Дифференциальное уравнение для потенциала.

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = div\left(\vec{E}\right) = div\left(-\vec{\nabla}\varphi\right) = \left(\vec{\nabla}, -\vec{\nabla}\varphi\right) = -\left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right)\varphi = -\nabla^2\varphi = -\Delta\varphi \text{, где}$$

$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа или лапласиан. Тогда

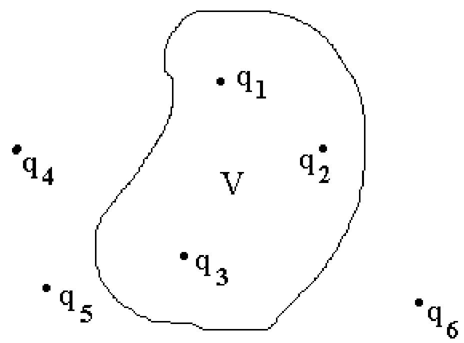
$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ — уравнение Пуассона. Это и есть дифференциальное уравнение для потенциала φ.

Если $\rho = 0$, то

$\Delta\varphi = 0$ — уравнение Лапласа — уравнение для потенциала в области без зарядов.

Понятие о краевой задаче электростатики.

Рассмотрим систему зарядов и некоторый объем V. Пусть одна часть зарядов находится внутри объема V, а другая — снаружи.



Если известно расположение всех зарядов, то потенциал в любой точке найти легко:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}$$

Пусть расположение зарядов известно только внутри объема V, но не известно за его пределами.

Можно ли заменить неизвестное расположение зарядов снаружи объема какой-нибудь информацией о потенциале на границе объема, чтобы можно было единственным образом найти потенциал внутри объема?

В этом и состоит краевая задача электростатики.

Краевая задача Дирихле.

Уравнение $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ имеет единственное решение в объеме V, если в каждой точке границы S объема V задан потенциал $\varphi\left(\vec{r}\right)\Big|_{\vec{r}\in S} \equiv \varphi\Big|_S$ (не одинаковый потенциал во всех точках границы, а в каждой точке границы задано свое значение потенциала).

Подразумевается, что в каждой точке внутри объема V задана плотность зарядов $\rho(\vec{r})$.

Краевая задача Неймана.

Уравнение $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ имеет единственное решение в объеме V, если в каждой точке границы S задана производная $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$ от потенциала по нормали к границе и хотя бы в одной точке из всех границ задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границ, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Краевая задача с границами в виде проводников.

Уравнение $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ имеет единственное решение в объеме V, если каждая граница объема — проводник, на каждой i-ой границе задан полный заряд Q_i и хотя бы в одной точке границ задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границ, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Краевая задача общего вида.

Уравнение $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ имеет единственное решение в объеме V, если на каждой границе объема V задано одно из условий вида 1, 2 или 3 и хотя бы в одной точке границ задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границ, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Доказательство единственности решения краевой задачи электростатики.

Предположим, что есть два решения φ_1 и φ_2, и для каждого из них выполнены граничные условия. Докажем, что два решения φ_1 и φ_2 тождественны.

Рассмотрим напряженности $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$ соответствующие этим двум решениям для потенциала. Покажем, что для тождественности φ_1 и φ_2 достаточно доказать, что в каждой точке объема $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$. Это равенство эквивалентно равенству $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, так как $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$. Кроме того, в каждой из четырех краевых задач хотя бы в одной точке S_0 границы S выполнено условие $\varphi_1|_{S_0} = \varphi_2|_{S_0}$. Откуда следует, что в этой точке границы некоторая функция, равная разности решений, равна нулю $\left.(\varphi_1 - \varphi_2)\right|_{S_0} = 0$.

Производная от разности потенциалов во всех точках объема равна нулю $\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)=0$, а сама разность равна нулю $\left.(\varphi_1-\varphi_2)\right|_{S_0}=0$ хотя бы в одной точке S_0. Тогда разность потенциалов во всех точках объема равна нулю $\left.(\varphi_1-\varphi_2)\right|_V=0$ или $\left.\varphi_1\right|_V=\left.\varphi_2\right|_V$, и два решения φ_1 и φ_2 тождественны.

