Физический смысл ротора.

Рассмотрим маленькую площадку S:

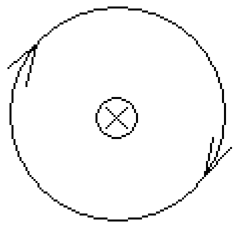
$$\int\limits_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S}\right) = \int\limits_S \left(rot\left(\vec{A}\right)\right)_n dS \approx \left(rot\left(\vec{A}\right)\right)_n \cdot \int\limits_S dS \approx S \cdot \left(rot\left(\vec{A}\right)\right)_n \quad =>$$

$$\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)_n \approx \frac{\int\limits_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S}\right)}{S} = \frac{\oint\limits_l \left(\vec{A}, d\vec{l}\right)}{S} = \frac{\Gamma_A}{S}$$

Проекция ротора на нормаль к площадке равна поверхностной плотности циркуляции.

Циркуляция — мера закрученности векторного поля.

Ротор производная вида:



Теорема о циркуляции электростатического поля *E* в дифференциальной форме.

По теореме о циркуляции электростатического поля для любого контура l:

$$\oint\limits_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0 \qquad \left|\cdot\frac{1}{S}\right. \qquad \left| S \to 0 \right. \qquad =>$$

$\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)_n = 0$ — для любой площадки и любого направления вектора $\vec{n}$ нормали к площадке. Тогда проекция ротора ***E*** на любое направление равна нулю и

$$rot\left(\vec{E}\right) = 0.$$

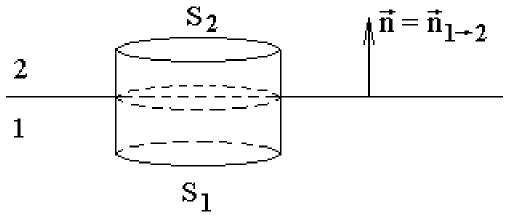
Скачок электрического поля *E* при переходе через заряженную поверхность.

Этот же вопрос можно было бы назвать "граничные условия для поля $\vec{E}$ в вакууме", так как заряженную поверхность можно рассматривать, как границу двух объемов.

Любая поверхность вблизи выглядит плоской.

Рассмотрим скачок поля $\vec{E}$ на плоской поверхности с поверхностной плотностью заряда σ.

Рассмотрим цилиндр малой высоты с основаниями параллельными заряженной плоскости. Пусть основания цилиндра расположены с двух сторон от заряженной плоскости.



Если высота цилиндра мала, то потоком через боковую поверхность можно пренебречь. Тогда

$$\Phi \approx \Phi_{S_2} + \Phi_{S_1} = E_{2n}S + E_{1n}S,$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к объему.

Удобнее рассматривать для двух площадок проекцию на одно и то же направление $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$. Тогда

$$\Phi \approx E_{2n}S - E_{1n}S,$$

где минус в последнем выражении вызван тем, что внешняя нормаль к цилиндру на площадке S_1 противоположна выбранному направлению нормали к заряженной плоскости $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$.

С другой стороны, тот же поток по теореме Гаусса равен

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}.$$

Сравнивая два выражения для потока Φ, получим

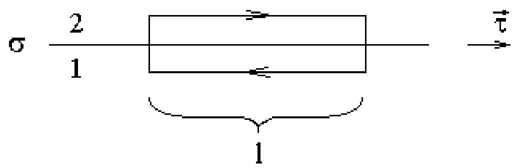
$$E_{2n}S - E_{1n}S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \qquad =>$$

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где нормаль к границе $\vec{n}$ смотрит из объема 1 в объем 2.

Рассмотрим теперь тангенциальную (по касательной к поверхности) составляющую поля $\vec{E}$ при переходе через заряженную границу.

Рассмотрим прямоугольный контур в плоскости перпендикулярной заряженной поверхности.



Если высота прямоугольника мала, то вклад в циркуляцию вертикальных отрезков пренебрежимо мал. Тогда

$$\Gamma_E \approx \Gamma_2 + \Gamma_1 = E_{2l} \cdot l + E_{1l} \cdot l = E_{2\tau}l - E_{1\tau}l,$$

где минус вызван тем, что на нижнем отрезке направление $d\vec{l}$ противоположно выбранному направлению единичного тангенциального вектора $\vec{\tau}$.

По теореме о циркуляции электростатического поля $\vec{E}$ имеем $\Gamma_E = 0$. Сравнивая равенство $\Gamma_E = 0$ с другим только что полученным равенством $\Gamma_E = E_{2\tau} l - E_{1\tau} l$, находим:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0.$$

Здесь $\vec{\tau}$ — единичный вектор в любом направлении по касательной к заряженной поверхности.

Три формы электростатической теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции.

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \\ div\left(\vec{E}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ E_{2n} - E_{1n} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

— электростатическая теорема Гаусса в интегральной форме, дифференциальной форме и для границы раздела.

