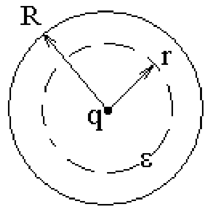
Простейшие задачи с диэлектриками 1. Сферическая симметрия.

Рассмотрим задачу. Дан диэлектрический шар с проницаемостью ε и радиусом R. В центре шара находится точечный заряд q.

Найти: $\vec{D}, \vec{E}, \varphi, \vec{P}, \sigma'$.

Решение.

В соответствии с симметрией задачи рассмотрим пунктирную сферу с произвольным радиусом r, центр которой совпадает с центром диэлектрического шара. Применим электростатическую теорему Гаусса $\Phi_D = Q$ для поверхности выбранной сферы.



Из симметрии задачи следует, что вектор электрической индукции $\vec{D}$ направлен по радиусу в любой точке пространства, и во всех точках пунктирной сферы вектор $\vec{D}$ имеет одинаковую длину. Тогда

$\Phi_D = Q$ => $DS = q$ => $D \cdot 4\pi r^2 = q$ =>

$D = \dfrac{q}{4\pi r^2}$ (в системе СГС Гаусса: $D = \dfrac{q}{r^2}$).

Этот вывод справедлив и в том случае, если $r \le R$, и в том случае, если $r \ge R$.

Найдем теперь вектор $\vec{E}$ из равенства $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$.

$E = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{\varepsilon r^2}$ - внутри диэлектрического шара при $r < R$,

$E = \dfrac{D}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2}$ - снаружи диэлектрического шара при $r > R$,

(в системе СГС Гаусса без сомножителя $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$).

Найдем теперь потенциал φ сначала снаружи шара при $r \ge R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^{\infty} E\, dr = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad =>$$

$\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r}$ при $r \ge R$.

Теперь найдем потенциал внутри диэлектрического шара.

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int\limits_{r}^{\infty} E\,dr = \int\limits_{r}^{R} E\,dr + \int\limits_{R}^{\infty} E\,dr = \int\limits_{r}^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2} dr + \varphi(R) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \int\limits_{r}^{R} \frac{dr}{r^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{q}{R} \right\}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{q}{R} \right\} \text{ при } r \le R$$

(в системе СГС Гаусса без сомножителя $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$).

Найдем теперь поляризацию среды $\vec{P}$.

$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}$ =>

$P = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2}$ при $r < R$ и $P = 0$ при $r > R$

(в СГС Гаусса — также).

И, наконец, найдем поверхностную плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрического шара.

$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$

Пусть объем 1 — диэлектрик, а объем 2 — вакуум, тогда

$\sigma' = -(P_{2n} - P_{1n}) = P_{1n} = P(R) = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{R^2}$

(в СГС Гаусса — также).

Повторим ответы:

$D = \frac{q}{4\pi r^2}$ внутри и снаружи шара, (в СГСГ $\cdot 4\pi$)

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2}$ при $r < R$, $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$ при $r > R$, (в СГСГ $\cdot 4\pi\varepsilon_0$)

$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{q}{R} \right\}$ при $r \le R$, $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$ при $r \ge R$,

(в СГСГ $\cdot 4\pi\varepsilon_0$)

$P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2}$ при $r < R$, $P = 0$ при $r > R$, (в СГСГ — также)

$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{R^2}$. (в СГСГ — также)

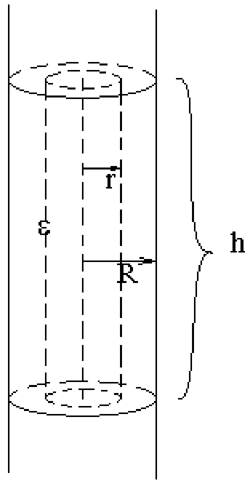
Простейшие задачи с диэлектриками 2. Цилиндрическая симметрия.

Рассмотрим задачу. Дан бесконечный диэлектрический цилиндр с диэлектрической проницаемостью ε, радиусом R. На оси цилиндра расположена заряженная нить с линейной плотностью заряда τ.

