Электростатическое поле *E* произвольного распределения неподвижных зарядов.

Пусть кроме пробного заряда q' есть система точечных зарядов $\{q_i\}$.

Согласно принципу суперпозиции $\vec{F}' = \sum_i \vec{F}_i'$. Разделим это равенство на q' и получим

$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ — это равенство тоже называют принципом суперпозиции.

Подставим сюда $\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)$ и получим

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)$, где $\vec{r}_i$ — радиус-вектор заряда q_i.

Иногда удобно рассматривать непрерывное распределение заряда, а не точечные заряды, например, в плазме газового разряда или для электронного облака в атоме водорода.

Для описания непрерывных распределений зарядов введем понятие плотности зарядов:

$\rho \equiv \frac{dq}{dV}$ — объемная плотность заряда по аналогии с объемной плотностью массы $\rho \equiv \frac{dm}{dV}$,

$\sigma \equiv \frac{dq}{dS}$ — поверхностная плотность заряда,

$\tau \equiv \frac{dq}{dl}$ — линейная плотность заряда.

Из этих определений следует:

$dq = \rho\, dV = \sigma\, dS = \tau\, dl$. Это равенство можно умножить на любую функцию координат и просуммировать по всем зарядам. Тогда

$\sum_i (\cdot) q_i \leftrightarrow \int_{V'} (\cdot) \rho(\vec{r}')\, dV' \leftrightarrow \int_{S'} (\cdot) \sigma(\vec{r}')\, dS' \leftrightarrow \int_{l'} (\cdot) \tau(\vec{r}')\, dl'$, где вместо точки может быть любая функция координат.

Если эта функция $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$, то

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}\, q_i \quad \leftrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, \rho(\vec{r}')\, dV',$$

где слева выражение для электростатического поля, когда все заряды дискретные, а справа — когда все заряды объемные.

Если присутствуют заряды и дискретные и непрерывные, то получим

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} q_i + \int\limits_{V'} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\rho(\vec{r}\,')\,dV' + \int\limits_{S'} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\sigma(\vec{r}\,')\,dS' + \int\limits_{l'} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\tau(\vec{r}\,')\,dl'\right\}$$

— поле произвольного распределения зарядов.

В дальнейшем будем рассматривать заряды, то, как объемные, то, как точечные, в зависимости от того, как нам будет удобнее.

Линии электрического поля *E*.

В математике линия векторного поля — это линия, касательная в каждой точке к которой совпадает с направлением векторного поля в этой точке.

В физике к линиям поля есть дополнительное требование.

Плотность линий поля пропорциональна полю в каждой точке пространства.

(Число линий поля $\vec{E}$) / ($dS_{\perp\vec{E}}$) ≡ (Плотность линий поля $\vec{E}$) ~ E,

здесь $dS_{\perp\vec{E}}$ — проекция площадки, которую пронизывают линии поля $\vec{E}$, на плоскость перпендикулярную полю $\vec{E}$.

Условие пропорциональности числа линий поля самой напряженности поля не может быть выполнено в точности, так как напряженность может изменяться непрерывно, а число линий может изменяться только дискретно. Поэтому в физике понятие линий поля — нестрогое понятие.

Поток вектора электрического поля *E*.

Поток через поверхность — строгий аналог числа линий поля пронизывающих поверхность.

Введем поток Φ_E так, чтобы он был пропорционален числу линий поля, пронизывающих поверхность.

$d\Phi_E$ ~ (Число линий поля $\vec{E}$) = (Плотность линий поля $\vec{E}$) × $dS_{\perp\vec{E}}$ ~ $E\,dS_{\perp\vec{E}}$.

$d\Phi_E \equiv E\,dS_{\perp\vec{E}}$ — определение потока вектора $\vec{E}$ через поверхность, площадь проекции которой на плоскость перпендикулярную вектору $\vec{E}$ равна $dS_{\perp\vec{E}}$.

Выразим площадь проекции поверхности через площадь самой поверхности.

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности dS.

