

### Потенциал поля точечного диполя (продолжение).

Здесь введено обозначение

$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$  - дипольный момент распределения зарядов.

Тогда  $\varphi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$ , где  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$  — потенциал заряда,

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$  — потенциал диполя.

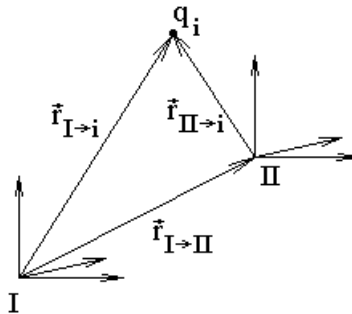
$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$  — потенциал точечного диполя.

$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$  — определение дипольного момента системы зарядов  $\{q_i\}$ .

В системе СГС Гаусса:  $\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$  и  $\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$ .

### Изменение дипольного момента при переходе от одной системы отсчета к другой.

Пусть  $\vec{r}_{I \rightarrow II}$  — положение второй системы отсчета относительно первой,  $\vec{r}_{I \rightarrow i}$  — радиус-вектор заряда  $q_i$  в первой системе отсчета,  $\vec{r}_{II \rightarrow i}$  — радиус-вектор заряда  $q_i$  во второй системе отсчета.



Из рисунка видно, что  $\vec{r}_{II \rightarrow i} = \vec{r}_{I \rightarrow i} - \vec{r}_{I \rightarrow II}$ . Обозначим дипольный момент относительно первой системы отсчета за  $\vec{p}_I$ , а относительно второй системы —  $\vec{p}_{II}$ . Тогда

$$\vec{p}_{II} = \sum_i q_i \vec{r}_{II \rightarrow i} = \sum_i q_i \cdot (\vec{r}_{I \rightarrow i} - \vec{r}_{I \rightarrow II}) = \sum_i q_i \vec{r}_{I \rightarrow i} - \left( \sum_i q_i \right) \cdot \vec{r}_{I \rightarrow II} = \vec{p}_I - Q \cdot \vec{r}_{I \rightarrow II}$$

$$\vec{p}_{II} = \vec{p}_I - Q \cdot \vec{r}_{I \rightarrow II}$$

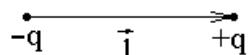
Здесь  $\vec{p}_{II}$  — дипольный момент во второй системе отсчета,  $\vec{p}_I$  — дипольный момент в первой системе отсчета,  $Q$  — полный заряд системы,  $\vec{r}_{I \rightarrow II}$  — положение второй системы отсчета относительно первой.

$$\underline{\underline{\vec{p}_{II} = \vec{p}_I \text{ при } Q = 0.}}$$

Дипольный момент не зависит от системы координат, если полный заряд системы равен нулю. Обычно дипольный момент системы зарядов рассматривают только в том случае, если полный заряд системы равен нулю. При этом величина дипольного момента не зависит от положения начала координат.

### Простейший электрический диполь.

Простейший электрический диполь с нулевым полным зарядом — это пара точечных зарядов противоположных знаков и одинаковых по модулю.



$$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2 = (-q) \vec{r}_1 + (+q) \vec{r}_2 = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = q\vec{l} \quad \Rightarrow$$

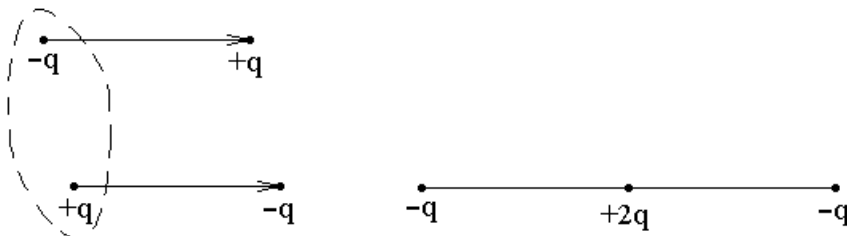
$$\vec{p} = q\vec{l}$$

Здесь  $\vec{p}$  — дипольный момент пары зарядов  $-q$  и  $+q$ ,  $\vec{l}$  — вектор направленный из заряда  $-q$  к заряду  $+q$ .