Найти: E, D.

Решение.

Рассмотрим поток вектора $\vec{D}$ через поверхность цилиндра длиной h радиусом r. Ось цилиндра совпадает с осью симметрии задачи.



По теореме Гаусса:

$\Phi_D = Q$.

Из симметрии задачи поток через донышки цилиндра отсутствует. Остается поток через боковую поверхность цилиндра:

$$DS = \tau h \quad => \quad D \cdot 2\pi rh = \tau h \quad => \quad D = \frac{\tau}{2\pi r} \quad (\text{в СГСГ} \quad \cdot 4\pi)$$

Это выражение справедливо и внутри $r < R$ и снаружи $r > R$ диэлектрического цилиндра. Вектор $\vec{D}$ направлен в плоскости перпендикулярной оси цилиндра и в этой плоскости направлен по радиусу окружности сечения цилиндра.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad => \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad =>$$

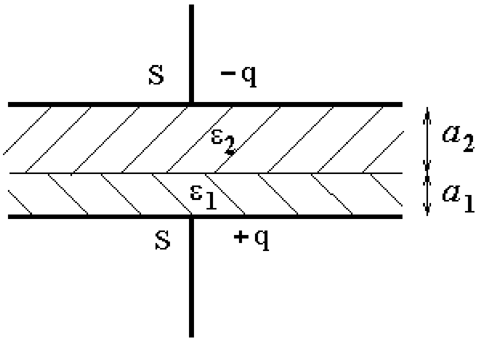
$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon r} \text{ при } r < R, \qquad E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ при } r > R. \quad (\text{в СГСГ} \quad \cdot 4\pi\varepsilon_0)$$

<u>Простейшие задачи с диэлектриками 3. Плоская симметрия.</u>

Рассмотрим задачу. Плоский конденсатор заполнен двумя тонкими слоями диэлектрика. Один слой имеет проницаемость ε_1 и толщину a_1, другой — ε_2, a_2. Площадь пластин S.

Найти емкость конденсатора: C=?

Решение.



Поместим на одну пластину заряд q, на другую поместим заряд $-q$.

Заметим, что внутри пластины проводника поле $\vec{D}=0$, так как по определению электрической индукции $\vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$, а в проводнике $\vec{E}=0$ и $\vec{P}=0$. $\vec{P}=0$, так как в проводнике нет связанных зарядов.

Из симметрии задачи вектор $\vec{D}$ направлен перпендикулярно пластинам. Над пластинами у вектора $\vec{D}$ есть только нормальная составляющая. Граничное условие для нормальной составляющей вектора $\vec{D}$ имеет вид:

$D_{2n}-D_{1n}=\sigma$,

где $D_{1n}=0$, если объем 1 — проводник; σ — поверхностная плотность свободных зарядов на поверхности проводника. Тогда

$D_{2n}=D=\sigma=\dfrac{q}{S}$ => $D=\dfrac{q}{S}$ — значение вектора электрической индукции одинаковое в обоих слоях диэлектрика.

С учетом $E=\dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon}$ получаем:

$$E_1=\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_1 S} \quad \text{и} \quad E_2=\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}$$

При вычислении напряжения между пластинами конденсатора проинтегрируем напряженность вдоль линии перпендикулярной пластинам и получим:

$$U=\int_1^2 E_l dl=\int_1^2 E\,dl=E_1a_1+E_2a_2=\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}a_1+\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}a_2=\frac{q}{\varepsilon_0 S}\cdot\left(\frac{a_1}{\varepsilon_1}+\frac{a_2}{\varepsilon_2}\right) \quad =>$$

$$C\equiv\frac{q}{U}=\frac{q}{\dfrac{q}{\varepsilon_0 S}\cdot\left(\dfrac{a_1}{\varepsilon_1}+\dfrac{a_2}{\varepsilon_2}\right)}=\frac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{a_1}{\varepsilon_1}+\dfrac{a_2}{\varepsilon_2}}$$

Ответ: $C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{a_1}{\varepsilon_1}+\dfrac{a_2}{\varepsilon_2}}$.

