входные токи на верхнем и нижнем проводе тоже должны были бы различаться, и слева от схемы тоже должен бы быть проводник с большой емкостью относительно бесконечности.

Конец факультативной вставки.

Обычно, если не оговорено обратное, подразумевается, что к выходу схемы ничего не подключено и поэтому выходной ток схемы равен нулю $I_{вых} = 0$.

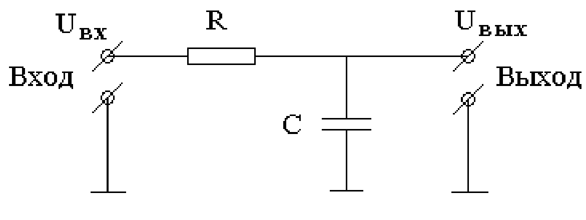
$U_{вх} = \varphi_1 - \varphi_0$

$U_{вых} = \varphi_2 - \varphi_0$

Нижний провод схемы — общий провод для входа и выхода.

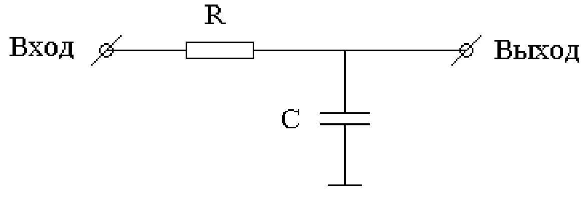
Общий провод схемы, относительно которого отсчитывают потенциалы всех остальных точек схемы, обычно обозначают знаком $\perp$.

Тогда схему можно перерисовать в виде:

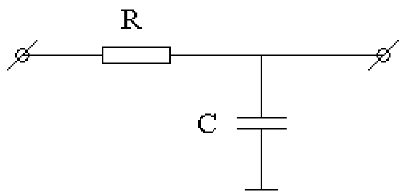


Надписи $U_{вх}$ и $U_{вых}$ можно не делать, так как обычно подразумевается, что напряжение подается на верхнюю клемму пары входных клемм и снимается тоже с верхней клеммы пары выходных клемм.

Общий провод на входе и выходе схемы обычно не рисуют, он подразумевается. Тогда



Обычно подразумевается, что вход схемы находится слева, а выход — справа. Тогда



Пусть напряжение на входе схемы $U_{вх}(t)$ — любая функция времени и пусть в любой момент времени выполняется условие $|U_{вых}(t)| << |U_{вх}(t)|$.

Входное напряжение схемы $U_{вх}(t)$ можно рассматривать, как внешнюю ЭДС. Тогда уравнение Кирхгофа для контура примет вид:

$$U_{вх}(t) = R\,I(t) + \frac{q(t)}{C}.$$

Для краткости не будем писать аргумент в виде времени:

$$U_{вх} = RI + \frac{q}{C}.$$

Слагаемое $\frac{q}{C}$ — это напряжение на выходе схемы, которое по условию мало. Следовательно,

$$U_{вх} \approx RI \quad => \quad I \approx \frac{U_{вх}}{R} \quad =>$$

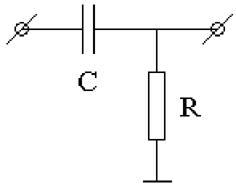
$$q(t) = \int_0^t I(t')dt' \approx \int_0^t \frac{U_{вх}(t')}{R}dt' = \frac{1}{R}\int_0^t U_{вх}(t')dt'.$$

$$U_{вых} = \frac{q}{C} \quad =>$$

$U_{вых}(t) \approx \frac{1}{RC}\int_0^t U_{вх}(t')\cdot dt'$ при условии $|U_{вых}(t)| << |U_{вх}(t)|$.

Для хорошего интегрирования достаточно чтобы произведение RC было велико по сравнению со временем интегрирования.

Дифференцирующая RC-цепочка.



Пусть напряжение $U_{вх}(t)$ на входе схемы — любая функция времени. Входное напряжение подается на последовательно включенные конденсатор C и резистор R, а с резистора снимается напряжение $U_{вых}(t)$. И пусть в любой момент времени выполнено условие $\left|U_{вых}(t)\right| << \left|U_{вх}(t)\right|$. Подразумевается, что ток на выходе схемы равен нулю, то есть к выходу ничего не подключено.

