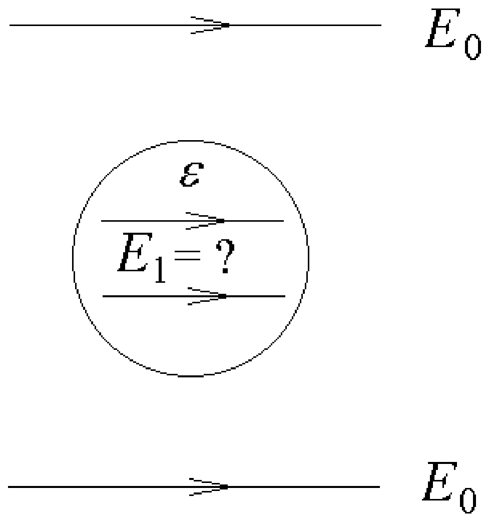
# <u>Резонанс рассеяния света наношаром.</u>

Рассмотрим некоторую задачу, которая, казалось бы, никак не связана с нанооптикой. Рассмотрим диэлектрический шар в однородном электростатическом поле $\vec{E}_0$, и найдем поле $\vec{E}_1$ внутри шара.




Из единственности решения уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ для скалярного потенциала $\varphi$ следует, что можно придумывать решения для электростатического поля, и нужно проверять, что придуманное решение удовлетворяет уравнению Пуассона для точек однородной среды и удовлетворяет граничным условиям на границах сред и границе рассматриваемого объема.

Придумаем, что напряженность электрического поля внутри шара $\vec{E}_1 = \overrightarrow{const} \parallel \vec{E}_0$ одинаковая во всех точках шара и параллельна внешнему полю $\vec{E}_0$.

Придумаем, что поле снаружи шара $\vec{E}_2$ равно сумме однородного внешнего поля $\vec{E}_0$ и поля точечного диполя $\vec{E}_p = 3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$ расположенного в центре шара. То есть поле снаружи шара

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \vec{E}_0 + 3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

Придуманные поля (внутри и снаружи шара) удовлетворяют уравнению Пуассона для потенциала и правильно ведут себя на бесконечности.

Проверим, что придуманные поля удовлетворяют граничным условиям на поверхности шара

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}.$$

Пусть среда 1 — внутри шара, а среда 2 — снаружи. Тогда граничные условия примут вид

$$\begin{cases} E_{2n} - \varepsilon E_{1n} = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} \varepsilon E_{1n} = E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \end{cases}.$$

Рассмотрим произвольную точку на поверхности шара. Отложим вектор $\vec{E}_0$ из центра шара. Пусть угол между направлением $\vec{E}_0$ и направлением из центра шара в рассматриваемую точку на поверхности шара равен $\theta$. Тогда

$$\begin{cases} E_{1n} = E_1 \cos(\theta) \\ E_{1\tau} = E_1 \sin(\theta) \\ E_{2n} = E_0 \cos(\theta) + 3\dfrac{p\cos(\theta)}{R^3} - \dfrac{p\cos(\theta)}{R^3} = E_0 \cos(\theta) + 2\dfrac{p\cos(\theta)}{R^3}, \\ E_{2\tau} = E_0 \sin(\theta) - \dfrac{p\sin(\theta)}{R^3} \end{cases}$$

здесь первая пара уравнений — это уравнения для нормальной и тангенциальной составляющей поля внутри шара, вторая пара уравнения для нормальной и тангенциальной составляющей поля снаружи шара.

Подставим эти выражения в граничные условия

$$\begin{cases} \varepsilon E_{1n} = E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \end{cases}$$

и получим

$$\begin{cases} \varepsilon E_1 \cos(\theta) = E_0 \cos(\theta) + 2\dfrac{p\cos(\theta)}{R^3} \\ E_1 \sin(\theta) = E_0 \sin(\theta) - \dfrac{p\sin(\theta)}{R^3} \end{cases}.$$

После сокращения первого уравнения на $\cos(\theta)$, а второго — на $\sin(\theta)$ получим

$$\begin{cases} \varepsilon E_1 = E_0 + 2\dfrac{p}{R^3} \\ E_1 = E_0 - \dfrac{p}{R^3} \end{cases}.$$

Откуда

$$E_1 = \frac{3}{\varepsilon + 2} E_0.$$

Обсудим теперь, зачем нужна была эта задача.