В системе СГС Гаусса емкость нужно разделить на $4\pi\varepsilon_0$, тогда получим: $C = \dfrac{S}{4\pi\left(\dfrac{a_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{a_2}{\varepsilon_2}\right)}$.

Единственность решения краевой задачи электростатики в присутствии диэлектриков.

$$div\left(\vec{D}\right) = \rho \Rightarrow \quad div\left(\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}\right) = \rho .$$

Подставим сюда $\vec{E} = -grad(\varphi)$ и получим

$$div\left(\varepsilon \cdot grad(\varphi)\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{или} \qquad \left(\vec{\nabla}, \varepsilon \vec{\nabla}\varphi\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Здесь ρ — плотность свободных зарядов. Это и есть дифференциальное уравнение для потенциала в присутствии диэлектриков. Обычно диэлектрическая проницаемость не зависит от пространственных координат $\varepsilon = const$, тогда дифференциальное уравнение для потенциала упрощается: $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}$.

Краевая задача. Рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет единственное решение в некотором объеме V, если на границе объема задано одно из 4-х условий: условие Дирихле, условие Неймана, условие с границами в виде проводников, условие общего вида. Это те же граничные условия, что и без диэлектриков.

Единственность решения краевой задачи в случае изотропных диэлектриков, когда ε — число, а не матрица, доказывается аналогично случаю без диэлектриков. Только вместо двух равенств

$$\int_V \left|\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right|^2 dV = \oint_S \left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), d\vec{S}\right) = 0$$

нужно доказывать два равенства

$$\int_V \varepsilon\left|\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right|^2 dV = \oint_S \left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \varepsilon \vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), d\vec{S}\right) = 0$$

Придумывание решений в задачах с проводниками и диэлектриками.

Единственность решения краевой задачи электростатики в задачах с проводниками без диэлектриков позволяет придумывать решения, например, методом изображений.

Аналогично можно придумывать решения в задачах с проводниками и диэлектриками. Обсудим, что нужно проверять для придуманного решения, чтобы оно оказалось решением задачи.

Нужно проверять, что в каждой точке объема придуманное решение для потенциала удовлетворяет уравнению $div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ и что придуманное решение удовлетворяет граничным условиям.

Введем в рассмотрение векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ и $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$. Тогда уравнение $div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ будет эквивалентно двум уравнениям для векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$:

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = \rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \end{cases}.$$

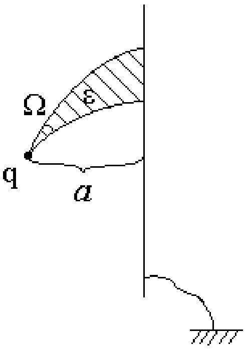
Кроме того, уравнения $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = \rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \end{cases}$ на каждой границе между диэлектриками внутри интересующего нас объема принимают следующий вид:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}.$$

В результате, чтобы решить задачу для потенциала $\varphi\left(\vec{r}\right)$ достаточно придумать решение, которое удовлетворяет в рассматриваемом объеме V уравнению $div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ или паре уравнений $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = \rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \end{cases}$, а на границах диэлектриков внутри объема V вместо уравнения для потенциала придуманное решение должно удовлетворять условиям $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$. Кроме того, придуманное решение должно удовлетворять граничным условиям одной из краевых задач на границах рассматриваемого объема.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Пусть есть заземленная проводящая плоскость и точечный заряд q на расстоянии a над плоскостью. В этой задаче без диэлектриков рассмотрим трубку линий поля $\vec{E}$. Линии начинаются на точечном заряде и заканчиваются на проводящей плоскости. Пусть некоторая трубка линий поля $\vec{E}$ выходит из точечного заряда q в телесный угол заданной величины Ω. Заполним эту трубку линий поля $\vec{E}$ диэлектриком с заданной проницаемостью ε. Пусть в этой задаче с диэлектриком требуется найти поле $\vec{E}$ в каждой точке полупространства слева от проводящей плоскости.



Решение.