### Простейший квадруполь, октуполь, гексадекаполь и т.д.

Если точечный заряд продублировать, поменять знак и сдвинуть, то полученная пара зарядов образует простейший диполь.

Если заряды простейшего диполя продублировать, поменять их знаки и сдвинуть на один и тот же вектор, то образуется простейший квадруполь.



На рисунке приведены два варианта квадруполей.

Если заряды простейшего мультиполя продублировать, поменять их знаки и сдвинуть на один и тот же вектор, то образуется простейший мультиполь следующего порядка.

### Напряженность поля точечного диполя.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\vec{\nabla} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left( \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3} \right)$$

Раскроем последнее выражение, как производную от произведения  $(\vec{p}, \vec{r})$  на  $\frac{1}{r^3}$ .

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} \cdot \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{r}) + (\vec{p}, \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right\}$$

Вычислим отдельно каждую из производных в последнем выражении.

Сначала вычислим  $\vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{r})$ .

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(p_x x + p_y y + p_z z) = p_x \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{r}) = \vec{p}$$

Вычислим теперь  $\vec{\nabla} \frac{1}{r^3}$ .

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = \vec{\nabla} \left( \left( \frac{1}{r} \right)^3 \right) = 3 \left( \frac{1}{r} \right)^2 \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}$$

Найдем  $\vec{\nabla} \frac{1}{r}$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \\ \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Тогда

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = 3 \left( \frac{1}{r} \right)^2 \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} = 3 \left( \frac{1}{r} \right)^2 \cdot \left( -\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -3 \frac{\vec{r}}{r^5}$$

$$\text{Подставим } \begin{cases} \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{r}) = \vec{p} \\ \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = -3 \frac{\vec{r}}{r^5} \end{cases} \text{ в } \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} \cdot \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{r}) + (\vec{p}, \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right\} \text{ и}$$

получим:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right\}, \text{ где } \vec{r} \text{ — вектор, направленный из диполя } \vec{p} \text{ в}$$

точку наблюдения.

### **Напряженность поля точечного диполя с учетом поля внутри самого диполя.**

Без доказательства:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{4}{3} \pi \vec{p} \cdot \delta(\vec{r}) \right\}.$$

Здесь  $\delta(\vec{r})$  — дельта-функция Дирака. Для дельта-функции по определению:

$$\text{при } \vec{r} \neq 0: \delta(\vec{r}) = 0,$$

при  $\vec{r} = 0$ :  $\delta(\vec{r}) = \infty$ ,

$$\int_{V=\infty} \delta(\vec{r}) \cdot dV = 1.$$

$\delta(\vec{r})$  — очень узкая и очень высокая функция.

Для точечного заряда  $q_0$ , расположенного в точке  $\vec{r}_0$ , объемная плотность заряда:

$$\rho(\vec{r}) = q_0 \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

### **Момент сил, действующих на точечный диполь в электрическом поле.**

Рассмотрим систему зарядов  $\{q_i\}$ , близко расположенных друг к другу. Суммарный момент внутренних сил равен нулю в соответствии с третьим законом Ньютона. Тогда момент сил, действующих на систему зарядов, можно найти, как сумму моментов внешних сил, действующих на каждый из зарядов:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \sum_i [\vec{r}_i, q_i \vec{E}_i].$$

Если расстояния между зарядами малы, то напряженности внешнего электрического поля в точках расположения разных зарядов примерно равны  $\vec{E}_i \approx \vec{E}$ .  $\Rightarrow$

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, q_i \vec{E}_i] \approx \sum_i [\vec{r}_i, q_i \vec{E}] = \sum_i [q_i \vec{r}_i, \vec{E}] = \left[ \sum_i q_i \vec{r}_i, \vec{E} \right] = [\vec{p}, \vec{E}] \Rightarrow$$

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}], \text{ где } \vec{M} \text{ — момент сил, } \vec{p} \text{ — дипольный момент, } \vec{E} \text{ —}$$

внешнее по отношению к диполю электрическое поле.