Входное напряжение схемы $U_{вх}(t)$ можно рассматривать, как внешнюю ЭДС. Тогда уравнение Кирхгофа для контура примет вид:

$U_{вх} = \dfrac{q}{C} + RI$, что справедливо в любой момент времени. Второе слагаемое — это напряжение на выходе схемы, и оно очень мало. Тогда

$$U_{вх} \approx \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad q \approx CU_{вх} \quad \Rightarrow \quad I = \dot{q} \approx C\dot{U}_{вх} \quad \Rightarrow$$

$$U_{вых} = RI \approx RC\dot{U}_{вх} \quad \Rightarrow$$

$$U_{вых} \approx RC\frac{dU_{вх}}{dt} \text{ при условии } \left|U_{вых}(t)\right| << \left|U_{вх}(t)\right|.$$

Для хорошего дифференцирования достаточно, чтобы время RC было мало, так чтобы $U_{вх}$ не успевало заметно измениться за время RC.

Реакция произвольной линейной схемы на ступеньку напряжения

(на функцию Хевисайда).

Постановка задачи. Внешний источник подает на схему ступеньку напряжения в нулевой момент времени. Найти токи и напряжения на элементах схемы, как функции времени.

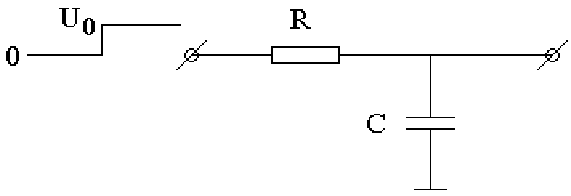
Этапы решения задачи:

1. Внешний источник напряжения рассмотрим, как ЭДС, зависящую от времени.
2. Напишем уравнения Кирхгофа 1-го и 2-го рода, которые окажутся дифференциальными уравнениями для токов.
3. Исключая переменные, перейдем от системы дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению более высокого порядка.
4. Решим это уравнение, а затем через его решение найдем все токи.
5. Зная токи, найдем напряжения на всех элементах схемы.
6. Произвольные константы интегрирования обычно можно найти из условий:

$U(0) = 0$ для каждого конденсатора, так как заряд конденсатора в нулевой момент времени не может измениться скачком. Такое изменение означало бы бесконечную силу тока.

$I(0) = 0$ для каждой катушки индуктивности, так как ток катушки в нулевой момент времени не может измениться скачком. Такое изменение тока означало бы бесконечное напряжение на катушке.

Пример 1. Реакция *RC*-цепочки на ступеньку напряжения.



Пусть резистор и конденсатор включены последовательно. На эту схему в нулевой момент времени подают ступеньку напряжения величиной U_0. Нужно найти напряжение на конденсаторе, как функцию времени.

Та же самая схема была рассмотрена в вопросе "Интегрирующая RC-цепочка", но в том вопросе было дополнительное условие $\left|U_{вых}(t)\right| << \left|U_{вх}(t)\right|$, которое в данном вопросе не выполнено. Зато теперь вместо произвольной функции времени на входе схемы рассматривается только ступенька напряжения.

Напомним уравнения Кирхгофа.

1). $\sum\limits_i \mathcal{E}_i = \sum\limits_i U_i$ — для любого контура.

2). $\sum\limits_i I_i = 0$ — для любого узла.

Рассмотрим уравнение $\sum\limits_i \mathcal{E}_i = \sum\limits_i U_i$ для единственного контура. Напряжение на входе можно рассматривать, как внешнюю ЭДС.

После включения ступеньки напряжения выполнено условие: $U_0 = RI + \frac{q}{C}$, которое можно переписать в виде дифференциального уравнения относительно заряда q на конденсаторе с учетом того, что $I = \dot{q}$:

$$U_0 = R\dot{q} + \frac{q}{c} \qquad =>$$

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = \frac{U_0}{R}$$

Общее решение этого неоднородного уравнения равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Найдем частное решение неоднородного уравнения в виде константы.

$$q = const \qquad => \qquad \dot{q} = 0 \qquad => \qquad \frac{1}{RC}q = \frac{U_0}{R} \qquad => \qquad q = CU_0$$ — частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем теперь общее решение однородного уравнения

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = 0.$$

Факультативная математическая вставка.