В оптике показатель преломления $n$ связан с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$ и магнитной проницаемостью $\mu$ соотношением $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$. В оптике магнитная проницаемость любой среды очень близка к единице $\mu \approx 1$, поэтому $\varepsilon \approx n^2$. В металле, как и в плазме $n^2 \approx 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$. Тогда в металле

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Это означает, что на некоторых частотах диэлектрическая проницаемость — отрицательная величина. В частности на частоте $\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$ получаем $\varepsilon \approx -2$. Если теперь подставить это значение в формулу $E_1 = \frac{3}{\varepsilon + 2} E_0$, то знаменатель обращается в ноль, что означает $E_1 >> E_0$, и амплитуда поля в металлическом шаре очень велика. Следовательно, шар имеет очень большой осциллирующий дипольный момент при взаимодействии со световым полем частотой $\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$, этот большой дипольный момент сильно излучает. В результате шар сильно рассеивает свет на резонансной частоте $\omega_{рез} = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$. Это так называемая частота локализованного плазмонного резонанса.

Эти рассуждения будут справедливы, если внешнее электрическое поле световой волны в один момент времени имеет почти одинаковое значение в разных точках шара, то есть в случае наношара и при условии, что радиус наношара гораздо меньше длины волны света. То есть наношар еще и маленький.

Можно показать, что частота этого резонанса $\omega_{рез} = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$ в точности совпадает с частотой резонанса при рассмотрении шара, как колебательного контура $\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{\left(L_f + L_k\right)C}} \approx \frac{1}{\sqrt{L_k C}}$. Здесь приближенное равенство получается в случае очень малых линейных размеров шара, когда $L = L_k = V \frac{c^2 m_e}{n_e e^2 S^2}$, а электрическую емкость нужно найти, интегрируя объемную плотность энергии электрического поля диполя снаружи шара и однородного поля $E_1 - E_0$ внутри шара. В системе СИ:

$$C = \frac{Q^2}{\int\limits_{V=\infty} \left(\vec{D}, \vec{E}\right) dV}.$$

То есть представление наноантенны, как электрического колебательного контура, получает независимое подтверждение, по крайней мере, для наноантенны в форме шара.

Заметим, что, если в более общем случае шар с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1$ находится не в вакууме, а в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2$, то вместо формулы $E_1=\frac{3}{\varepsilon+2}E_0$ получим $E_1=\frac{3}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}+2}E_0$, что несколько изменит резонансную частоту.

## Учет проводимости металла в комплексной диэлектрической проницаемости.

При рассмотрении оптических частот в значительной мере стирается грань между свободными и связанными зарядами, так как на оптической частоте свободные заряды мало сдвигаются за половину периода светового поля. Поэтому в оптическом диапазоне частот обычно все заряды и свободные и связанные рассматривают, как связанные заряды. При таком описании к мнимой части диэлектрической проницаемости среды возникает добавка пропорциональная проводимости свободных зарядов.

Будем рассматривать уравнения Максвелла, как уравнения для комплексного электромагнитного поля на одной частоте $\omega$ — для монохроматического поля $\tilde{\vec{E}}=\tilde{\vec{E}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$.

Тогда все величины оказываются пропорциональны сомножителю $e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$. Так, плотность заряда $\tilde{\rho}\sim e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$, плотность тока $\tilde{\vec{j}}\sim e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$, магнитное поле $\tilde{\vec{B}}\sim e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$. Если на любую из этих величин подействовать оператором набла $\vec{\nabla}\equiv\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$, то получим перед рассматриваемой величиной сомножитель $i\vec{k}$, то есть $\vec{\nabla}\cdot=i\vec{k}\,\cdot$. Аналогично, если любую величину продифференцировать по времени, то получим перед ней сомножитель $-i\omega$, то есть $\frac{\partial\,\cdot}{\partial t}=-i\omega\,\cdot$. Здесь есть некоторая тонкость. Если мы рассмотрим, например, дивергенцию напряженности электрического поля, то $div\left(\tilde{\vec{E}}\right)=\left(\vec{\nabla},\tilde{\vec{E}}\right)=\left(i\vec{k},\tilde{\vec{E}}\right)=i\left(\vec{k},\tilde{\vec{E}}\right)$. По правилам скалярного произведения комплексных чисел, если мы хотим вынести за знак скалярного произведения комплексный сомножитель второго вектора в произведении, то этот сомножитель нужно вынести комплексно сопряженным $\left(\vec{k},\tilde{\vec{E}}\right)=\left(\vec{k},\tilde{\vec{E}}_0\right)e^{-i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$, но из физических соображений ясно, что $div\left(\tilde{\vec{E}}\right)\sim e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}\sim\tilde{\vec{E}}$, то есть сомножитель нужно выносить без комплексного сопряжения. В связи с этим переопределим скалярное произведение комплексных векторов так, что комплексную константу от второго сомножителя нужно выносить без комплексного сопряжения. Теперь векторными равенствами уравнений Максвелла можно будет пользоваться и после замен $\vec{\nabla}\cdot = i\vec{k}\,\cdot$ и $\frac{\partial\,\cdot}{\partial t} = -i\omega\,\cdot$.