То есть для тождественности решений φ_1 и φ_2 теперь достаточно доказать равенство $\vec{E}_1-\vec{E}_2=0$ для всех точек объема, и тогда теорема о единственности решения для потенциала φ в рассматриваемом объеме будет доказана. Чтобы доказать $\vec{E}_1-\vec{E}_2=0$ докажем два равенства:

$$\begin{cases}\int\limits_V\left(\vec{E}_1-\vec{E}_2,\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)dV=\oint\limits_S\left((\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2),d\vec{S}\right)\\ \oint\limits_S\left((\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2),d\vec{S}\right)=0\end{cases}.$$

Если мы их докажем, то получим $\int\limits_V\left(\vec{E}_1-\vec{E}_2,\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)dV=0$ или $\int\limits_V\left|\vec{E}_1-\vec{E}_2\right|^2dV=0$, то есть $\vec{E}_1-\vec{E}_2=0$ в каждой точке объема.

Докажем сначала первое равенство системы. Рассмотрим правую часть равенства:

$\oint\limits_S\left((\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2),d\vec{S}\right)=\int\limits_V div\left((\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)\right)dV$ - по теореме Гаусса — Остроградского для векторного поля $(\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)$. Тогда

$$\oint\limits_S\left((\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2),d\vec{S}\right)=\int\limits_V div\left((\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)\right)\cdot dV=\int\limits_V\left(\vec{\nabla},(\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)\right)\cdot dV$$

Левая набла в последнем выражении — это производная от произведения $(\varphi_1-\varphi_2)$ на $\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)$. Тогда цепочку равенств можно продолжить, как производную от первого сомножителя на нетронутый второй, плюс производная от второго сомножителя на нетронутый первый:

$$\ldots=\int\limits_V\left(\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2),\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)\right)\cdot dV+\int\limits_V(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)\right)\cdot dV=$$

$$=\int\limits_V\left(\vec{\nabla}\varphi_1-\vec{\nabla}\varphi_2,\vec{\nabla}\varphi_1-\vec{\nabla}\varphi_2\right)\cdot dV+\int\limits_V(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)(\varphi_1-\varphi_2)\cdot dV=$$

$$=\int\limits_V\left(\vec{E}_1-\vec{E}_2,\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)\cdot dV+\int\limits_V(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\Delta(\varphi_1-\varphi_2)\cdot dV=$$

$$=\int\limits_V\left(\vec{E}_1-\vec{E}_2,\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)\cdot dV+\int\limits_V(\varphi_1-\varphi_2)\cdot(\Delta\varphi_1-\Delta\varphi_2)\cdot dV=$$

$$=\int\limits_V\left(\vec{E}_1-\vec{E}_2,\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)\cdot dV+\int\limits_V(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(-\frac{\rho}{\varepsilon_0}-\left(-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)\right)\cdot dV=$$

$$=\int_V \left(\vec{E}_1-\vec{E}_2,\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)\cdot dV .$$

Таким образом, первое равенство системы доказано.

Докажем теперь второе равенство системы:

$$\oint_S \left(\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\vec{\nabla}\left(\varphi_1-\varphi_2\right),d\vec{S}\right)=0 .$$

Сначала преобразуем левую часть равенства к более удобному виду. Рассмотрим подынтегральное выражение:

$$\left(\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\vec{\nabla}\left(\varphi_1-\varphi_2\right),d\vec{S}\right)=\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\left(\varphi_1-\varphi_2\right),d\vec{S}\right)=$$

$$=\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)_{d\vec{S}}\cdot dS=\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)_{\vec{n}}\cdot dS=$$

$$=\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\cdot\frac{\partial\left(\varphi_1-\varphi_2\right)}{\partial n}\cdot dS=\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS$$

И так, нужно доказать равенство

$$\oint_S \left(\varphi_1-\varphi_2\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS=0 ,$$

докажем его отдельно для краевой задачи каждого вида.

1. Рассмотрим доказательство равенства $\oint_S \left(\varphi_1-\varphi_2\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS=0$ для задачи Дирихле, в которой $\varphi_1\big|_S=\varphi_2\big|_S$ в любой точке границы S.

$\varphi_1\big|_S=\varphi_2\big|_S$ => $\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\big|_S=0$ => Первый сомножитель $\left(\varphi_1-\varphi_2\right)$ под интегралом в любой точке границы, по которой и идет интегрирование, равен нулю. Следовательно, весь интеграл равен нулю, и равенство доказано для задачи Дирихле.

2. Рассмотрим теперь доказательство равенства $\oint_S \left(\varphi_1-\varphi_2\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS=0$ для задачи Неймана.

В краевой задаче Неймана $\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_S=\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_S$, следовательно, на поверхности S второй сомножитель подынтегрального выражения тождественно равен нулю, и интеграл равен нулю.