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид:

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + A_n e^{\lambda_n t}$, A_i — произвольные константы интегрирования, λ_i — решения характеристического уравнения, которое получается при подстановке в уравнение решения в виде $y = Ae^{\lambda t}$.

Подставим и после сокращения каждого слагаемого на $Ae^{\lambda t}$ получим:

$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ — характеристическое уравнение.

Конец факультативной вставки.

В нашем случае в уравнение $\dot{q} + \frac{1}{RC} q = 0$ подставим $q = Ae^{\lambda t}$ и получим

$$\frac{d}{dt}\left(Ae^{\lambda t}\right) + \frac{1}{RC}\left(Ae^{\lambda t}\right) = 0 \quad => \quad \lambda + \frac{1}{RC} = 0 \quad => \quad \lambda = -\frac{1}{RC}.$$

Тогда общее решение однородного уравнения $\dot{q} + \frac{1}{RC} q = 0$ имеет вид

$q = Ae^{-\frac{t}{RC}}$.

Общее решение неоднородного уравнения $\dot{q} + \frac{1}{RC} q = \frac{U_0}{R}$ имеет вид суммы частного решения неоднородного уравнения $q = CU_0$ и общего решения $q = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ однородного уравнения:

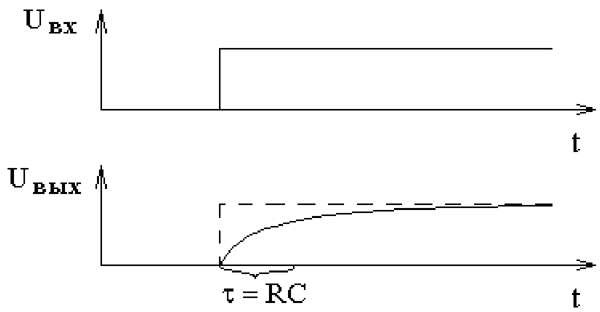
$q = CU_0 + Ae^{-\frac{t}{RC}}$, здесь A — произвольная константа интегрирования.

Найдем константу A из условия $U_C(0) = 0 \quad => \quad q(0) = 0 \quad =>$

$$0 = CU_0 + Ae^{-\frac{0}{RC}} \quad => \quad A = -CU_0 \quad =>$$

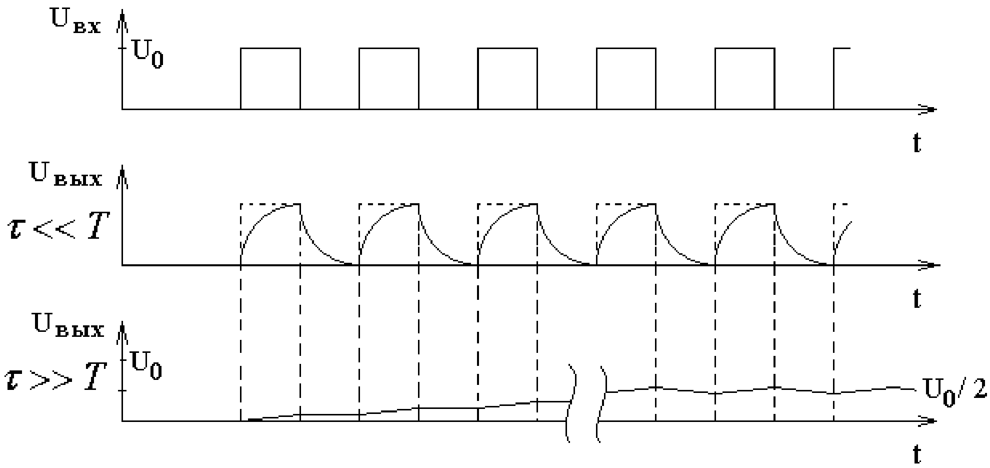
$$q = CU_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad =>$$

$U_{вых} = \frac{q}{C} = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$, где произведение $RC = \tau$ называют постоянной времени RC-цепочки.