Рассмотрим уравнение неразрывности для плотности тока проводимости и плотности свободного заряда

$$div\left(\tilde{\vec{j}}\right) + \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{\nabla}, \tilde{\vec{j}}\right) + \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(i\vec{k}, \tilde{\vec{j}}\right) - i\omega\tilde{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{k}, \tilde{\vec{j}}\right) - \omega\tilde{\rho} = 0.$$

Учтем закон Ома в дифференциальной форме $\tilde{\vec{j}} = \sigma\tilde{\vec{E}}$, где $\sigma$ — удельная проводимость. Тогда $\left(\vec{k}, \sigma\tilde{\vec{E}}\right) - \omega\tilde{\rho} = 0$ и $\tilde{\rho} = \left(\vec{k}, \frac{\sigma}{\omega}\tilde{\vec{E}}\right)$.

Подставим эту плотность свободных зарядов в уравнение Максвелла $div\left(\tilde{\vec{D}}\right) = 4\pi\tilde{\rho}$ или $\left(\vec{\nabla}, \tilde{\vec{D}}\right) = 4\pi\tilde{\rho}$ для монохроматического поля с учетом $\vec{\nabla}\cdot = i\vec{k}\,\cdot$ получим $\left(i\vec{k}, \tilde{\vec{D}}\right) = 4\pi\tilde{\rho}$, откуда $\left(i\vec{k}, \tilde{\vec{D}}\right) = 4\pi\left(\vec{k}, \frac{\sigma}{\omega}\tilde{\vec{E}}\right)$. Умножим правую часть равенства на $1 = -i\cdot i$ и получим $i\left(\vec{k}, \tilde{\vec{D}}\right) = -4\pi i\left(\vec{k}, \frac{\sigma}{\omega}i\tilde{\vec{E}}\right)$, где сомножитель $i$ внесен ко второму сомножителю скалярного произведения без комплексного сопряжения, как мы только что договорились. Откуда

$$\left(\vec{k}, \tilde{\vec{D}} + 4\pi i\frac{\sigma}{\omega}\tilde{\vec{E}}\right) = 0.$$

Подставим сюда $\tilde{\vec{D}} = \varepsilon\tilde{\vec{E}} = \left(\varepsilon' + i\varepsilon''\right)\tilde{\vec{E}}$ и получим

$$\left(\vec{k}, \left(\varepsilon' + i\left(\varepsilon'' + 4\pi\frac{\sigma}{\omega}\right)\right)\tilde{\vec{E}}\right) = 0.$$

Если теперь по-новому определить вектор $\vec{D}$:

$$\tilde{\vec{D}} \equiv \left(\varepsilon' + i\left(\varepsilon'' + 4\pi\frac{\sigma}{\omega}\right)\right)\tilde{\vec{E}},$$

то $\left(\vec{k}, \tilde{\vec{D}}\right) = 0$ или $div\left(\tilde{\vec{D}}\right) = 0$, то есть нет свободных зарядов и все заряды связанные.

В системе СИ: $\tilde{\vec{D}} \equiv \left(\varepsilon' + i\left(\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)\right)\tilde{\vec{E}}$.

