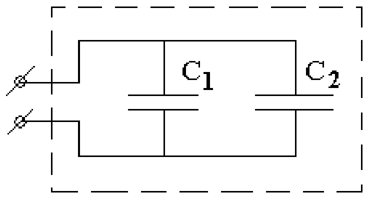
Электрическая емкость параллельного и последовательного соединения конденсаторов.

Пусть два конденсатора с емкостями C_1 и C_2 соединены параллельно и помещены в черный ящик, из которого торчат два провода:



Если не знать, что в черном ящике два конденсатора, а не один, то емкость этого одного конденсатора можно найти опытным путем.

Приложим к проводам напряжение U и измерим, какой заряд q протечет по проводам. Тогда $C = \dfrac{q}{U}$.

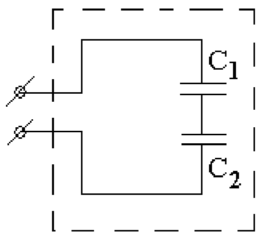
При параллельном соединении конденсаторов $\begin{cases} U = U_1 = U_2 \\ q = q_1 + q_2 \end{cases}$. Тогда

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} = \frac{q_1}{U_1} + \frac{q_2}{U_2} = C_1 + C_2 \qquad => \qquad C = C_1 + C_2.$$

Емкости параллельно соединенных конденсаторов складываются. Аналогично для большего числа параллельно соединенных конденсаторов:

$C = \sum\limits_i C_i$ — емкость при параллельном соединении конденсаторов.

Рассмотрим теперь последовательное соединение двух конденсаторов.



При последовательном соединении конденсаторов $\begin{cases} U = U_1 + U_2 \\ q = q_1 = q_2 \end{cases}$. Тогда

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2}{q} = \frac{U_1}{q} + \frac{U_2}{q} = \frac{U_1}{q_1} + \frac{U_2}{q_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad => \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

При последовательном соединении конденсаторов складываются обратные емкости. Аналогично для большего числа последовательно соединенных конденсаторов:

$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$, где C — емкость при последовательном соединении конденсаторов.

Энергия взаимодействия зарядов.

Рассмотрим пару зарядов:

Рассмотрим энергию второго заряда в поле первого заряда:

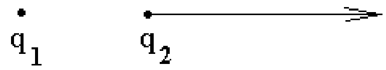
$$W_2 = q_2\varphi_2 = q_2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_{12}}.$$

Найдем теперь энергию первого заряда в поле второго:

$$W_1 = q_1\varphi_1 = q_1 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_{12}}.$$

Энергии равны $W_1 = W_2$. Возникает вопрос. Это две разные энергии или одна и та же?

Рассмотрим мысленный опыт:



Пусть первый заряд остается неподвижным, а второй заряд медленно уносят на бесконечность.

В этом процессе энергия первого заряда в поле второго изменяется от значения $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ до нуля, но работа над зарядом q_1 не совершается, так как он остается неподвижным.

По закону изменения энергии работа равна изменению энергии. Чтобы избежать противоречия нужно считать, что энергия $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ не принадлежит ни одному, ни другому заряду, а принадлежит сразу двум зарядам в том смысле, что работа над любым из двух зарядов изменяет эту энергию. Чтобы подчеркнуть эту особенность энергию $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ называют "энергией взаимодействия".

Для энергии взаимодействия удобна симметричная запись:

$$W = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right).$$

Рассмотрим теперь систему зарядов $\{q_i\}$.

Сила, действующая на каждый заряд, равна сумме сил парных взаимодействий этого заряда с каждым из остальных. При перемещении этого заряда работа электрических сил тоже будет равна сумме работ парных взаимодействий. Тогда и энергия $q_i\varphi_i$ заряда q_i в точке с потенциалом φ_i равна сумме энергий его парных взаимодействий.

Рассмотрим сумму энергий $q_i\varphi_i$ по всем зарядам $\sum_i q_i\varphi_i$. В этой сумме энергия взаимодействия каждой пары зарядов просуммирована дважды: один раз как энергия одного заряда из пары и второй раз как энергия второго заряда. Следовательно, энергия взаимодействия системы зарядов вдвое меньше этой суммы энергий всех зарядов.

$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ — энергия взаимодействия системы зарядов, где φ_i — потенциал в точке расположения i-ого заряда, создаваемый остальными зарядами системы.

Для непрерывного распределения зарядов

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\,\rho dV .$$

В системе СГС Гаусса оба выражения для энергии такие же, как в системе СИ.

Энергия электрического поля.

Для неподвижных зарядов энергия электрического поля — это то же самое, что и энергия взаимодействия зарядов. Для движущихся зарядов формула для энергии взаимодействия зарядов не верна, но формула для энергии поля, как предполагают, справедлива и для переменных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом.

$$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2}\int_V \varphi\,dq = \frac{1}{2}\int_V \varphi\,\rho dV = \frac{1}{2}\int_V \varphi\varepsilon_0 div\left(\vec{E}\right) dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varphi\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right) dV .$$

Здесь набла $\vec{\nabla}$ — это производная. Возьмем последний интеграл по частям, перебросив производную с одного сомножителя ($\vec{E}$) на другой (φ):

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varphi\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right) dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S \varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right) - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \left(\vec{\nabla}\varphi,\vec{E}\right) dV .$$

Здесь первое слагаемое в правой части равенства — это внеинтегральный член, просуммированный по краям области интегрирования, при этом сохранена векторная форма скалярного произведения. Второе слагаемое имеет прежнюю векторную форму, но производная берется от другого сомножителя. Доказать справедливость этого интегрирования по частям можно с помощью теоремы Гаусса — Остроградского для поля $\varphi\vec{E}$, не будем на этом останавливаться.

С учетом $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ подставим во второй интеграл $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$ и получим:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\oint\limits_S \varphi\left(\vec{E}, d\vec{S}\right) + \int\limits_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV .$$

Устремим объем к бесконечности. Мы можем это сделать, так как исходный интеграл $\int\limits_V \varphi\rho dV$ можно брать по любому объему, который охватывает все заряды. Чуть позднее докажем, что поверхностный интеграл стремится к нулю при стремлении объема интегрирования к бесконечности. Тогда

$W = \int\limits_{V=\infty} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV$ — энергия электрического поля.

$w \equiv \frac{dW}{dV}$ — определение объемной плотности энергии. Откуда

$$W = \int\limits_{V=\infty} w dV .$$

Тогда

$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ — объемная плотность энергии электрического поля.

В системе СГС Гаусса $w = \frac{E^2}{8\pi}$.

$$\oint\limits_S \varphi\left(\vec{E}, d\vec{S}\right) \to 0 \text{ \underline{\textbf{при}} } V \to \infty \textbf{.}$$

Докажем, что $\oint\limits_S \varphi\left(\vec{E}, d\vec{S}\right) \to 0$ при $V \to \infty$.

Пусть S - большая сфера, радиус которой гораздо больше расстояний между зарядами. И выберем положение сферы так, чтобы все заряды оказались вблизи центра сферы. Тогда для наблюдателя на поверхности сферы все распределение зарядов выглядит как один точечный заряд. =>

$$\begin{Bmatrix} \varphi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \\ E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \end{Bmatrix}.$$

Откуда, с учетом того что векторы $\vec{E}$ и $d\vec{S}$ почти параллельны в каждой точке поверхности, получаем

$$\oint\limits_S \varphi\left(\vec{E}, d\vec{S}\right) \approx \oint\limits_S \varphi E\, dS \approx \oint\limits_S \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{Q}{r}\frac{Q}{r^2} dS = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{Q^2}{r^3} \oint\limits_S dS =$$

$$=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{Q^2}{r^3}S=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{Q^2}{r^3}4\pi r^2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0^2}\frac{Q^2}{r}\xrightarrow[V\to\infty]{}0$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим парадокс.

Если $q_1q_2<0$, то $W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r}<0$. Это с одной стороны. А с другой стороны, если $\frac{\varepsilon_0E^2}{2}>0$, то $W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0E^2}{2}dV>0$. С одной стороны энергия W получилась отрицательная, а с другой стороны — положительная. Мы получили противоречие.

При выводе второй формулы для энергии $W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0E^2}{2}dV$ мы воспользовались равенством

$$\frac{1}{2}\sum_i\varphi_iq_i=\frac{1}{2}\int\limits_V\varphi\,dq,$$

которое на самом деле не выполняется. Причина неравенства в том, что φ_i — потенциал в точке расположения *i*-го заряда, создаваемый всеми остальными зарядами кроме *i*-го заряда, а φ — потенциал, создаваемый всеми зарядами.

В результате выражение $W=\frac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$ не содержит энергию взаимодействия каждого заряда с самим собой. Учесть эту энергию для точечных зарядов невозможно, потому что она бесконечная.

И действительно, рассмотрим энергию поля одного точечного заряда q по формуле $W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0E^2}{2}dV$. Покажем, что энергия в этой формуле бесконечна.

Будем считать, что точечный заряд представляет собой заряженную сферу радиусом R. Найдем энергию поля в виде интеграла $W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0E^2}{2}dV$, и устремим в полученном выражении радиус сферы R к нулю. Внутри сферы с радиусом R поле $\vec{E}$ равно нулю и интеграл по области $r<R$ можно не брать.

$$W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0E^2}{2}dV=\int\limits_R^\infty\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2dr=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int\limits_R^\infty\frac{dr}{r^2}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^\infty=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0R}$$

=>

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \xrightarrow[R \to 0]{} \infty$$

Эту же формулу $W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ для энергии заряженной сферы можно получить не только из формулы $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV$, но и из формулы $W = \frac{1}{2}\sum\limits_i q_i \varphi_i$. Для этого мысленно разобьем заряд сферы q на много зарядов q_i. Все эти заряды будут под одним и тем же потенциалом заряженной сферы $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$. Этот потенциал можно вынести за знак суммы $W = \frac{1}{2}\sum\limits_i q_i \varphi_i$. Под знаком суммы останется сумма зарядов q_i равная q.

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi = \frac{\varphi}{2}\sum_i q_i = \frac{\varphi}{2} q = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Энергия заряженной сферы одинаково стремится к бесконечности по формуле $W = \frac{1}{2}\sum\limits_i q_i \varphi_i$ и по формуле $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV$ при стремлении радиуса сферы к нулю. Следовательно, точечный заряд обладает бесконечной энергией взаимодействия его частей друг с другом.

Если же мы рассмотрим, например, заряженную сферу, как один точечный заряд, то в выражении $W = \frac{1}{2}\sum\limits_i q_i \varphi_i$ будет только одно слагаемое, и потенциал φ_1 в этом слагаемом равен нулю, так как это потенциал поля остальных зарядов, которых нет. То есть для одного точечного заряда по формуле $W = \frac{1}{2}\sum\limits_i q_i \varphi_i$ получаем $W = 0$, а по формуле $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV$ получаем $W = \infty$.

Электрон — точечный заряд.

Согласно современным представлениям протоны и нейтроны состоят из кварков, а электроны не имеют структуры и, казалось бы, должны быть точечными объектами.

Точечный заряд должен иметь бесконечную энергию электрического поля, а, следовательно, и бесконечную массу $W = mc^2$.

Масса электрона конечна, отсюда можно найти радиус электрона. Приравняем электрическую энергию заряженной сферы к энергии покоя электрона и получим радиус электрона:

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_e} = m_e c^2 \qquad => $$

$r_e = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2}$ — электростатический радиус электрона, e — модуль заряда электрона, m_e — масса покоя электрона. Обычно вместо величины r_e рассматривают вдвое большую величину $r_0 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}$, которую называют классическим радиусом электрона.

$r_e = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \approx 10^{-15}$ м, что примерно в 10 раз меньше радиуса атомного ядра.

Для сравнения $r_g = \dfrac{2Gm_e}{c^2} \approx 10^{-57}$ м — гравитационный радиус электрона или радиус сферы Шварцшильда для объекта с массой электрона. Время на сфере Шварцшильда останавливается. Если электрон сжать до шара с таким радиусом, то он превратится в черную дыру.

Как же выйти из полученного противоречия, что с одной стороны электрон — точечный объект, а с другой стороны его масса не бесконечна?

Дело в том, что вокруг электрона постоянно рождаются на короткое время и пропадают электрон-позитронные пары. В каждой такой паре позитрон с большей вероятностью будет ближе к исходному электрону, чем новый электрон рожденной пары. Поле внутри рожденной пары направлено навстречу полю исходного электрона. По этой причине в малой окрестности электрона напряженность поля возрастает при приближении к электрону медленнее, чем $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2}$, и интеграл от квадрата напряженности по объему оказывается не бесконечной величиной.

Обсуждая такие малые длины, нужно указать, что минимальной возможной длиной считается планковская длина. Это длина, на которой квантовые флуктуации кривизны пространства настолько велики, что само пространство теряет смысл. Рассмотрим черную дыру очень малого радиуса, такого, что радиус черной дыры $r_g = \dfrac{2Gm}{c^2}$ будет равен длине волны де Бройля $\lambda = \dfrac{h}{mc}$ для этой черной дыры, где в выражении для длины волны де Бройля скорость движения черной дыры V заменили скоростью света c. Из равенства $\dfrac{2Gm}{c^2} = \dfrac{h}{mc}$ выразим массу m и подставим ее в выражение для длины волны де

Бройля. Тогда получим $\lambda = r_g = \sqrt{\dfrac{2Gh}{c^3}}$. Планковская длина по определению чуть меньше этой длины:

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1{,}616\,229(38)\cdot 10^{-35}\,м.$$

Электростатическая энергия заряженного проводника и системы проводников.

Рассмотрим энергию взаимодействия зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i .$$

Все заряды на поверхности одного проводника имеют одинаковый потенциал. Если просуммировать слагаемые $\sum_i q_i\varphi_i$ для *k*-го проводника, то получим $\sum_i q_i\varphi_i = \varphi_k\sum_i q_i = Q_k\varphi_k$, где φ_k — потенциал *k*-го проводника, Q_k — полный заряд на *k*-ом проводнике.

Тогда вместо суммы по всем точечным зарядам получим сумму по всем проводникам:

$W = \dfrac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$ — энергия электростатического взаимодействия системы проводников, где i — номер проводника, Q_i — заряд *i*-ого проводника, φ_i — потенциал *i*-ого проводника. В системе СГС Гаусса формула выглядит также.

Для одного проводника получаем

$$W = \frac{Q\varphi}{2}.$$

В частности для проводящего шара, как и для проводящей сферы, $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q}{R}$ => $W = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$.

Энергия заряженного конденсатора.

Конденсатор — это два проводника. Просуммируем выражение для энергии $W = \dfrac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$ по этим двум проводникам:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i = \frac{1}{2}\big(q\varphi_1 + (-q)\varphi_2\big) = \frac{q}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{qU}{2}.$$

Это выражение можно заменить на эквивалентные выражения с учетом соотношения $C \equiv \dfrac{q}{U}$:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

Все три выражения справедливы и в системе СГС Гаусса. Последнее выражение проще запомнить:

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

Электрический диполь.
Потенциал поля точечного диполя.

Издалека любое распределение зарядов выглядит, как один точечный заряд $\varphi(\vec{r}) \approx \frac{Q}{r}$. Здесь начало координат выбрано где-то вблизи зарядов, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения потенциала. К этому выражению можно сделать поправки в виде ряда по степеням $\frac{1}{r}$:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} + \frac{f_2(\theta,\varphi)}{r^2} + \frac{f_3(\theta,\varphi)}{r^3} + \frac{f_4(\theta,\varphi)}{r^4} + \frac{f_5(\theta,\varphi)}{r^5} + \ldots$$

Слагаемые этого ряда имеют названия: потенциал точечного заряда, потенциал точечного диполя, потенциал точечного квадруполя, потенциал точечного октуполя, потенциал точечного гексадекаполя и т. д.

Точное выражение для потенциала имеет вид:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

Найдем первые два слагаемых разложения этого потенциала по степеням $\frac{1}{r}$.

$|\vec{r}| >> |\vec{r}_i|$ => $\frac{\vec{r}_i}{r}$ — безразмерный малый параметр задачи. Найдем отрезок ряда Тейлора по степеням $\vec{r}_i$ и автоматически получим требуемое разложение по $\frac{1}{r}$.

В трехмерном пространстве $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \left(d\vec{r}, \vec{\nabla} f\right)$, тогда

$$f(d\vec{r}) \approx f(0) + df = f(0) + \left(d\vec{r}, \vec{\nabla} f\right).$$

Для малого приращения $d\vec{r} = \vec{r}_i$ получим

$$f(\vec{r}_i) \approx f(0) + df = f(0) + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla} f\right).$$

В качестве $f(\vec{r}_i)$ рассмотрим $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ и получим

$$\frac{1}{\left|\vec r-\vec r_i\right|}\approx\frac{1}{r}+\left(\vec r_i,\left(\vec\nabla_i\frac{1}{\left|\vec r-\vec r_i\right|}\right)\Bigg|_{\vec r_i=0}\right)$$

Здесь $\vec\nabla_i$ - производная по координатам вектора $\vec r_i$.

Докажем, что для любой функции $f\left(\vec r-\vec r_i\right)$ от разности векторов $\left(\vec r-\vec r_i\right)$ справедливо следующее соотношение:

$\vec\nabla_i f\left(\vec r-\vec r_i\right)=-\vec\nabla f\left(\vec r-\vec r_i\right)$.

И действительно:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial x_i}f\left(\vec r-\vec r_i\right)=\dfrac{\partial f\left(\vec r-\vec r_i\right)}{\partial\left(x-x_i\right)}\cdot\dfrac{\partial\left(x-x_i\right)}{\partial x_i}=-\dfrac{\partial f\left(\vec r-\vec r_i\right)}{\partial\left(x-x_i\right)}\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}f\left(\vec r-\vec r_i\right)=\dfrac{\partial f\left(\vec r-\vec r_i\right)}{\partial\left(x-x_i\right)}\cdot\dfrac{\partial\left(x-x_i\right)}{\partial x}=+\dfrac{\partial f\left(\vec r-\vec r_i\right)}{\partial\left(x-x_i\right)}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\vec\nabla_i=-\vec\nabla$$

=>

$$\frac{1}{\left|\vec r-\vec r_i\right|}\approx\frac{1}{r}+\left(\vec r_i,\left(\vec\nabla_i\frac{1}{\left|\vec r-\vec r_i\right|}\right)\Bigg|_{\vec r_i=0}\right)=\frac{1}{r}-\left(\vec r_i,\left(\vec\nabla\frac{1}{\left|\vec r-\vec r_i\right|}\right)\Bigg|_{\vec r_i=0}\right)\approx\frac{1}{r}-\left(\vec r_i,\vec\nabla\frac{1}{r}\right).$$

Найдем $\vec\nabla\dfrac{1}{r}$:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{r}\\[2ex] \vec E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\vec r}{r^3}\\[2ex] \vec E=-\vec\nabla\varphi\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\vec\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec r}{r^3}$$

Подставим это выражение в разложение $\dfrac{1}{\left|\vec r-\vec r_i\right|}$ по степеням $\vec r_i$:

$$\frac{1}{\left|\vec r-\vec r_i\right|}\approx\frac{1}{r}-\left(\vec r_i,\vec\nabla\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}+\left(\vec r_i,\frac{\vec r}{r^3}\right)=\frac{1}{r}+\frac{\left(\vec r_i,\vec r\right)}{r^3}$$

Подставим это разложение в выражение для потенциала:

$$\varphi\left(\vec r\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{\left|\vec r-\vec r_i\right|}\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\cdot\left(\frac{1}{r}+\frac{\left(\vec r_i,\vec r\right)}{r^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sum\limits_i q_i}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\left(\sum\limits_i q_i\vec r_i,\vec r\right)}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\left(\vec p,\vec r\right)}{r^3}$$