<u>Факультативная вставка.</u>

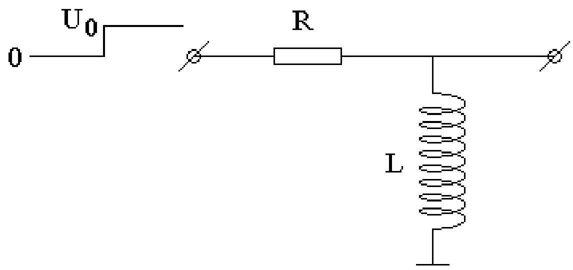
Если на вход схемы подать последовательность прямоугольных импульсов со скважностью 2 (отношение периода к длительности положительного импульса), то



Здесь T — период прямоугольников, $\tau = RC$ — постоянная времени RC-цепочки.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Пример 2. Реакция RL-цепочки на ступеньку напряжения.



Пусть резистор и катушка индуктивности включены последовательно. На эту схему в нулевой момент времени подают ступеньку напряжения величиной U_0. Нужно найти напряжение на катушке индуктивности, как функцию времени.

Рассмотрим уравнение $\sum\limits_i \mathcal{E}_i = \sum\limits_i U_i$ для единственного контура. Напряжение на входе можно рассматривать, как внешнюю ЭДС.

После включения ступеньки напряжения $U_0 = RI + L\dot{I}$ =>

$\dot{I} + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L}$ — неоднородное дифференциальное уравнение для тока.

Ищем его частное решение в виде константы $I = const$ => $\dot{I} = 0$ =>
$\frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L}$ => $I = \frac{U_0}{R}$ — частое решение неоднородного уравнения.
Однородное дифференциальное уравнение:

$\dot{I} + \frac{R}{L} I = 0$.

Ищем его решение в виде $I = Ae^{\lambda t}$. Подставим его в уравнение $\dot{I} + \frac{R}{L} I = 0$ и получим характеристическое уравнение

$\lambda + \frac{R}{L} = 0$ => $\lambda = -\frac{R}{L}$ =>

$I = Ae^{-\frac{R}{L}t}$ — общее решение однородного уравнения. Тогда

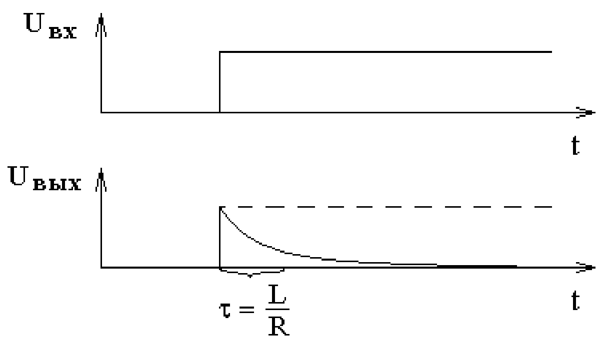
$I = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$ — общее решение неоднородного уравнения.

Произвольную константу интегрирования A находим из условия $I_L(0) = 0$

=> $0 = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}\cdot 0}$ => $A = -\frac{U_0}{R}$ =>

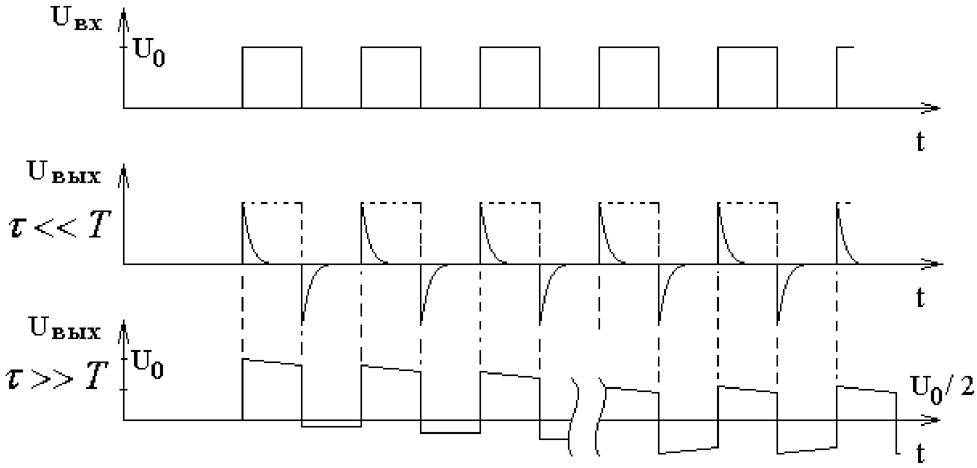
$$I = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad =>$$