В системе СГС Гаусса
$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\rho \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

— теорема о циркуляции электростатического поля $\boldsymbol{E}$ в интегральной форме, дифференциальной форме и для границы раздела.

Поля симметричных распределений зарядов. 1. Сферическая симметрия.

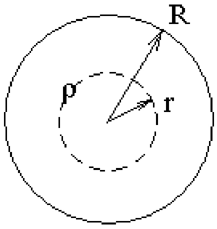
Рассмотрим задачу. Дан шар с радиусом R и объемной плотностью заряда ρ. Найти в любой точке пространства $\vec{E}$ и φ.

Решение.

Сначала найдем поле $\vec{E}$, а затем φ.

Будем искать поле $\vec{E}$ внутри шара на расстоянии r от центра шара $r \le R$.

Рассмотрим сферу с радиусом r с центром, совпадающим с центром заряженного шара.



Для сферы радиусом r применим теорему Гаусса:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad =>$$

$$E(r)S(r) = \frac{\rho V(r)}{\varepsilon_0} \qquad =>$$

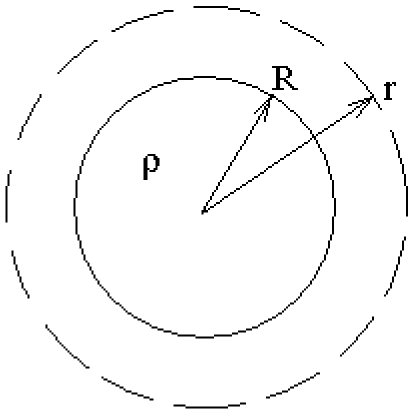
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \qquad =>$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \qquad \text{при } r \le R$$

В системе СГС Гаусса: $E = \frac{4}{3}\pi\rho r$ при $r \le R$.

Найдем теперь E при $r \ge R$.

Рассмотрим сферу $r \ge R$:



Для сферы $r \ge R$:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad =>$$

$$ES = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} \qquad =>$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

Здесь объем $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ только этой части объема $\frac{4}{3}\pi r^3$, где есть заряды. Тогда

$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$ при $r \ge R$.

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ при $r \ge R$, где Q — полный заряд шара.

В системе СГС Гаусса: $E = \frac{Q}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r^2}$ при $r \le R$.

Найдем теперь потенциал φ.

Сначала найдем потенциал снаружи от заряженного шара при $r \ge R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_{r}^{\infty} E dr = \int_{r}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} \qquad \text{при } r \ge R.$$

В системе СГС Гаусса: $\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{r} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r}$ при $r \ge R$.

Теперь найдем потенциал φ внутри шара при $r \le R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_{r}^{R} E dr + \int_{R}^{\infty} E dr = \int_{r}^{R} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr + \varphi(R) =$$

$$= \frac{\rho}{6\varepsilon_0} \cdot r^2 \Big|_r^R + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} \qquad =>$$

$\varphi = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}$ при $r \le R$.

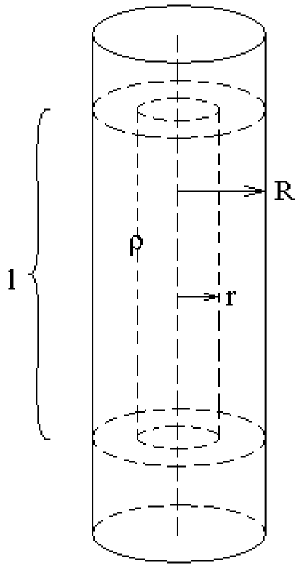
В системе СГС Гаусса: $\varphi = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2$ при $r \le R$.

Поля симметричных распределений зарядов. 2. Цилиндрическая симметрия.

Задача. Дан бесконечно длинный цилиндр радиуса R с плотностью заряда ρ. Найти поле $\vec{E}$.

Решение.

Чтобы найти поле E внутри заряженного цилиндра рассмотрим применение теоремы Гаусса к соосному цилиндру с радиусом $r \le R$ и длиной l.



$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$ES = \frac{\rho V}{\varepsilon_0}$$

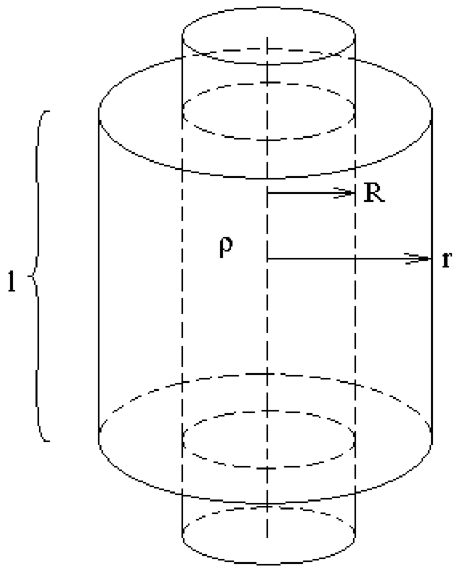
$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\rho \cdot \pi r^2 l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \qquad \text{при } r \le R.$$

В системе СГС Гаусса: $E = 2\pi\rho r$ *при* $r \le R$.