Покажем теперь, что уравнение $rot\left(\tilde{\vec{H}}\right)=\frac{4\pi}{c}\tilde{\vec{j}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\vec{D}}}{\partial t}$, если все заряды рассматривать как связанные, превратится в уравнение $rot\left(\tilde{\vec{H}}\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\vec{D}}}{\partial t}$, для нового вектора $\tilde{\vec{D}}=\left(\varepsilon'+i\left(\varepsilon''+4\pi\frac{\sigma}{\omega}\right)\right)\tilde{\vec{E}}$. И действительно

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\vec{D}}}{\partial t}=\frac{1}{c}\left(\varepsilon'+i\left(\varepsilon''+4\pi\frac{\sigma}{\omega}\right)\right)\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}i\frac{\sigma}{\omega}\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial\left(\left(\varepsilon'+i\varepsilon''\right)\tilde{\vec{E}}\right)}{\partial t}=$$

$$=\frac{4\pi}{c}i\frac{1}{\omega}\frac{\partial\left(\sigma\tilde{\vec{E}}\right)}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial\left(\left(\varepsilon'+i\varepsilon''\right)\tilde{\vec{E}}\right)}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}i\frac{1}{\omega}\frac{\partial\tilde{\vec{j}}}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial\left(\left(\varepsilon'+i\varepsilon''\right)\tilde{\vec{E}}\right)}{\partial t}=$$

$$=\frac{4\pi}{c}\tilde{\vec{j}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\left(\left(\varepsilon'+i\varepsilon''\right)\tilde{\vec{E}}\right)}{\partial t}=rot\left(\tilde{\vec{H}}\right)$$

То есть для того, чтобы можно было рассматривать все заряды как связанные, нужно к мнимой части комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon''$ добавить $4\pi\frac{\sigma}{\omega}$. В системе СИ: $\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$.

Заметим, что в оптике в комплексном представлении монохроматическое поле и токи пропорциональны $e^{-i\omega t}$, в теории электрических цепей комплексные токи и напряжения пропорциональны $e^{+i\omega t}$. В нанооптике в части работ приняты знаки мнимых величин, соответствующие оптике, соответственно, в этих работах импеданс индуктивности равен $-i\omega L$ вместо $i\omega L$, как это принято в теории электрических цепей. Аналогично импеданс конденсатора равен $-\frac{1}{i\omega C}$ вместо $\frac{1}{i\omega C}$. В другой части работ по нанооптике приняты знаки мнимых величин в соответствии с теорией электрических цепей, и световое поле $E\sim e^{i\omega t}$ вместо $E\sim e^{-i\omega t}$. Интерпретация и прогнозы для экспериментальных данных всегда касаются только вещественных величин и не зависят от принятых знаков мнимых частей физических величин.

В наших рассуждениях будем считать, что $E\sim e^{-i\omega t}$.

**<u>Результаты расчетов рассеяния света нанопластиной</u>**

в программном пакете COMSOL Multiphysics

Влияние угла поворота на рассеяние на золотых наноантеннах

У.В. Прохорова[1], Е.А. Ефремова[2], И.Р. Крылов[1]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет

[2]Университет ИТМО

IX международная конференция "Фотоника и Информационная Оптика", 29 — 31 января 2020 года, Москва, НИЯУ (Национальный Исследовательский

Ядерный Университет) МИФИ (Московского Инженерно-Физического Института).

Обсудим следующий слайд презентации на рис.1. Толщина золотой наноантенны в расчетах 5 нм, ширина 100 нм, длина наибольшего отрезка по краю наноантенны 350 нм.