Придумаем решение для электрического поля в левом полупространстве и проверим, что придуманное решение удовлетворяет всем требованиям.

Придумаем, что потенциал φ_ε в задаче с диэлектриком в каждой точке слева от заземленной плоскости пропорционален потенциалу φ_1 в задаче без диэлектрика когда $\varepsilon = 1$.

$\varphi_\varepsilon = \beta\varphi_1$, соответственно, $\vec{E}_\varepsilon = \beta\vec{E}_1$

здесь константу β еще требуется определить.

Поле φ_1 и $\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\varphi_1$ — это решение задачи о поле заряда над заземленной проводящей плоскостью без диэлектрика. Это поле двух точечных зарядов — реального заряда q и заряда-изображения $-q$, симметрично расположенных относительно плоскости.

Проверим граничные условия для потенциала φ_ε придуманного поля. Требуется, чтобы потенциал на плоскости проводника был бы равен нулю.

Поле φ_1 имеет нулевой потенциал на проводящей плоскости, тогда и пропорциональное ему придуманное поле $\varphi_\varepsilon = \beta\varphi_1$ тоже имеет нулевой потенциал на плоскости.

Внутри однородного материала левого полупространства выполняется дифференциальное уравнение для потенциала

$$div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi_\varepsilon\right)\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

так как правая часть равенства равна нулю в левом полупространстве везде, кроме точечного заряда, а для пропорционального потенциала $\varphi_1 \sim \varphi_\varepsilon$ везде кроме точечного заряда выполняется уравнение

$$div\left(grad\left(\varphi_1\right)\right) = \Delta\varphi_1 = 0.$$

$div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi_\varepsilon\right)\right)$ просто в $\varepsilon\beta$ раз больше, чем $div\left(grad\left(\varphi_1\right)\right)$.

Дифференциальное уравнение $div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi_\varepsilon\right)\right) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ для придуманного потенциала φ_ε выполняется во всех точках полупространства за исключением, быть может, только точек границы диэлектрика и вакуума и точки расположения заряда q. В точках границы диэлектрика и вакуума нужно проверить условия $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$.

Граница диэлектрик-вакуум расположена по касательной к линиям поля $\vec{E}_1$ по условию задачи. Значит поле $\vec{E}_\varepsilon$, как и пропорциональное ему поле $\vec{E}_1$, не имеет нормальной составляющей к границе диэлектрик-вакуум. Тогда нормальной составляющей не имеет и придуманное поле $\vec{D}_\varepsilon$:

$D_{2n} = D_{1n} = 0$

С другой стороны на границе диэлектрик-вакуум нет свободных зарядов $\sigma = 0$. Тогда на этой границе выполнено равенство $D_{2n} - D_{1n} = 0$ — первое равенство системы $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$. Второе равенство этой системы выполнено, так как придуманное поле $\vec{E}_\varepsilon = \beta \vec{E}_1$ имеет одинаковый коэффициент β в диэлектрике и в вакууме и аналогично полю $\vec{E}_1$ не имеет скачка на границе диэлектрик-вакуум.

Точечный заряд q — особая точка для потенциала φ и напряженности $\vec{E}_\varepsilon$. Поэтому требуется проверка соответствия придуманного поля граничным условиям $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$ в точке расположения точечного заряда q.

Проверке требует только первое условие, которое превращается в интегральную теорему Гаусса $\Phi_D = Q$ для малой сферы вокруг точечного заряда q. Второе условие следует, например из того, что придуманное поле $\vec{E}_\varepsilon$ — не вихревое поле, а потенциальное, так как для него придуман потенциал φ.