Найдем теперь поле $\vec{E}$ снаружи заряженного цилиндра при $r \ge R$.

Рассмотрим цилиндр с радиусом $r \ge R$ и высотой l.



$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$ES = \frac{\rho V}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\rho \cdot \pi R^2 l}{\varepsilon_0}$$

Здесь объем $V = \pi R^2 l$, так как только в этой части объема $\pi r^2 l$ есть заряды. Тогда

$$E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \qquad \text{при } r \geq R.$$

В системе СГС Гаусса: $\quad E = 2\pi\rho\frac{R^2}{r} \quad$ при $r \geq R$.

Факультативная вставка.

Попробуем найти потенциал φ.

Пусть точка наблюдения находится снаружи заряженного цилиндра $r \geq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_r^\infty E_l\, dl = \int_r^\infty E\, dr = \int_r^\infty \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} dr = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln(r)\Big|_r^\infty = \infty$$

Интеграл расходится, так как $\ln(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty$.

В реальном опыте потенциал не будет бесконечным, так как не бывает бесконечно длинных заряженных цилиндров.

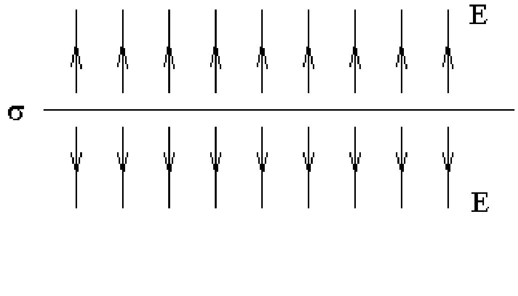
Если h — длина заряженного цилиндра, то при $r >> h$ цилиндр выглядит, как точечный заряд. Тогда

$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2} \quad => \quad \varphi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}, \qquad \text{где } Q = \rho V = \rho \cdot \pi R^2 h.$$

Конец факультативной вставки.

Поля симметричных распределений зарядов. 3. Плоская симметрия.

Бесконечная заряженная плоскость создает напряженность поля $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ с каждой стороны от плоскости:



.

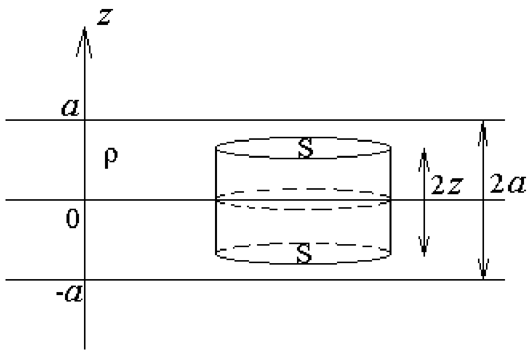
Это можно доказать, опираясь только на симметрию задачи и на скачок поля $\vec{E}$ при переходе через заряженную поверхность: $E_{2n} - E_{1n} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Задача. Дан бесконечный слой толщиной $2a$ с плотностью заряда ρ. Найти поле $\vec{E}$.

Решение.

Сначала поищем напряженность внутри заряженного слоя при $|z| \le a$.

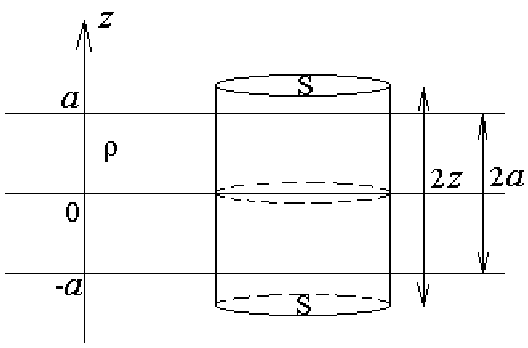
Применим теорему Гаусса к цилиндру с площадью основания S и высотой $2z$. Пусть цилиндр симметрично расположен относительно заряженного слоя.



$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad => \quad 2ES = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} \quad => \quad 2ES = \frac{\rho}{\varepsilon_0} 2zS \quad =>$$

$E_z = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} z$ при $|z| \le a$, где ось z направлена перпендикулярно заряженному слою.

Теперь поищем напряженность снаружи заряженного слоя при $|z| \ge a$.



$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad => \quad 2ES = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} \quad => \quad 2ES = \frac{\rho}{\varepsilon_0} 2aS \quad =>$$

$E = \dfrac{\rho a}{\varepsilon_0}$ при $|z| \ge a$, где ось z направлена перпендикулярно заряженному слою.