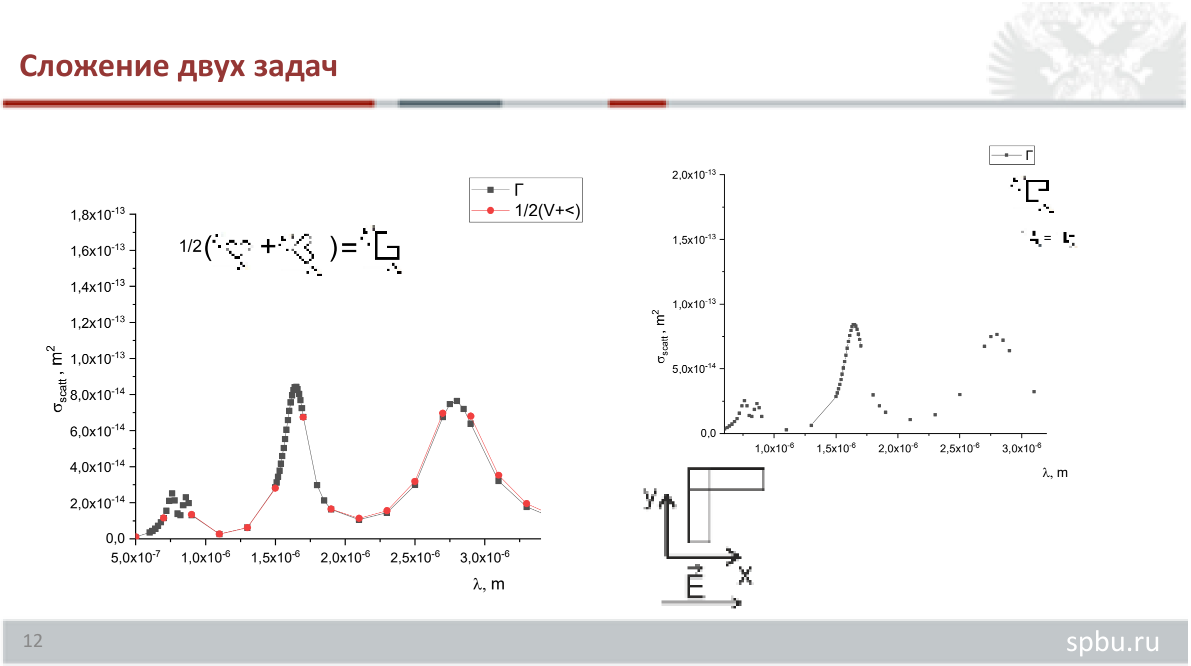



Рис.1.

Линейно поляризованный свет падает перпендикулярно плоскости наноантенны. На графиках изображены результаты расчета сечения рассеяния света в зависимости от длины волны света. На правом рисунке представлены результаты расчета сечения рассеяния для поляризации света направленной вдоль одной из сторон наноантенны в форме угловой полоски. На левом графике результат сравнения этого сечения рассеяния с полусуммой сечений при двух других ортогональных поляризациях света.

Обсудим, почему в зависимости сечения рассеяния от длины волны света наблюдаются четыре резонанса.

Некоторые плоские наноантенны имеют плоскость симметрии перпендикулярную к плоскости антенны. При отражении в этой плоскости симметрии наноантенна переходит сама в себя. Плоскость симметрии пересекает плоскую наноантенну по некоторой линии. Каждая из рассмотренных далее наноантенн имеет плоскость симметрии.

Для рассматриваемой здесь наноантенны плоскость симметрии проходит следующим образом.

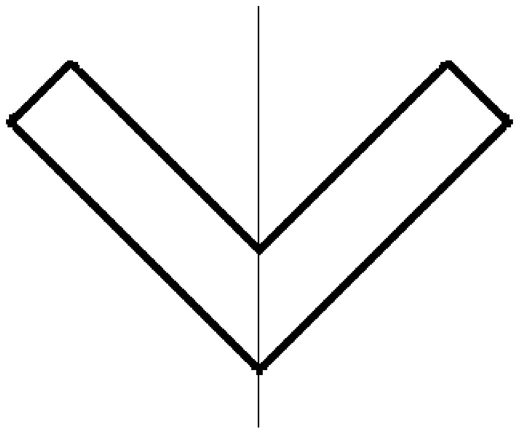


Рис.2.

Если внешнее световое поле направлено в плоскости симметрии наноантенны, то поле не нарушает симметрию задачи, поэтому наведенные полем токи тоже должны подчиняться симметрии задачи.

Токи симметричной моды выглядят так, как изображено на рис.3.

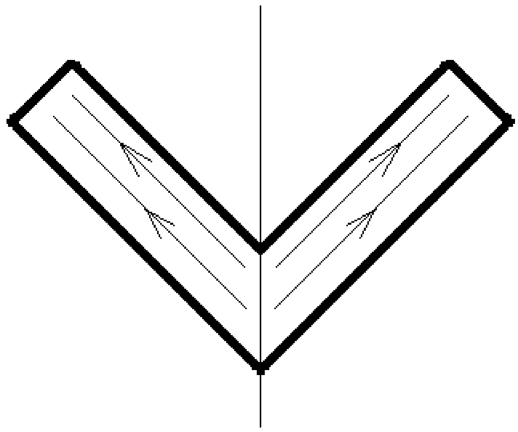


Рис.3.

В модах этого класса электрические токи в наноантенне в каждый момент времени обладают той же плоскостью симметрии, что и сама наноантенна. Эти токи идут примерно вдоль линии пересечения наноантенны плоскостью симметрии и если поворачивают от этой линии, то симметрично в обе стороны.