Из рисунка видно, что $dS_{\perp\vec{E}} = dS\cos(\alpha)$.

Тогда $d\Phi_E \equiv E\,dS_{\perp\vec{E}} = E\,dS\cos(\alpha) = E\,dS\cos\left(\widehat{\vec{E},\vec{n}}\right)$.

Введем определение вектора площадки: $d\vec{S} \equiv \vec{n}\,dS$. Тогда $\cos\left(\widehat{\vec{E},\vec{n}}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{E},d\vec{S}}\right)$.

Тогда $d\Phi_E = E\,dS\cos\left(\widehat{\vec{E},\vec{n}}\right) = E\,dS\cos\left(\widehat{\vec{E},d\vec{S}}\right) = \left(\vec{E},d\vec{S}\right)$.

$d\Phi_E \equiv \left(\vec{E},d\vec{S}\right)$ — определение потока поля $\vec{E}$ через произвольно ориентированную площадку $d\vec{S}$.

<u>Электростатическая теорема Гаусса.</u>

Теорема доказывается для неподвижных зарядов. По предположению Максвелла формулировка теоремы остается справедливой и для движущихся зарядов. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом, следовательно, так оно и есть.

Теорема Гаусса утверждает, что

$\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, где Φ_E — поток через замкнутую поверхность, границу объема V; Q — сумма зарядов в объеме V.

При вычислении потока используется внешняя нормаль к поверхности — нормаль, направленная наружу из объема V.

$\Phi_E = 4\pi Q$ — теорема Гаусса в системе единиц СГС Гаусса.

Докажем теорему сначала для поля одного точечного заряда, а затем для поля любой суперпозиции зарядов.

Совместим начало координат с точечным зарядом q, тогда электрическое поле в любой точке $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q}{r^2}$.

Рассмотрим малую площадку dS и поток через нее:

$$d\Phi_E = \left(\vec{E},d\vec{S}\right) = E\,dS_{\perp\vec{E}} = E\,dS_{\perp\vec{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\,dS_{\perp\vec{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\,\frac{dS_{\perp\vec{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\,d\Omega,$$

здесь $d\Omega$ — телесный угол, под которым площадка dS видна из точечного заряда q.

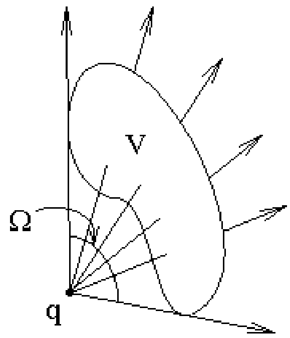
Пусть заряд q находится внутри замкнутой поверхности, тогда

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_E = \oint_S d\Phi_E \\ &d\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\, d\Omega \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S q\, d\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \oint_S d\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\, 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Итак, если точечный заряд находится внутри замкнутой поверхности, то формула $\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ доказана.

Рассмотрим теперь заряд, расположенный снаружи от объема V.



Из рисунка видно, что ближняя и дальняя границы объема относительно заряда видны под одинаковым телесным углом Ω. Тогда потоки через обе части границы одинаковы по модулю и равны $\Phi_E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\Omega$, так как $d\Phi_E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\, d\Omega$. При вычислении потока рассматривается внешняя нормаль к замкнутой поверхности, поэтому поток, который втекает в объем — отрицательный, а поток, который вытекает — положительный. Модули потоков равны, но знаки потоков противоположны. В таком случае поток через всю замкнутую поверхность будет равен нулю $\Phi_E = 0$.

В данной конфигурации зарядов внутри объема нет $Q = 0$. Поэтому равенство $\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ выполнено и в этом случае с учетом равенства $\Phi_E = 0$.

Рассмотрим теперь вторую часть доказательства, когда зарядов много.