$$U_{вых} = L\dot{I} = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$



Факультативная вставка.

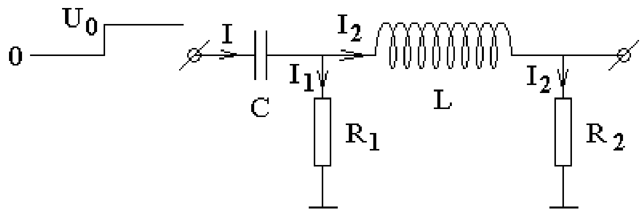
Если на вход схемы подать последовательность прямоугольных импульсов, то



Здесь T — период прямоугольников, $\tau = \dfrac{L}{R}$ — постоянная времени RL-цепочки.

Конец факультативной вставки.

Пример 3.



На схему в нулевой момент времени подают ступеньку напряжения с амплитудой U_0. Нужно найти напряжение на выходе схемы, как функцию времени.

Для трех неизвестных токов I, I_1, I_2 напишем два уравнения Кирхгофа для контуров и одно уравнение для узла:

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{q}{C} + R_1 I_1 \\ 0 = L\dot{I}_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1, \\ I = I_1 + I_2 \end{cases}$$

Здесь I — входной ток схемы, I_1 — сила тока через сопротивление R_1, I_2 — сила тока через катушку индуктивности L и сопротивление R_2.

$I = \dot{q}$, где q — заряд на конденсаторе.

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{q}{C} + R_1 I_1 \\ 0 = L\dot{I}_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 \\ \dot{q} = I_1 + I_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы в ответе получить напряжение на выходе схемы нам понадобиться узнать только ток I_2. Поэтому нам будет удобно выражать и подставлять в другие уравнения другие неизвестные: q и I_1. Переменную I_1 можно выразить из любого из трех уравнений, а переменную q можно выразить только из первого уравнения. Вот и выразим $q = CU_0 - R_1 C I_1$.

Подставим в оставшиеся уравнения и получим

$$\begin{cases} 0 = L\dot{I}_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 \\ -R_1 C\dot{I}_1 = I_1 + I_2 \end{cases}.$$

Теперь I_1 можно выразить только из нового первого (бывшего второго) уравнения $I_1 = \dfrac{L}{R_1}\dot{I}_2 + \dfrac{R_2}{R_1} I_2$. Тогда получим дифференциальное уравнение для единственной переменной I_2

$$-LC\ddot{I}_2 - R_2 C\dot{I}_2 = \frac{L}{R_1}\dot{I}_2 + \frac{R_2}{R_1} I_2 + I_2 \qquad =>$$

$$\ddot{I}_2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right)\cdot\dot{I}_2 + \frac{R_1 + R_2}{R_1 LC}\cdot I_2 = 0$$

Подставим сюда $I_2 = Ae^{\lambda t}$ и получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right)\lambda + \frac{R_1 + R_2}{R_1 LC} = 0.$$

Его решения имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right)^2 - \frac{R_1 + R_2}{R_1 LC}}.$$