### **Сила, действующая на точечный диполь в электрическом поле.**

Сумма внутренних сил между зарядами диполя равна нулю по третьему закону Ньютона. Тогда силу, действующую на диполь, можно найти, как сумму внешних сил, действующих на отдельные заряды диполя:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q_i \vec{E}_i.$$

Если, как и в предыдущем вопросе считать, что  $\vec{E}_i \approx \vec{E}$ , то для диполя с нулевым суммарным зарядом суммарная сила будет равна нулю. Поэтому для определения величины силы потребуется учесть небольшое различие величин  $\vec{E}_i = \vec{E}(\vec{r}_i)$  в точках  $\vec{r}_i$  расположения разных зарядов  $q_i$  рассматриваемого диполя. Чтобы учесть это различие, разложим напряженность электрического поля  $\vec{E}(\vec{r})$  в ряд Тейлора по степеням  $\vec{r}$  в малой окрестности рассматриваемого диполя.

$$f(\vec{r}_i) \approx f(0) + df = f(0) + (\vec{r}_i, \vec{\nabla} f) = f(0) + (\vec{r}_i, \vec{\nabla}) f.$$

Если  $\vec{f}$  — векторная величина, то предыдущее равенство справедливо для каждой проекции этого вектора и для всего вектора:

$$\vec{f}(\vec{r}_i) \approx \vec{f}(0) + (\vec{r}_i, \vec{\nabla}) \vec{f}.$$

Поместим начало координат вблизи зарядов диполя. Рассмотрим разложение поля  $\vec{E}$  в ряд Тейлора в точке расположения заряда  $q_i$ .

$$\vec{E}_i \equiv \vec{E}(\vec{r}_i) \approx \vec{E} + (\vec{r}_i, \vec{\nabla}) \vec{E} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_i \approx \sum_i q_i \left\{ \vec{E} + (\vec{r}_i, \vec{\nabla}) \vec{E} \right\} = \vec{E} \cdot \sum_i q_i + \left( \sum_i q_i \vec{r}_i, \vec{\nabla} \right) \vec{E} = Q\vec{E} + (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E}$$

В последнем выражении первое слагаемое — сила, действующая на полный заряд системы зарядов, а второе слагаемое — сила, действующая на диполь.

$\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E}$  — сила, действующая на точечный диполь, где  $\vec{F}$  — сила,  $\vec{p}$  — дипольный момент,  $\vec{E}$  — электрическое поле.

### Энергия диполя в электрическом поле.

Рассмотрим правило "бац минус цап"

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$  для векторов  $\vec{p}$ ,  $\vec{\nabla}$ ,  $\vec{E}$  и получим

$$[\vec{p}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{p}, \vec{\nabla}).$$

В левой части равенства  $[\vec{p}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = [\vec{p}, \text{rot}(\vec{E})]$ , но по теореме о циркуляции электростатического поля в дифференциальной форме  $\text{rot}(\vec{E}) = 0$ .

$$\text{Тогда } [\vec{p}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{p}, \vec{\nabla}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E}) = \vec{E}(\vec{p}, \vec{\nabla}) = (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E}$$

$$\text{Тогда из } \vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E} \text{ следует } \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E}).$$

Для любой природы сил, если  $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$ , то  $W$  — потенциальная энергия.

Тогда из  $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E}) = -\vec{\nabla}(-(\vec{p}, \vec{E}))$  следует, что

$$W = -(\vec{p}, \vec{E}) \text{ — энергия точечного диполя в электрическом поле.}$$

### Энергия наведенного диполя.

Формула  $W = -(\vec{p}, \vec{E})$  безусловно справедлива для жесткого диполя, который может поворачиваться в поле  $\vec{E}$ , но в котором заряды не могут изменять взаимного расположения. Некоторые молекулы не имеют дипольного момента, пока нет внешнего поля  $\vec{E}$ . При включении поля  $\vec{E}$  положительные заряды молекулы смещаются по полю, а отрицательные — против поля. В результате молекула приобретает так называемый наведенный дипольный момент пропорциональный полю:  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ , где  $\alpha$  — поляризуемость молекулы.