На равенство $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ подействуем оператором $\oint_S \left(\cdot , d\vec{S} \right)$. Вместо точки в операторе поставим левую часть равенства и получим левую часть нового равенства. Аналогично вместо точки в операторе поставим правую часть старого равенства и получим правую часть нового равенства.

$$\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i, d\vec{S}\right). \qquad => \qquad \oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \sum_i \oint_S \left(\vec{E}_i, d\vec{S}\right) =>$$

$$\Phi_E = \sum_i \Phi_{E_i}, \qquad =>$$

$$\Phi_E = \sum_i \Phi_{E_i} = \sum_i \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{Q}{\varepsilon_0} =>$$

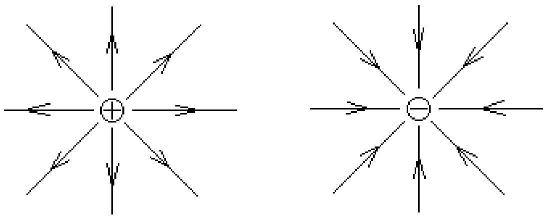
$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

что и требовалось доказать.

Линии поля $\vec{E}$ не рвутся.

Если в объеме нет зарядов $Q = 0$, то $\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = 0$. Поток равен нулю — это значит, сколько линий поля втекает в объем, столько и вытекает.

Следовательно, линии поля $\vec{E}$ не начинаются и не заканчиваются в пустом объеме без зарядов. В этом смысле линии поля $\vec{E}$ не рвутся. Это справедливо и для переменных электрических полей.

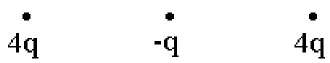


Линии поля $\vec{E}$ вытекают из положительных зарядов и втекают в отрицательные заряды. В этом смысле заряды буквально являются источниками поля.

Теорема Ирншоу.

Невозможно статическое распределение дискретных зарядов, в котором хотя бы один заряд находится в устойчивом равновесии.

Отметим, что неустойчивое равновесие возможно, например:



Для не дискретных зарядов в устойчивом равновесии, например, находится точечный положительный заряд в центре шара с одинаковой в разных точках шара отрицательной объемной плотностью заряда.

Доказательство теоремы Ирншоу.

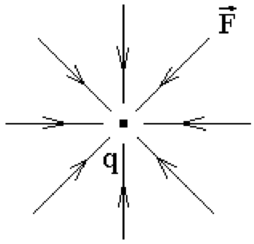
Проведем доказательство методом "от противного".

Предположим, что для одного из зарядов есть устойчивое равновесие и получим противоречие.

Все заряды дискретные — точечные.

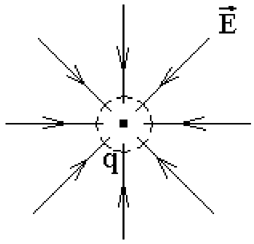
Пусть в устойчивом равновесии находится заряд q, например положительный.

Для устойчивого равновесия поле сил при смещении в любую сторону пытается вернуть заряд в точку равновесия. Тогда, если сдвигать заряд q, то поле сил $\vec{F}$ со стороны остальных зарядов на этот заряд q имеет следующий вид:



Аналогично выглядит и поле $\vec{E}$ остальных зарядов, кроме рассматриваемого заряда q, так как $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$.

Рассмотрим маленькую сферу вокруг заряда q:



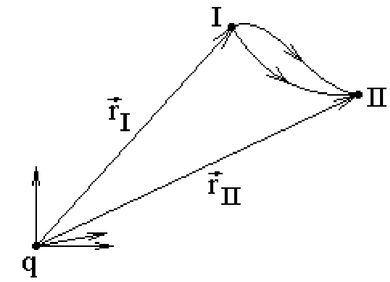
Из рисунка видно, что поток поля $\vec{E}$ остальных зарядов через эту сферу отрицательный $\Phi_E < 0$, линии поля втекают в сферу. Это с одной стороны, а с другой стороны поток равен нулю $\Phi_E = 0$. И действительно, внутри малой сферы вокруг заряда q нет других зарядов, и для этих других зарядов $Q = 0$. Следовательно, для поля $\vec{E}$ остальных зарядов, кроме заряда q, получим $\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = 0$.