В малой окрестности заряда q можно пренебречь полем всех других зарядов, кроме зарядов, находящихся в одной точке с зарядом q. Тогда в малой окрестности этой точки:

$$\vec{E}_1 \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad => \qquad \vec{E}_\varepsilon = \beta \vec{E}_1 \approx \beta \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Рассмотрим поток вектора $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ через малую сферу вокруг точечного заряда q:

$$\Phi_D = Q \qquad =>$$

$$\varepsilon_0 E_\varepsilon \cdot (4\pi - \Omega) \cdot r^2 + \varepsilon_0 \varepsilon E_\varepsilon \cdot \Omega \cdot r^2 = q.$$

Здесь $(4\pi - \Omega) \cdot r^2$ — площадь участка сферы, который находится в вакууме, $\Omega \cdot r^2$ — площадь участка сферы, который находится в диэлектрике. Следовательно

$$E_\varepsilon = \frac{1}{4\pi - \Omega + \varepsilon\Omega} \cdot \frac{q}{\varepsilon_0 r^2}, \qquad \text{но} \qquad \vec{E}_\varepsilon = \beta \vec{E}_1 = \beta \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3},$$

тогда $\beta = \dfrac{4\pi}{4\pi - \Omega + \varepsilon\Omega}$ в выражении $\vec{E}_\varepsilon = \beta \vec{E}_1$.

Окончательно получаем, что решением задачи с диэлектриком является поле:

$$\varphi_\varepsilon = \frac{4\pi}{4\pi - \Omega + \varepsilon\Omega} \cdot \varphi_1 \quad \text{и} \quad \vec{E}_\varepsilon = \frac{4\pi}{4\pi - \Omega + \varepsilon\Omega} \cdot \vec{E}_1,$$

где φ_1 и $\vec{E}_1$ — это решение задачи о поле заряда над заземленной проводящей плоскостью без диэлектриков, это поле двух точечных зарядов: реального заряда q и заряда-изображения $-q$ симметрично расположенных относительно плоскости.

<u>Энергия взаимодействия зарядов в присутствии линейных диэлектриков.</u>

Рассмотрим линейный диэлектрик, диэлектрик для которого связь векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$ линейная:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}\ .$$

Здесь для анизотропной среды ε может быть симметричным тензором второго ранга.

Энергия взаимодействия зарядов — это способность электрических сил совершить работу. Работа внешних сил отличается знаком от работы электрических сил, если все перемещения медленные. Следовательно, потенциальная энергия электростатических сил равна работе внешних сил по сборке системы из зарядов и диэлектриков.

Работа внешних сил не зависит от того, каким образом собирать систему, иначе был бы возможен цикл с отличной от нуля работой — вечный двигатель.

Предложим алгоритм сборки, при котором затраченную работу удается вычислить.

Покажем, что эта работа равна

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i\ ,$$

где суммирование идет только по свободным зарядам.

Рассмотрим алгоритм сборки и некоторые сопутствующие соображения.

1). Принесем из бесконечности и поставим на свои места все диэлектрики без свободных зарядов.

Электрических сил на этом этапе нет. Следовательно, эта работа равна нулю.

2). Принесем на место каждого заряда q_i заряд $\dfrac{q_i}{N}$, где N — большое натуральное число.

Благодаря линейности диэлектрика все потенциалы примут значение $\dfrac{\varphi_i}{N}$, где φ_i — потенциалы в конце сборки.

3). Для линейности φ_i от q_i требуется, чтобы в процессе сборки диэлектрическая проницаемость оставалась неизменной $\varepsilon = const$. Это возможно только при постоянной температуре диэлектриков $T = const$.

Способность совершить работу при постоянной температуре — это свободная энергия системы. В таком случае, энергия системы, которую мы можем найти, — это именно свободная энергия.

4). Теперь принесем по второй порции зарядов $\frac{q_i}{N}$, затем по третьей порции, ..., по k-ой порции и т. д.

5). Введем обозначение $x \equiv \frac{k}{N}$, где $x \in [0,1]$ и $dx = \frac{1}{N}$.

Тогда текущие потенциалы в процессе сборки $\varphi = k\frac{\varphi_i}{N} = x\varphi_i$.

Очередная порция зарядов $\frac{q_i}{N} = q_i dx$.

6). Энергия заряда q_0 равна $q_0\varphi_0$ — равна работе по его доставке из бесконечности в точку с потенциалом φ_0, работе при неподвижных остальных зарядах.