Наведенный диполь имеет две разных энергии:

$W_1 = -(\vec{p}, \vec{E})$  — чисто электрическая энергия, которая зависит только от расположения зарядов диполя и не зависит от природы диполя жесткого или наведенного.

Вторая энергия  $W_2 = +\frac{1}{2}(\vec{p}, \vec{E})$  — энергия упругих сил внутри молекулы, которые пытаются вернуть заряды на исходное место.

С учетом этих двух энергий энергия наведенного диполя:

$$W = -\frac{1}{2}(\vec{p}, \vec{E})$$

Обычно под энергией наведенного диполя подразумевают именно эту величину, полученную с учетом энергии упругих сил, пытающихся вернуть заряды диполя на свои места, занимаемые без внешнего поля.

Заметим, что выражение для силы  $\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla})\vec{E}$  справедливо и для жесткого и для наведенного диполя.

### Электростатика диэлектриков.

Диэлектрик — материал, в котором не течет ток под действием постоянного электрического поля.

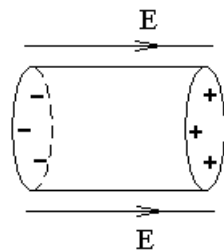
#### Поляризация диэлектрика и связанные заряды.

В электрическом поле некоторые молекулы ведут себя, как жесткие диполи, например HCl, другие — как наведенные диполи, например N<sub>2</sub>.

Жесткие диполи поворачиваются вдоль поля, а наведенные — наводятся вдоль поля.

В любом случае под действием электрического поля положительные заряды смещаются по полю  $\vec{E}$ , а отрицательные — против поля.

Если электрическое поле одинаковое в разных точках диэлектрика, то при смещении зарядов заряды не появляются в объеме диэлектрика. Не скомпенсированные заряды появляются на границах диэлектрика.



Эти заряды называются связанными зарядами.

Будем называть заряды связанными, если это макроскопические заряды, которые образуются только в результате смещения зарядов внутри каждой молекулы. Любые другие заряды будем называть свободными.

Все заряды либо связанные, либо свободные.

Введем обозначения:

$\rho$  — плотность свободных зарядов,  
 $\rho'$  — плотность связанных зарядов,  
 $\rho + \rho'$  — плотность всех зарядов.

-----  
 $\vec{P} \equiv \frac{d\vec{p}}{dV}$  — поляризация среды, объемная плотность дипольного момента

или дипольный момент единицы объема.

Если  $n$  — концентрация молекул или число молекул в единице объема, то, разделив дипольный момент единицы объема  $\vec{P}$  на число молекул в единице объема  $n$ , получим средний дипольный момент молекулы  $\frac{\vec{P}}{n} = \langle \vec{p} \rangle$ .

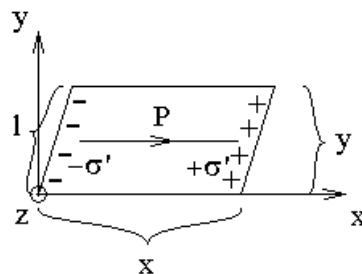
Тогда

$\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle$ , где  $\vec{P}$  — поляризация среды,  $n$  — концентрация молекул,  $\langle \vec{p} \rangle$  — средний дипольный момент молекулы.

-----  
 Найдем связь между величиной поляризации и плотностью связанных зарядов.

При поляризации среды положительные связанные заряды смещаются вдоль вектора поляризации, а отрицательные — навстречу вектору поляризации.