Итак $\begin{cases} \Phi_E < 0 \\ \Phi_E = 0 \end{cases}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Потенциальность кулоновских сил.

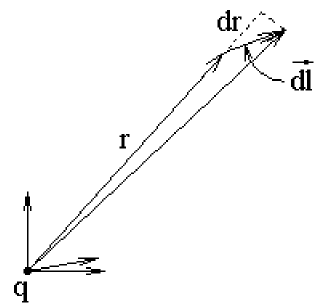
Поле сил потенциально (силы консервативны), если работа по перемещению в этом поле пробного заряда не зависит от формы траектории, а зависит только от начальной и конечной точки.

Докажем сначала потенциальность сил со стороны поля одного точечного заряда q. Для этого найдем работу электростатических сил $A'_{I \to II}$ при перемещении пробного заряда q' из точки I в точку II в поле одиночного заряда q:



Пусть начало координат совпадает с зарядом q. Найдем работу dA' на малом участке пути $d\vec{l}$:

$$dA' = \left(\vec{F}', d\vec{l}\right) = \left(q'\vec{E}, d\vec{l}\right) = q' E\, dl_E = q' E\, dl_r \approx q' E\, dr = q' \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} dr = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2}.$$



Из рисунка видно, что $dl_r \approx dr$.

Работа на конечном участке

$$A'_{I\to II} = \int\limits_I^{II} dA' = \int\limits_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_I}^{r_{II}} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_I} - \frac{1}{r_{II}}\right) \qquad =>$$

$A'_{I\to II} = \dfrac{q'q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\dfrac{1}{r_I} - \dfrac{1}{r_{II}}\right)$ — работа электростатических сил по перемещению пробного заряда q' в поле заряда q из точки $\vec{r}_I$ в точку $\vec{r}_{II}$, если начало координат совпадает с зарядом q.

Это выражение не зависит от формы траектории, следовательно, поле $\vec{E}$ точечного заряда потенциально.

Докажем теперь потенциальность сил произвольного распределения точечных зарядов.

Из принципа суперпозиции

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \quad \Bigg| \quad \int\limits_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \left(q' \cdot, d\vec{l}\right) \qquad =>$$

$$\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \left(q'\left(\vec{E}\right), d\vec{l} \right) = \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \left(q'\left(\sum_i \vec{E}_i \right), d\vec{l} \right) =>$$

$$\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \left(q'\vec{E}, d\vec{l} \right) = \sum_i \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \left(q'\vec{E}_i, d\vec{l} \right) \quad =>$$

$$A'_{I\to II} = \sum_i A'_{i,I\to II} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i q_i \left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}} \right)$$

$$A'_{I\to II} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i q_i \left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}} \right) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i q_i \left(\frac{1}{\left|\vec{r}_I - \vec{r}_i\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}_{II} - \vec{r}_i\right|} \right)$$

— работа электростатических сил по перемещению пробного заряда q' из точки I в точку II. Здесь $\vec{r}_{iI} = \vec{r}_I - \vec{r}_i$ — вектор из i-го заряда в точку I, $\vec{r}_{iII} = \vec{r}_{II} - \vec{r}_i$ — вектор из i-го заряда в точку II.

Потенциальная энергия заряда в электростатическом поле.

Энергия — это способность совершить работу.

Электростатическая энергия заряда q' в точке I по определению равна работе электростатических сил по перемещению этого заряда из точки I на бесконечность $W'_I \equiv A'_{I\to\infty}$.

$$W'_I \equiv A'_{I\to\infty} = A'_{I\to II}\Big|_{II\to\infty} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i q_i \left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}} \right)\Bigg|_{r_{iII}\to\infty} =$$

$$= \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_{iI}} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\left|\vec{r}_I - \vec{r}_i\right|} \qquad =>$$

$W'(\vec{r}) = \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \dfrac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}$ - энергия заряда q' в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ в поле остальных зарядов q_i.

Потенциал электростатического поля.

Потенциал по определению — это потенциальная энергия единичного заряда:

$$\varphi \equiv \frac{W'}{q'}.$$