Общее решение дифференциального уравнения для тока I_2 имеет вид

$$I_2 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Произвольные константы интегрирования A_1 и A_2 можно найти из условий: $\begin{cases} q(0) = 0 \\ I_2(0) = 0 \end{cases}$. Чтобы найти A_1 и A_2 нам нужно знать I_2 и $\dot{I}_2$ в нулевой момент времени. Подставим $q(0) = 0$ в первое уравнение системы (1) и получим $I_1(0)=\frac{U_0}{R_1}$. Подставим это значение и $I_2(0)=0$ во второе уравнение системы (1) и получим $0=L\dot{I}_2(0)+0-U_0$. Откуда $\dot{I}_2(0)=\frac{U_0}{L}$. Тогда

$$\begin{cases} I_2(0)=0 \\ \dot{I}_2(0)=\frac{U_0}{L} \end{cases}.$$

Подставим в эти условия общее решение $I_2=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}$ для I_2 и получим

$$\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ \lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2=\frac{U_0}{L} \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} A_1=\frac{U_0}{L\cdot(\lambda_1-\lambda_2)} \\ A_2=-\frac{U_0}{L\cdot(\lambda_1-\lambda_2)} \end{cases}$$

Подставим эти значения произвольных констант интегрирования в общее решение $I_2=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}$ и получим

$$I_2=\frac{U_0}{L(\lambda_1-\lambda_2)}\cdot\left(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}\right) \quad =>$$

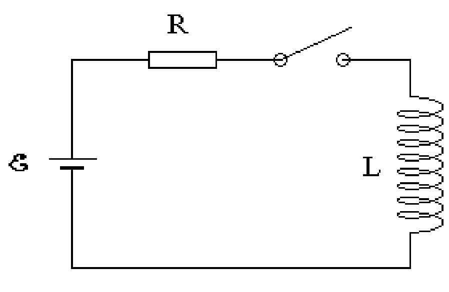
$$U_{вых}=R_2I_2=\frac{R_2U_0}{L(\lambda_1-\lambda_2)}\cdot\left(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}\right)$$

Заметим, что $U_{вых}(t)$ — вещественная функция даже при комплексных λ_1 и λ_2, так как в этом случае λ_1 и λ_2 — комплексно сопряженные величины.

Если λ_1 и λ_2 вещественные, то напряжение на выходе схемы — разность двух затухающих экспонент. Если λ_1 и λ_2 комплексные, то напряжение на выходе схемы — произведение затухающей экспоненты на синусоиду.

Экстраток размыкания.

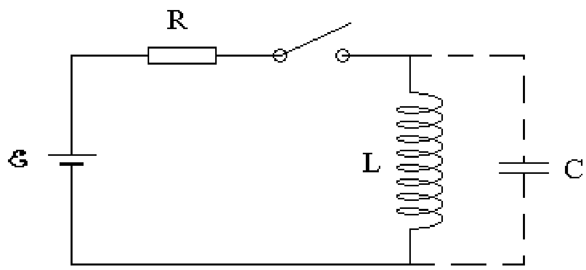
Рассмотрим схему, в которой последовательно включены постоянная ЭДС $\mathcal{E}$, резистор R, ключ и катушка индуктивности L.



Ключ долгое время был замкнут, и в цепи установился ток $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$, потому что для постоянного тока напряжение на индуктивности $U_L = L\dot{I}$ равно нулю.

При размыкании ключа ток в индуктивности должен скачком измениться до нуля, но при этом на индуктивности возникает бесконечное напряжение $U_L = L\dot{I}$. Это напряжение пробивает ключ. Напряженность пробоя $E_0 = 30$ кВ/см. Ток, возникающий во время пробоя ключа, называют экстратоком размыкания.

Чтобы оценить, при каких условиях наступает пробой ключа в реальной схеме, нужно учесть паразитные емкости между витками катушки индуктивности. Объединяя эти последовательные включенные емкости, можно считать, что параллельно катушке индуктивности включен конденсатор с очень малой емкостью C.



После размыкания ключа в контуре из индуктивности и емкости возникают электрические колебания. В начальный момент в катушке течет ток $I_{max} = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Напряжение на катушке, как и на конденсаторе почти нулевое. В катушке индуктивности при этом запасена энергия магнитного поля. Ток катушки заряжает конденсатор. При максимальном напряжении на конденсаторе ток равен нулю, и вся энергия превращается в энергию электрического поля конденсатора. Тогда

$$\frac{LI_{max}^2}{2} = \frac{CU_{max}^2}{2} \quad => \quad U_{max} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_{max}.$$

Емкость C — мала, следовательно, U_{max} — велико; $\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ — так называемое волновое сопротивление колебательного контура, $I_{max} = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$.