3. Теперь рассмотрим доказательство равенства $\oint_S \left(\varphi_1-\varphi_2\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS=0$ для задачи с границами в виде проводников.

Вся поверхность проводника в электростатике имеет одинаковый потенциал — является эквипотенциальной поверхностью. Это утверждение будет доказано чуть позднее, когда мы будем рассматривать свойства проводников. В символьном виде это может быть записано, как $\varphi\big|_{S_i} = const_i$, где S_i — поверхность i-го проводника границы, если граница многосвязная.

Тогда $\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\big|_{S_i} = const_i$

Этот сомножитель, как постоянную величину, можно вынести из под интеграла по границе i-го проводника:

$$\oint\limits_{S_i} \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right) \cdot dS = \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \cdot \oint\limits_{S_i} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right) dS =$$

$$= \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \cdot \oint\limits_{S_i} \left(-E_{1n} + E_{2n}\right) \cdot dS$$

Чуть позднее, рассматривая свойства проводников, мы получим, что над поверхностью проводника $E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, где σ — поверхностная плотность зарядов на проводнике. Тогда $-E_{1n} + E_{2n} = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$ =>

$$\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \cdot \oint\limits_{S_i} \left(-E_{1n} + E_{2n}\right) \cdot dS = \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \cdot \oint\limits_{S_i} \left(-\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\right) \cdot dS =$$

$$= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varepsilon_0} \cdot \left(\oint\limits_{S_i} \sigma_2 dS - \oint\limits_{S_i} \sigma_1 dS\right) = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varepsilon_0} \cdot \left(Q_{2i} - Q_{1i}\right).$$

Здесь Q_{1i} и Q_{2i} — полный заряд на i-ом проводнике в первом и втором решениях. Поскольку в краевой задаче с проводниками заряд на каждом проводнике задан, получаем $Q_{2i} = Q_{1i}$. Следовательно, интеграл равен нулю и для этой краевой задачи.

Для краевой задачи общего вида равенство $\oint\limits_{S} \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right) \cdot dS = 0$ будет выполнено для каждой границы, так как в краевой задаче общего вида на каждой границе выполнено одно из трех предыдущих краевых условий.

В результате равенство $\oint\limits_{S} \left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), d\vec{S}\right) = 0$ доказано для краевой задачи любого из четырех видов, и единственность решения краевой задачи электростатики доказана для этих четырех видов задач.

К вопросу о существовании решения краевой задачи электростатики.

Дифференциальное уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ с заданным потенциалом на границе $\varphi\big|_S$ можно преобразовать к интегральному уравнению

Фредгольма второго рода. Для этих интегральных уравнений существование решения задачи доказано, поэтому решение краевой задачи Дирихле в электростатике всегда существует.

Решения краевой задачи Неймана и задачи с проводниками существуют, если объем бесконечен. Если объем ограничен, то в этих задачах решение существует не всегда, а только при некоторых ограничениях на граничные условия на внешней границе объема.

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода в одномерном случае:

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,x')\varphi(x')dx'+f(x),$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция, для которой составлено уравнение; λ — параметр уравнения (константа); $K(x,x')$ — ядро уравнения.

$\int_a^b K(x,x')\varphi(x')dx'=f(x)$ — уравнение Фредгольма 1 рода.

Основные свойства проводников в электростатическом поле.

Проводник — материал, в котором под действием электрического поля $\vec{E}$ течет электрический ток.

Свойства проводников в электростатике.

1. $\vec{E}_{внутри}=0$ — поле $\vec{E}$ внутри проводника отсутствует.

Докажем это утверждение методом "от противного". Предположим, что $\vec{E}_{внутри}\neq 0$ и получим противоречие.

И действительно. Если электростатическое поле внутри неподвижного проводника не равно нулю $\vec{E}_{внутри}\neq 0$, то по определению проводника в нем течет ток, тогда заряды движутся, и не выполняются условия электростатики. Полученное противоречие доказывает, что в электростатике поле $\vec{E}_{внутри}$ внутри проводника равно нулю.

Если же отойти от рассмотрения электростатики, тогда, если в проводнике течет ток, то в проводнике есть отличное от нуля электрическое поле. Приложенное к проводнику напряжение создает в нем напряженность электрического поля и электрический ток.

2. $0=\vec{E}_{внутри}=-\vec{\nabla}\varphi_{внутри}=0$ => $\varphi_{внутри}=const$ — каждый проводник в электростатике эквипотенциален.

3. $\left\{\begin{aligned}&\frac{\rho_{внутри}}{\varepsilon_0}=div\left(\vec{E}_{внутри}\right)\\&\vec{E}_{внутри}=0\end{aligned}\right\}$ => $\rho_{внутри}=0$ =>

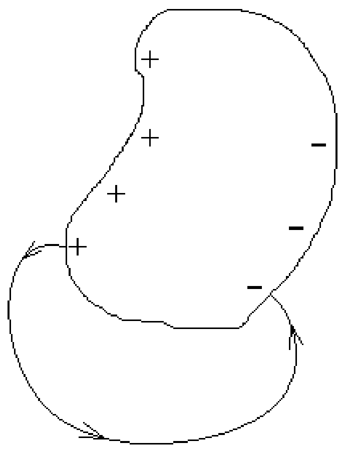
В электростатике нескомпенсированные заряды проводника могут находиться только на его поверхности.

4. $\begin{cases} E_{2n} - E_{1n} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{cases}$ => $E_n = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ - нормальная составляющая поля $\vec{E}$ над поверхностью проводника с поверхностной плотностью заряда σ, где $\vec{n}$ — нормаль, направленная из проводника наружу.

5. $\begin{cases} E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{cases}$ => $E_\tau = 0$ — тангенциальная составляющая поля $\vec{E}$ над поверхностью проводника отсутствует.

6. (Факультативно) В электростатике невозможно, чтобы линия поля $\vec{E}$ начиналась и заканчивалась на одном и том же проводнике, так как вдоль линии поля $\vec{E}$ потенциал понижается, а поверхность проводника эквипотенциальна.

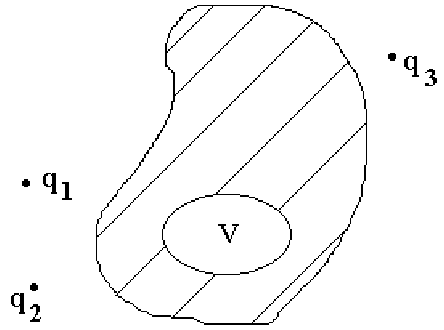
Невозможно:



Экранирование электростатического поля проводником.

Переменное электромагнитное поле тоже экранируется, но хуже. Магнитное поле (постоянное и переменное с частотой гораздо меньше, чем 10^{11} *Гц*) полностью экранировать может только сверхпроводник. Переменное магнитное поле порождает переменное электрическое поле и наоборот. Если же магнитное поле изменяется с низкой частотой, то оно проникает внутрь проводника и порождает в нем переменное электрическое поле той же частоты, что и магнитное поле. Именно поэтому переменное электрическое поле экранируется проводником не полностью.

Экранирование электростатического поля состоит в том, что если в проводнике есть полость без зарядов, то внутри полости $\vec{E} = 0$ независимо от того заряжен ли проводник и есть ли заряды снаружи проводника.



Рассмотрим объем полости V внутри тела проводника. Граница S объема V эквипотенциальна, так как является поверхностью проводника. Пусть потенциал этой поверхности равен φ_0. Тогда $\varphi\big|_S = \varphi_0$.

Придумаем в объеме V решение для уравнения $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$. Придумаем решение в виде постоянного потенциала $\varphi(\vec{r})\big|_V = \varphi_0$.

Это решение удовлетворяет условию краевой задачи Дирихле $\varphi\big|_S = \varphi_0$. Это решение удовлетворяет и уравнению Пуассона $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ в объеме V, так как в этом объеме нет зарядов: $\rho = 0$, и так как производные от постоянного потенциала φ_0 равны нулю: $\Delta\varphi = 0$.

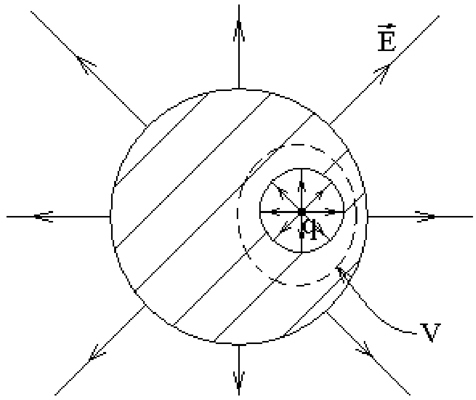
Из единственности решения краевой задачи Дирихле следует, что другого решения для потенциала в полости быть не может. Значит, придуманное нами решение для потенциала в объеме полости V и будет настоящим решением для потенциала в полости.

$\varphi(\vec{r})\big|_V = \varphi_0 = const \qquad => \qquad \vec{E} = 0$

Внутри полости поле $\vec{E}$ отсутствует или, что то же самое, проводник экранирует электростатическое поле.

Заряд внутри полости проводника.

Рассмотрим задачу: пусть есть незаряженный проводящий шар, внутри шара — сферическая полость, в центре полости точечный заряд. Найти поле $\vec{E}$ везде.



Сначала докажем, что на внутренней поверхности проводника, на поверхности полости, соберется заряд $-q$. Для этого применим теорему Гаусса к пунктирной границе S объема V. Все точки поверхности S находятся внутри объема проводника. Следовательно, в точках границы S отсутствует поле $\vec{E}$. Тогда и поток поля $\vec{E}$ через поверхность S равен нулю: $\Phi_E = 0$. По теореме Гаусса $\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, но $\Phi_E = 0$, тогда $Q = 0$ — сумма зарядов внутри поверхности S равна нулю. Все заряды проводника в электростатике расположены на его границе, может быть и на внутренней границе. Следовательно, если в полости заряд q, то на границе полости находится заряд $-q$.

Проводник не заряжен. Если на поверхности полости находится заряд $-q$, то на внешней поверхности проводника должен быть суммарный заряд q.

Теперь можно решать две совершенно независимые задачи.

В 1-ой задаче рассмотрим объем полости V. В этой задаче в центре объема V находится точечный заряд q. Граница объема — это поверхность проводника, на которой задан полный заряд $Q = -q$. Ни в одной точке границы не задан потенциал, поэтому задача о потенциале в объеме полости имеет единственное решение с точностью до неизвестного слагаемого. Задача сферически симметрична. Поэтому поле в объеме полости можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r меньше радиуса полости. Решение — поле точечного заряда $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2}$.

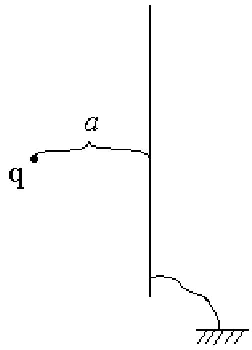
Во второй задаче рассмотрим объем снаружи проводника. На границе этого объема задан заряд q, и граница является поверхностью проводника. Снаружи этой поверхности зарядов нет. Задача сферически симметрична. Ее решение можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r больше радиуса проводящего шара. Решение — поле точечного заряда $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2}$. Заметим, что центр симметрии 2-ой задачи не совпадает с центром симметрии 1-ой задачи. И еще — если полость с зарядом в проводящем шаре имеет любую другую форму, то поле $\vec{E}$ снаружи проводящего шара не изменится.

Обобщая рассмотренную задачу, приходим к следующему выводу. Если есть незаряженный проводник, в полости которого есть какие-то заряды, то электростатическое поле снаружи проводника такое же, как будто полости нет, и проводник заряжен зарядами полости.

Метод изображений 1. Точечный заряд над проводящей заземленной плоскостью.

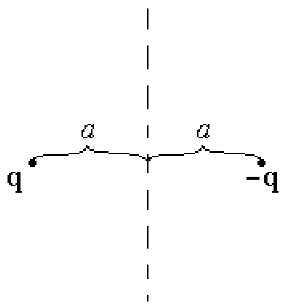
Рассмотрим задачу.

Дан точечный заряд q, расположенный над заземленной проводящей плоскостью на расстоянии a. Найти потенциал и напряженность поля в полупространстве над плоскостью.



Когда в задаче говориться, что проводник заземлен, то подразумевается, что он поддерживается под нулевым потенциалом. На самом деле электрический потенциал Земли отличен от нуля, но чтобы поставить опыт, в котором это отличие проявляется нужно очень постараться. Поэтому и в задачах и на практике можно считать, что соединение проводника с Землей обнуляет его потенциал.

Сравним эту задачу с другой, в которой нет проводящей плоскости, а вместо нее есть заряд-изображение $-q$, расположенный симметрично заряду q относительно плоскости.



Заряд-изображение $-q$ вместе с зарядом q создают нулевой потенциал в любой точке пунктирной плоскости. Следовательно, придуманный заряд-изображение вместе с реальным зарядом создают нужный потенциал на границе объема V (левой половине пространства) в задаче с проводящей заземленной плоскостью. Согласно единственности решения краевой задачи Дирихле в левой половине пространства потенциал в этих двух задачах одинаковый.

В результате поля $\vec{E}$ и φ в левой половине пространства в задаче с заземленной проводящей плоскостью — это поля двух точечных зарядов q и $-q$.