Тогда работа сборки очередной порции зарядов — это сумма по всем зарядам величин вида $q_0\varphi_0$, где $q_0 \to (q_i dx)$, $\varphi_0 \to (x\varphi_i)$:

$$\sum_i (x\varphi_i)(q_i dx)$$

7). Работа сборки всей системы получается путем суммирования по x:

$$W = \int_0^1 \sum_i (x\varphi_i)(q_i dx) = \sum_i q_i\varphi_i \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$$

8). Этот же результат можно объяснить очень коротко.

Потенциалы во время сборки растут линейно от 0 до φ_i и в среднем равны $\frac{\varphi_i}{2}$. Поэтому часть всей работы, связанная с доставкой заряда q_i, равна $q_i\frac{\varphi_i}{2}$. Тогда

$$W = \sum_i q_i\frac{\varphi_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i .$$

9). Обсудим теперь, почему $W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ — сумма только по свободным зарядам, а не по свободным и связанным зарядам?

Чисто электрическая энергия — сумма по всем зарядам, но когда в молекуле сдвигаются заряды, в ней запасается и другая энергия — упругая энергия сил, которые пытаются вернуть заряды на свои места.

С учетом этой упругой энергии полная энергия оказывается равной сумме только по свободным зарядам.

Емкостные коэффициенты образуют симметричную матрицу $C_{ik}=C_{ki}$.

Рассмотрим произвольные линейные диэлектрики и N проводников с зарядами q_i и потенциалами φ_i.

$W=\frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ — энергия взаимодействия заряженных проводников, где

$q_i=\sum_k C_{ik}\varphi_k$ — связь зарядов на проводниках с потенциалами проводников, где C_{ik} — емкостные коэффициенты. Тогда

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i,k}C_{ik}\varphi_k\varphi_i .$$

Если из бесконечности принести на проводники заряды δq_i, то изменение энергии можно найти двумя способами. Сравнивая два выражения, получим $C_{ik}=C_{ki}$.

Рассмотрим подробнее два выражения для энергии.

С одной стороны:

$$\delta W=\sum_i\left(\delta q_i\right)\cdot\varphi_i .$$

Подставим сюда $\delta q_i=\sum_k C_{ik}\delta\varphi_k$ и получим

$$\delta W=\sum_i\left(\delta q_i\right)\cdot\varphi_i=\sum_i\left(\sum_k C_{ik}\delta\varphi_k\right)\cdot\varphi_i=\sum_{i,k}C_{ik}\cdot\delta\varphi_k\cdot\varphi_i \qquad (1).$$

С другой стороны:

$$\delta W=\delta\left(\frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i\right)=\frac{1}{2}\delta\left(\sum_i\left(\sum_k C_{ik}\varphi_k\right)\cdot\varphi_i\right)=\frac{1}{2}\delta\left(\sum_{i,k}C_{ik}\varphi_k\varphi_i\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,k}C_{ik}\delta\left(\varphi_k\varphi_i\right).$$

Разложим правую часть, как дифференциал от произведения $\varphi_k\varphi_i$ и получим:

$$\delta W=\frac{1}{2}\sum_{i,k}C_{ik}\cdot\delta\varphi_k\cdot\varphi_i+\frac{1}{2}\sum_{i,k}C_{ik}\cdot\varphi_k\cdot\delta\varphi_i \qquad (2).$$

Приравняем два выражения 1 и 2 для δW и получим:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}C_{ik}\cdot\delta\varphi_k\cdot\varphi_i=\frac{1}{2}\sum_{i,k}C_{ik}\cdot\varphi_k\cdot\delta\varphi_i .$$

Поменяем в правой части равенства индексы i и k и получим:

$$\sum_{i,k}C_{ik}\cdot\delta\varphi_k\cdot\varphi_i=\sum_{i,k}C_{ki}\cdot\delta\varphi_k\cdot\varphi_i .$$

Пусть отличны от нуля только одно $\delta\varphi_k$ и одно φ_i, тогда от суммы $\sum_{i,k}$ останется только одно слагаемое. Равенство для этого слагаемого примет вид:

$$C_{ik} = C_{ki},$$

что и требовалось доказать.