Рассмотрим наклонный параллелепипед, который поляризован вдоль одного из ребер:



Рассмотрим два выражения для дипольного момента всего куска диэлектрика и приравняем их друг к другу:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = P \cdot V = P \cdot xyz \\ p = Q' \cdot x = \sigma' \cdot S \cdot x = \sigma' \cdot lz \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$yP = \sigma' l \quad \Rightarrow$$

$$\sigma' = \frac{y}{l} P = P \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, d\vec{S}}) = P_n.$$

На границе диэлектрик-вакуум образуются связанные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma' = P_n$ . Аналогично на границе двух диэлектриков:

$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$  — скачок нормальной составляющей поляризации на границе двух диэлектрических сред определяется поверхностной плотностью

связанных зарядов  $\sigma'$ , здесь нормаль направлена из среды 1 в среду 2:  $\vec{n} \equiv \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ .

-----

Заметим, что поляризация среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд  $\sigma' = P_n$ . Чтобы понять это представим себе, что рассматриваемый параллелепипед разрезан надвое произвольной плоскостью. Раздвинем две части параллелепипеда вправо и влево. На двух новых границах появятся связанные заряды противоположного знака с поверхностной плотностью  $\sigma' = P_n$ . Рассмотрим плоскость ровно посередине между двумя новыми границами диэлектрика. Соединим две части параллелепипеда обратно. Заряды на двух новых границах скомпенсируют друг друга и пропадут. Это означает, что через единицу площади рассматриваемой нами плоскости по границе между двумя частями параллелепипеда переместились заряды  $\sigma' = P_n$ , чтобы скомпенсировать заряды противоположного знака. Следовательно, в процессе поляризации диэлектрика через эту плоскость параллельную пропавшей границе прошли заряды с поверхностной плотностью  $\sigma' = P_n$ . Напомним, что направление плоскости выбрано произвольно. Следовательно, процесс поляризации среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд  $\sigma' = P_n$ .

Рассмотрим диэлектрик, который по-разному поляризован в разных точках.

Мысленно выделим внутри этого диэлектрика некоторый объем  $V$ .

Рассмотрим единичную площадку на поверхности  $S$  этого объема.

Через эту единичную площадку при поляризации диэлектрика перемещается заряд  $\sigma' = P_n$ , так как поляризация среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд  $\sigma' = P_n$ .

Рассмотрим, какой заряд  $Q'$  смещается через замкнутую поверхность  $S$ , которая является границей объема  $V$ .

$$Q' = \oint_S dQ' = \oint_S \sigma' dS = \oint_S P_n dS = \oint_S (\vec{P}, d\vec{S})$$

Смещается заряд, равный потоку вектора поляризации через замкнутую поверхность.

Заряд, который остается внутри замкнутой поверхности  $S$  отличается знаком:

$$\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -Q' \quad \text{— связь потока поляризации через границу объема и}$$

связанного заряда  $Q'$  внутри объема. В системе СГС Гаусса связь такая же.

Разделим это равенство на объем  $V$  и устремим объем к нулю:

$$\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -Q' \quad \left| \frac{1}{V}; \quad |V \rightarrow 0 \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{div}(\vec{P}) = -\rho'$$



Для внутриатомного поля  $\vec{E}$  рассмотрим три формы соотношения поля  $\vec{E}$  и всех зарядов в диэлектрике:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0} \\ \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q + Q'}{\varepsilon_0}, \\ E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma + \sigma'}{\varepsilon_0} \end{array} \right.$$

где на микроскопическом внутриатомном уровне свободные и связанные заряды неразличимы и равноправны.

Под напряженностью электрического поля  $\vec{E}$  в диэлектрике будем понимать усредненное внутриатомное микроскопическое поле  $\vec{E}$  по макроскопическому, но малому, объему, хотя и содержащему много атомов. Следовательно, для напряженности поля  $\vec{E}$  в диэлектрике будут выполняться те же соотношения, что и для микроскопического внутриатомного поля  $\vec{E}$ .

Дополним эти уравнения следующими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{P}) = -\rho' \\ \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -Q' \\ P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot}(\vec{E}) = 0 \\ \oint_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{array} \right.$$

Здесь, как и раньше, единичный вектор нормали к границе направлен из объема 1 в объем 2:  $\vec{n} \equiv \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ .