

### Трансформатор (продолжение).

Из средней четверки уравнений  $\begin{cases} U_1 + \mathcal{E}_{\text{инд}}_1 = 0 \\ U_2 + \mathcal{E}_{\text{инд}}_2 = 0 \\ \Phi = BS \\ B = \mu_0 \mu H \end{cases}$  получим

$$\begin{cases} U_1 = -\mathcal{E}_{\text{инд}}_1 = \frac{d(N_1 \Phi)}{dt} = N_1 \frac{d(BS)}{dt} = N_1 S \frac{d(\mu_0 \mu H)}{dt} = \mu_0 \mu S N_1 \dot{H} \\ U_2 = -\mathcal{E}_{\text{инд}}_2 = \frac{d(N_2 \Phi)}{dt} = N_2 \frac{d(BS)}{dt} = N_2 S \frac{d(\mu_0 \mu H)}{dt} = \mu_0 \mu S N_2 \dot{H} \\ U_1 = \mu_0 \mu S N_1 \dot{H} \\ U_2 = \mu_0 \mu S N_2 \dot{H} \end{cases} \Rightarrow$$

Подставим это вместо первой пары уравнений системы (1). Тогда получим систему из четырех уравнений

$$\begin{cases} U_1 = \mu_0 \mu S N_1 \dot{H} \\ U_2 = \mu_0 \mu S N_2 \dot{H} \\ Hl = N_1 I_1 - N_2 I_2 \\ U_2 = RI_2 \end{cases} \quad (2)$$

Разделим второе уравнение системы (2) на первое и получим

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \Leftrightarrow \quad U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1 \quad \Leftrightarrow \quad U_2 = n U_1, \quad \text{где}$$

$n = \frac{N_2}{N_1}$  — коэффициент трансформации.

Окончательно  $U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1$ .

На каждый виток любой обмотки приходится одно и то же напряжение, поэтому напряжение в каждой обмотке пропорционально числу витков  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$ . Это справедливо при любой зависимости  $U_1(t)$ . Однако на опыте, если  $U_1 = \text{const}$ , то  $U_2 = 0$ . Причина в том, что мы не учли активное сопротивление первичной обмотки. В стационарном случае, каким бы малым ни было сопротивление первичной обмотки, постоянное напряжение выделяется именно на нем, а не на индуктивности, поэтому постоянное напряжение не трансформируется во вторичную обмотку.

В четвертое уравнение  $U_2 = RI_2$  системы (2) подставим  $U_2 = \frac{N_2}{N_1}U_1$  и получим

$$I_2 = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{U_1}{R}.$$

Из первого уравнения  $U_1 = \mu_0\mu S N_1 \dot{H}$  системы (2) выразим напряженность магнитного поля в сердечнике и получим

$$H = \frac{1}{\mu_0\mu S N_1} \int_0^t U_1(t') dt'.$$

Последнюю неизвестную величину  $I_1$  системы (2) выразим из третьего уравнения  $Hl = N_1 I_1 - N_2 I_2$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{N_2}{N_1} I_2 + \frac{Hl}{N_1} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{U_1}{R} + \frac{l}{\mu_0\mu S N_1^2} \int_0^t U_1(t') dt' \\ I_1 &= \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{U_1}{R} + \frac{l}{\mu_0\mu S N_1^2} \int_0^t U_1(t') dt' \end{aligned} \Rightarrow$$

#### Факультативная вставка.

Из третьего уравнения  $U_1 + \mathcal{E}_{u\text{нд}_1} = 0$  системы (1) можно получить  $\mathcal{E}_{u\text{нд}_1} = -U_1$ .

Из четвертого уравнения  $U_2 + \mathcal{E}_{u\text{нд}_2} = 0$  системы (1) можно получить

$$\mathcal{E}_{u\text{нд}_2} = -U_2 = -\frac{N_2}{N_1}U_1 \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_{u\text{нд}_2} = -\frac{N_2}{N_1}U_1$$

Из шестого уравнения  $B = \mu_0\mu H$  системы (1) можно получить

$$B = \mu_0\mu H = \frac{1}{N_1 S} \int_0^t U_1(t') dt' \Rightarrow$$

$$B = \frac{1}{N_1 S} \int_0^t U_1(t') dt'$$

Из пятого уравнения  $\Phi = BS$  системы (1) можно получить

$$\Phi = BS = \frac{1}{N_1 S} \int_0^t U_1(t') dt' \Rightarrow$$

$$\Phi = \frac{1}{N_1 S} \int_0^t U_1(t') dt'$$

Конец факультативной вставки.

Проанализируем выражение для  $I_1$

$$I_1 = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{U_1}{R} + \frac{l}{\mu_0 \mu S N_1^2} \int_0^t U_1(t') dt'$$

при  $R \rightarrow \infty$ . Условие  $R \rightarrow \infty$  — это условие отсутствия нагрузки (разрыв) во вторичной обмотке трансформатора. При этом вторичную обмотку можно не учитывать, и первичную обмотку можно рассматривать, как единственную. Тогда

$$I_1 = \frac{l}{\mu_0 \mu S N_1^2} \int_0^t U_1(t') dt' \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{\mu_0 \mu S N_1^2}{l} I_1 = L_{11} \dot{I}_1, \text{ где}$$

$L_{11} = \frac{\mu_0 \mu S N_1^2}{l}$  — индуктивность первичной обмотки. Тогда

$$I_1 = \frac{U_1}{\left( \frac{R}{n^2} \right)} + \frac{1}{L_{11}} \int_0^t U_1(t') dt', \text{ где } n = \frac{N_2}{N_1} \text{ — коэффициент трансформации.}$$

При условии отсутствия нагрузки во вторичной обмотке трансформатора  $R \rightarrow \infty$  ток первичной обмотки называется холостым током трансформатора. Для уменьшения холостого тока нужно стремиться увеличить индуктивность первичной обмотки  $L_{11} \rightarrow \infty$ .

Если индуктивность первичной обмотки велика, то  $I_1 = \frac{U_1}{\left( \frac{R}{n^2} \right)}$ . Тогда

можно сказать, что величина  $\frac{R}{n^2}$  — это сопротивление  $R$  во вторичной обмотке, пересчитанное в первичную обмотку.

$$\text{При } L_{11} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad I_1 \approx \frac{U_1}{\left( \frac{R}{n^2} \right)} = n \frac{U_1}{R} = n \frac{U_2}{R} = n I_2 \quad \Rightarrow$$

$I_1 \approx n I_2$  — трансформатор тока. Тогда  $I_2 \approx \frac{I_1}{n}$ , а  $U_2 = n U_1$ , и  $U_1 I_1 \approx U_2 I_2$ .

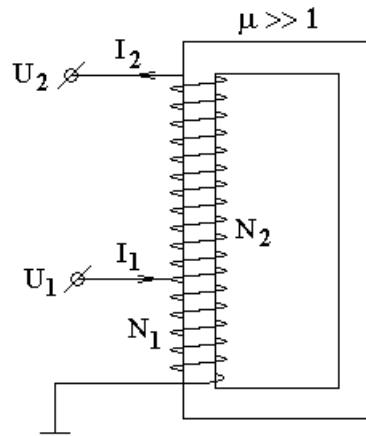
Основные формулы для трансформатора:

$$\begin{cases} \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \\ U_1 I_1 \approx U_2 I_2 \end{cases}, \text{ где второе уравнение означает, что вся мощность,}$$

подводимая к первичной обмотке, передается во вторичную обмотку.

Автотрансформатор.

Автотрансформатор имеет одну обмотку вместо двух обмоток трансформатора. Одна обмотка автотрансформатора имеет три отвода. Один из трех проводов — общий провод.



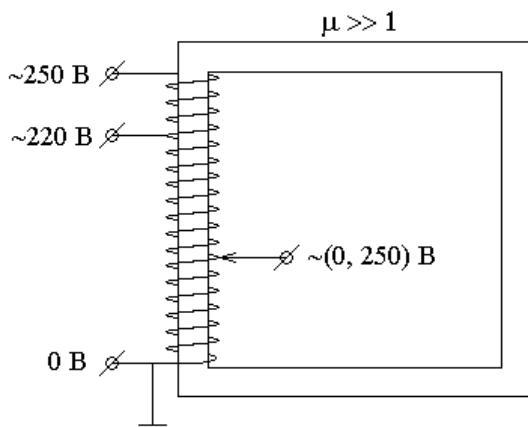
На приведенном рисунке первичная обмотка трансформатора представляет собой часть вторичной обмотки, а вторичная обмотка — это вся обмотка трансформатора. Автотрансформатор можно включить и наоборот.

Основные формулы автотрансформатора такие же, как и для обычного

$$\text{трансформатора} \begin{cases} \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \\ U_1 I_1 \approx U_2 I_2 \end{cases} .$$

Заметим, что в общей части обмотки токи первичной и вторичной обмоток вычитаются друг из друга. Это важно для расчета максимально допустимых токов обмоток трансформатора.

### Лабораторный автотрансформатор (ЛАТР).



От сети переменного тока 220 Вольт на лабораторный автотрансформатор подается напряжение между клеммами обозначенными на рисунке, как "0 В" и "~220 В". Между клеммами "0 В" и "~250 В" можно снять напряжение 250 Вольт. Кроме трех рассмотренных отводов "0 В", "~220 В" и "~250 В" единственная (торOIDальная) обмотка лабораторного автотрансформатора имеет отвод в виде скользящего контакта. При перемещении контакта между

ним и клеммой "0 В" образуется напряжение, которое можно изменять в пределах от нуля до 250 Вольт.

## Преобразование электрического и магнитного полей при переходе в движущуюся систему отсчета.

(нерелятивистский случай)

Нестрогий вывод.

Рассмотрим проводник, который движется в магнитном поле  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{V}$  относительно системы отсчета  $K$ .

Свободные заряды внутри проводника движутся вместе с проводником, и на них действует сила Лоренца  $\vec{F}_L = q[\vec{V}, \vec{B}]$ . Сила Лоренца сдвигает свободные заряды и приводит к появлению поверхностных зарядов  $\sigma$  на проводнике.

$$\begin{array}{c} + + + + + + + \\ \text{---} \quad \rightarrow V \\ \text{---} - - - - - \end{array} \otimes \begin{array}{c} \uparrow \vec{F}_L = q [\vec{V}, \vec{B}] \\ B \qquad \text{при } q > 0 \end{array}$$

Поверхностные заряды создают электрическое поле  $\vec{E}_\sigma$  внутри проводника.

Сила Лоренца и сила Кулона со стороны поля  $\vec{E}_\sigma$  уравновешивают друг друга для оставшихся свободных зарядов внутри проводника.

$$\text{Тогда } q\vec{E}_\sigma + q[\vec{V}, \vec{B}] = 0 \quad \Rightarrow$$

$\vec{E}_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}]$  — поле поверхностных зарядов  $\sigma$ . Здесь значок  $\sigma$  поясняет причину возникновения электрического поля.

Рассмотрим теперь это же явление в системе отсчета  $K'$ , которая движется вместе с проводником.

В системе  $K'$  заряды покоятся, следовательно, сила Лоренца равна нулю. Равнодействующая всех сил равна нулю, так как заряды покоятся. Следовательно, внутри проводника сила Кулона со стороны электрического поля  $\vec{E}'$  в  $K'$  равна нулю, и внутри проводника  $\vec{E}' = 0$ .

В системе отсчета  $K$  есть поверхностные заряды. Их плотность при переходе в систему  $K'$  почти не изменяется, так как заряды не изменяются, а размеры проводника изменяются мало. Эти поверхностные заряды создают электрическое поле  $\vec{E}'_\sigma$  в  $K'$ .

Чтобы суммарное поле внутри проводника было равно нулю  $\vec{E}' = 0$  кроме поля  $\vec{E}'_\sigma$  в  $K'$  должно существовать еще одно электрическое поле — поле  $\vec{E}'_B$ , причина которого в том, что в системе  $K$  есть магнитное поле  $\vec{B}$ . Внутри проводника:

$$\vec{E}' = \vec{E}'_\sigma + \vec{E}'_B = 0. \quad \Rightarrow$$

$$\vec{E}'_B = -\vec{E}'_\sigma \approx -\vec{E}_\sigma = [\vec{V}, \vec{B}]$$

В общем случае, если есть какие-то заряды в системе  $K$ , то эти заряды есть и в системе  $K'$ , их поле  $\vec{E}$  в обеих системах примерно одинаково. Тогда с учетом добавки  $\vec{E}_B$  поле в  $K'$ :

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}].$$


---

Найдем теперь изменение магнитного поля  $\vec{B}$  при переходе в движущуюся систему отсчета.

Рассмотрим поле точечного заряда  $q$ , покоящегося в системе отсчета  $K$ :

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}, \\ \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Пусть система отсчета  $K'$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $\vec{V}$ .

Тогда в системе  $K'$  скорость заряда  $\vec{V}' = -\vec{V}$ .

Движущийся в  $K'$  заряд, как элемент тока, создает магнитное поле  $\vec{B}'_E$  в соответствии с законом Био-Савара  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$ . Заменим элемент тока  $I d\vec{l} \rightarrow q \vec{V}$  и получим:

$$\begin{aligned} \vec{B}'_E &= \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{V}', \vec{r}']}{{r'}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{V}', \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[(-\vec{V}), \vec{r}]}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \vec{V}, q \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \vec{V}, 4\pi\epsilon_0 \vec{E} \right] = -\epsilon_0 \mu_0 \left[ \vec{V}, \vec{E} \right] = -\frac{1}{c^2} \left[ \vec{V}, \vec{E} \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{r}' \approx \vec{r}$  — вектор из заряда в точку наблюдения магнитного поля имеет примерно одно и то же значение в двух системах отсчета, если пренебречь релятивистским сжатием.

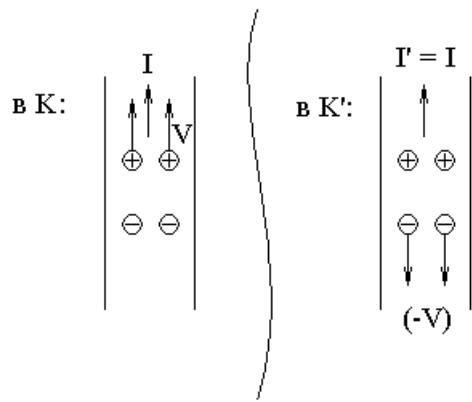
Это поле  $\vec{B}'_E$  появляется в системе  $K'$  только потому, что есть поле  $\vec{E}$  в  $K$ .

Заметим, что сила тока в незаряженном проводнике не изменяется при переходе из одной системы отсчета в другую в нерелятивистском случае.

Пусть, например, в нейтральном проводнике отрицательные заряды неподвижны, а положительные движутся со скоростью  $\vec{V}$ .

Пусть система отсчета  $K'$  движется относительно системы  $K$  с той же скоростью  $\vec{V}$ .

Тогда в  $K'$  положительные заряды неподвижны, а отрицательные движутся со скоростью  $(-\vec{V})$ . Сила тока в обоих случаях одинакова.



Если токи одинаковые, то и их магнитные поля одинаковы.

Пренебрегая релятивистским сжатием, при котором чуть меняются в разные стороны концентрации зарядов обоих знаков, получаем, что токи в незаряженных проводниках создают одинаковое магнитное поле в разных системах отсчета.

Тогда магнитные поля в двух системах отсчета отличаются на величину

$$\vec{B}'_E = -\frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}]:$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}].$$

Суммируя выводы, получаем, что в нерелятивистском случае  $V \ll c$ :

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}] \\ \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}] \end{cases}$$

В системе СГС Гаусса:

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}, \vec{B}] \\ \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c} [\vec{V}, \vec{E}] \end{cases}$$

**Точные формулы теории относительности для преобразования электрического и магнитного полей при переходе в движущуюся систему отсчета.**

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ E'_z = \frac{E_z + VB_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \frac{B_y + \frac{V}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ B'_z = \frac{B_z - \frac{V}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

В системе СГС Гаусса:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \frac{E_y - \frac{V}{c} B_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ E'_z = \frac{E_z + \frac{V}{c} B_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \frac{B_y + \frac{V}{c} E_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ B'_z = \frac{B_z - \frac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

### Эффект Холла.

Рассмотрим проводник с током в магнитном поле. Магнитное поле можно представить в виде суммы двух составляющих: вдоль тока и перпендикулярно току. Составляющая магнитного поля вдоль тока не дает вклада в эффект Холла, и далее мы ее рассматривать не будем.

Если проводник с током находится в магнитном поле перпендикулярном току, то в проводнике возникает электрическое напряжение в направлении перпендикулярном току и перпендикулярном магнитному полю.

$U = R_H a j B$ , где  $a$  — ширина проводника в направлении перпендикулярном магнитному полю  $\vec{B}$ ,  $j$  — плотность тока вдоль проводника,  $R_H$  — постоянная Холла (табличная характеристика материала проводника),  $U$  — напряжение в эффекте Холла.

Объяснение эффекта Холла.

Электрический ток — движение зарядов. При движении зарядов в магнитном поле на заряды действует сила Лоренца:  $\vec{F}_L = q[\vec{V}, \vec{B}]$ .

Эта сила смещает заряды в направлении перпендикулярном скорости или току и перпендикулярном магнитному полю.

Смещение зарядов приводит к образованию поверхностных зарядов. Поверхностные заряды создают поле  $\vec{E}$ , которое создает напряжение эффекта Холла:

$$U = \int_1^2 E_l dl.$$

При смещении зарядов поле  $\vec{E}$  нарастает до тех пор, пока для оставшихся свободных зарядов ни будет выполнено условие:

$$q\vec{E} + q[\vec{V}, \vec{B}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$$

$$\begin{array}{c} + + + + + + + \\ \text{B} \otimes \longrightarrow \text{v} \\ - - - - - - - \end{array} \quad \uparrow \quad \vec{F}_L = q [\vec{v}, \vec{B}] \\ \text{при } q > 0$$

Скорость зарядов можно выразить через плотность тока. Раньше, в начале рассмотрения магнитного поля, мы уже доказали, что плотность тока  $\vec{j} = nq \langle \vec{V} \rangle$  связана с концентрацией зарядов  $n$ , величиной каждого заряда  $q$  и скоростью зарядов  $\vec{V}$ . Тогда

$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\vec{j}}{nq}.$$

Подставим эту скорость в выражение  $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$  и получим

$$\vec{E} = -\left[ \frac{\vec{j}}{nq}, \vec{B} \right] = -\frac{1}{nq} [\vec{j}, \vec{B}] \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{1}{nq} j B$$

$$U = \int_1^2 E_l dl = E \int_1^2 dl = E a = -\frac{1}{nq} a j B \quad \Rightarrow$$

$$U = R_H a j B,$$

где  $R_H = -\frac{1}{nq}$  — постоянная Холла.

В системе СГС Гаусса:  $R_H = -\frac{1}{cnq}$ .

Для электронов  $q < 0 \Rightarrow$

$R_H = -\frac{1}{nq} > 0$ , но для многих металлов  $R_H < 0$  — квантовый эффект.

$R_H > 0$  для: Fe, Co, Zn, Cd, Mo, W, ...

$R_H < 0$  для: Au, Ag, Pt, Cu, Ni, Al, ...

### Теорема Лармора.

В магнитном поле электронная оболочка атома, как целое, приобретает вращение с угловой скоростью  $\Omega$ :

$\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \vec{B}$ , где  $e > 0$  — модуль заряда электрона,  $m_e$  — масса электрона,

$\vec{B}$  — внешнее по отношению к атому магнитное поле.

$$\vec{\Omega} \uparrow\uparrow \vec{B}$$

Заметим, что ядро атома вращается несколько иначе, так как для ядра другое отношение заряда к массе. Кроме того, заряд ядра распределен в большей мере ближе к поверхности ядра, а не равномерно по всей массе ядра.

Теорема Лармора справедлива только для небольших магнитных полей, когда можно пренебречь эффектами, пропорциональными  $B^2$  по сравнению с эффектами, пропорциональными  $B$ .

Докажем, что в магнитном поле  $\vec{B}$  и в системе отсчета вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \vec{B}$  на электрон действуют те же силы, что и без магнитного поля в не вращающейся системе отсчета. Это и будет доказательством теоремы Лармора.

В магнитном поле к силам, действующим на электрон, добавляется сила Лоренца

$$\vec{F}_L = q[\vec{V}, \vec{B}].$$

Во вращающейся системе отсчета добавляется центробежная сила инерции, которой можно пренебречь, так как  $F_{u.b.} \sim \Omega^2 \sim B^2$ . В этом приближении во вращающейся системе отсчета к силам, действующим на электрон, из сил инерции добавляется только сила Кориолиса:

$\vec{F}'_K = -2m_e[\vec{\Omega}, \vec{V}']$ , где  $m_e$  — масса электрона,  $\vec{V}'$  — скорость электрона относительно вращающейся системы отсчета.

Достаточно доказать, что  $\vec{F}_L + \vec{F}'_K \approx 0$  во вращающейся штрихованной системе отсчета, пренебрегая слагаемыми пропорциональными  $B^2$  и более высокими степенями магнитного поля  $B$ . Нам будет удобно рассматривать силу Лоренца в неподвижной системе отсчета, а кориолисовую силу во вращающейся системе отсчета. Относительное изменение силы при переходе в движущуюся систему отсчета имеет порядок  $\frac{V\Omega r}{c^2}$ , где  $r$  — расстояние от электрона до оси вращения. Этим изменением силы можно пренебречь.

#### Факультативная вставка.

[http://merlin.fic.uni.lodz.pl/concepts/2009\\_4/2009\\_4\\_671.pdf](http://merlin.fic.uni.lodz.pl/concepts/2009_4/2009_4_671.pdf)

Relativistic force transformation. Valery P. Dmitriyev. 2005.

Пусть система отсчета  $K'$  движется относительно системы отсчета  $K$  в

направлении оси  $X$  со скоростью  $V$ . Пусть сила  $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$  действует на

материальную точку, которая движется со скоростью  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ . Тогда

$$F_x' = F_x - \left( F_y \dot{y} + F_z \dot{z} \right) \frac{\frac{V}{c^2}}{1 - \frac{\dot{x}V}{c^2}}$$

$$F_y' = F_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{\dot{x}V}{c^2}}$$

$$F_z' = F_z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{\dot{x}V}{c^2}}.$$

В линейном по  $\frac{V}{c}$  приближении:

$$F_x' = F_x - \left( F_y \dot{y} + F_z \dot{z} \right) \frac{V}{c^2}$$

$$F_y' = F_y \left( 1 + \frac{\dot{x}V}{c^2} \right)$$

$$F_z' = F_z \left( 1 + \frac{\dot{x}V}{c^2} \right).$$

Если же дополнительно потребовать  $\dot{x} \ll c$ ,  $\dot{y} \ll c$ ,  $\dot{z} \ll c$ , то  $\vec{F}' \approx \vec{F}$ .

Конец факультативной вставки.

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{F}_L + \vec{F}_K' &= (-e) [\vec{V}, \vec{B}] - 2m_e [\vec{\Omega}, \vec{V}'] = (-e) [\vec{V}, \vec{B}] - 2m_e \left[ \frac{e}{2m_e} \vec{B}, \vec{V}' \right] = \\ &= (-e) [\vec{V}, \vec{B}] - e [\vec{B}, \vec{V}'] = \\ &= (-e) [\vec{V}, \vec{B}] + e [\vec{V}', \vec{B}] = (-e) [\vec{V} - \vec{V}', \vec{B}] = (-e) [[\vec{\Omega}, \vec{r}], \vec{B}] = \\ &= (-e) \left[ \left[ \frac{e}{2m_e} \vec{B}, \vec{r} \right], \vec{B} \right] \sim B^2 \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{V} = \vec{V}' + [\vec{\Omega}, \vec{r}]$  — скорость электрона относительно неподвижной системы отсчета,  $\vec{V}'$  — скорость электрона относительно вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \vec{B}$  системы отсчета.

Получаем  $(\vec{F}_L + \vec{F}_K') \sim B^2$ , а теорема Лармора справедлива в пренебрежении величинами пропорциональными  $B^2$ .

Тогда  $\vec{F}_L + \vec{F}_K' \approx 0$  — доказано и теорема Лармора доказана.

Лармировское вращение электронной оболочки иногда называют лармировской прецессией. Поясним происхождение этого названия.

Электронная оболочка атома может вращаться и без внешнего магнитного поля. Это вращение похоже на вращение гироскопа. В магнитном поле ось вращения этого гироскопа прецессирует со скоростью  $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \vec{B}$  в соответствии с теоремой Лармора. Поэтому вращение электронной оболочки в магнитном поле часто называют лармировской прецессией.

В системе СГС Гаусса:  $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c} \vec{B}$ .