Если же внешнее поле перпендикулярно плоскости симметрии наноантенны, то наноантенна вместе с внешним полем образует антисимметричную задачу.

Токи антисимметричной моды изображены на рис.4.

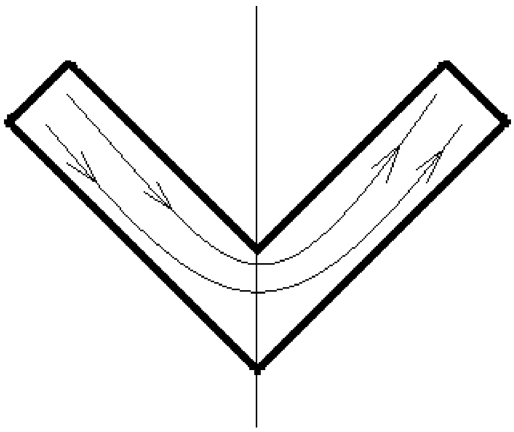


Рис.4.

В модах этого второго класса электрические токи в наноантенне антисимметричны относительно плоскости симметрии наноантенны. При отражении токов от плоскости симметрии наноантенны токи меняют знак. Эти токи идут приблизительно в направлении перпендикулярном линии пересечения наноантенны плоскостью симметрии и могут несколько отклоняться от этой линии, но для каждого момента времени распределение токов будет симметрично распределению токов для другого момента времени через половину периода изменения токов.

Длина пути тока антисимметричной моды примерно вдвое больше длины пути тока симметричной моды. Соответственно, резонансная длина волны антисимметричной моды 2.8 мкм, а резонансная длина волны симметричной моды 1.7 мкм (пара правых резонансов на рис.1).

Любую напряженность поля световой волны в плоскости наноантенны можно разложить на две составляющие: вдоль плоскости симметрии наноантенны и перпендикулярно этой плоскости.

Излучение симметричной и антисимметричной моды в дипольном приближении представляет собой излучение двух ортогональных диполей. Полная мощность излучения двух ортогональных диполей по всем направлениям складывается не интерферируя.

Для произвольной поляризации света падающего ортогонально на плоскость наноантенны напряженность электрического поля нужно разложить на сумму составляющей в плоскости симметрии и перпендикулярно к ней. Эти две составляющие поля будут независимо друг от друга возбуждать токи двух приведенных на рис.3,4 мод. Интегральные по всем направлениям мощности излучения этих мод будут складываться без интерференции.

Для простоты будем считать, что на наноантенну падает свет линейной поляризации, хотя последующий результат будет справедлив для любой поляризации падающего света. Пусть направление напряженности электрического поля падающей волны составляет угол $\alpha$ с плоскостью симметрии (с направлением вертикали на рис.2-4). Тогда амплитуда напряженности поля, раскачивающая моду на рис.3, будет равна $E_0 \cos(\alpha)$, где

$E_0$ — амплитуда падающей на наноантенну волны. Амплитуда поля для моды на рис.4 будет равна $E_0 \sin(\alpha)$.

Для простоты будем считать, что интенсивность света равна квадрату амплитуды, опуская несущественный множитель.

Тогда интенсивность падающего света с поляризацией параллельной плоскости симметрии равна $E_0^2 \cos^2(\alpha)$, а интенсивность падающего света перпендикулярной поляризации — $E_0^2 \sin^2(\alpha)$. Мощность падающей волны в каждой поляризации имеет дополнительный к интенсивности света сомножитель $S_0$ равный площади верхней грани наноантенны: $S_0 E_0^2 \cos^2(\alpha)$ и $S_0 E_0^2 \sin^2(\alpha)$.

Мощность рассеянного во всех направлениях света в параллельной поляризации $\sigma_{||} E_0^2 \cos^2(\alpha)$ в соответствии с определением сечения рассеяния света $\sigma_{||}$ равна произведению интенсивности падающего света $E_0^2 \cos^2(\alpha)$ на сечение рассеяния $\sigma_{||}$. Аналогично, для перпендикулярной поляризации мощность рассеянного света равна $\sigma_{\perp} E_0^2 \sin^2(\alpha)$. Если теперь мощность всего рассеянного света $\sigma_{||} E_0^2 \cos^2(\alpha) + \sigma_{\perp} E_0^2 \sin^2(\alpha)$ разделить на интенсивность падающей волны $E_0^2$, то получится следующее выражение для сечения рассеяния

$$\sigma = \sigma_{||} \cos^2(\alpha) + \sigma_{\perp} \sin^2(\alpha)$$

в зависимости от угла $\alpha$ между направлением линейной поляризации падающей на наноантенну световой волны и плоскости симметрии наноантенны. Зависимость сечения рассеяния от длины волны света также будет складываться из двух аналогичных зависимостей для поляризации света в плоскости симметрии наноантенны и перпендикулярной поляризации с теми же коэффициентами $\cos^2(\alpha)$ и $\sin^2(\alpha)$.

В результате, если плоская наноантенна имеет плоскость симметрии (перпендикулярную поверхности наноантенны), то зависимость сечения рассеяния света от длины волны при произвольной ориентации поляризации волны складывается с коэффициентами $\cos^2(\alpha)$ и $\sin^2(\alpha)$ из двух зависимостей с поляризацией в плоскости симметрии и перпендикулярной поляризацией.

Обсудим теперь, пару левых резонансов на рис.1. Для этих целей рассмотрим наноантенну прямоугольной формы.

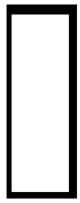


Рис.5.

Пусть внешнее световое поле направлено вдоль короткой стороны этой наноантенны. Такое поле может возбуждать только моды одного класса с пространственным распределением токов наноантенны симметричным относительно горизонтальной линии на рис.5. В этом случае образуется пара резонансов, если размеры наноантенны достаточно велики для возбуждения не только резонанса основной моды с низкой резонансной частотой, но и следующей более высокочастотной моды. Нам будет удобнее говорить не о резонансных частотах мод, а о резонансных длинах волн.

Теория собственных резонансных мод наноантенны сложна и продолжает развиваться, но качественно описать многие особенности резонансных мод можно, опираясь на простые и наглядные соображения.

Рассмотрим электрические токи наноантенны независимо от обратного воздействия электромагнитного излучения этих токов на сами токи. В таком приближении электроны проводимости в наноантенне ведут себя подобно воде в небольшой ванночке. Если ванночку с водой покачать, то можно возбудить стоячие поверхностные волны в воде. Аналогично, если покачать электроны проводимости внешним световым полем, то можно возбудить стоячие волны электрических токов в наноантенне.

Очень грубо можно сказать, что вода в ванночке будет сильно раскачиваться, если частота качаний ванночки соответствует длине волны поверхностных волн такой, что на длине ванночки укладывается целое число полуволн. Аналогично, на длине наноантенны должно укладываться целое число полуволн плотности электрических токов. На границе наноантенны плотность токов перпендикулярная границе должна обращаться в ноль. В результате задача о модах плотности тока становится подобной задаче о модах светового поля в зеркальном ящике.

Тангенциальная составляющая электрического поля на границе зеркального ящика должна обращаться в ноль. Аналогично, нормальная составляющая плотности тока на границе нанобалки обязана обращаться в ноль, так как токи не вытекают за пределы нанобалки. В отличие от электромагнитных волн волны плотности тока — это продольные волны.

Если плотность тока изменить в одном месте, это приведет к распространению возмущения в поле плотности тока. Возмущение распространяется с некоторой скоростью, которая меньше скорости света хотя бы из-за наличия отличной от нуля инертной массы электронов, которые участвуют в токе. Влияние инертной массы электронов на скорость распространения волн плотности тока взаимосвязано с влиянием кинетической энергии электронов на индуктивность наноантенны. Как показывают наши расчеты, на рассматриваемых частотах светового поля эффективная скорость распространения волн плотности тока примерно в два раза меньше скорости света в пустоте.

Нанобалку (прямоугольную полоску) для низшей (дипольной) моды можно рассматривать, как последовательный колебательный контур с некоторой емкостью и индуктивностью, которые, в свою очередь, определяют резонансную частоту этой дипольной моды. Напомним, что при расчете индуктивности контура кроме энергии магнитного поля нужно учитывать кинетическую энергию электронов.

Если волны плотности тока возбуждаются падающим на нанобалку монохроматическим электромагнитным полем, то и волны плотности тока должны быть монохроматическими. Зная скорость распространения волн плотности тока и частоту вынуждающего их поля, можно найти длину волн плотности тока. Это с одной стороны, а с другой стороны, если вынуждающее электрическое поле направлено вдоль нанобалки, то на длине нанобалки должно укладываться целое число полуволн стоячей волны плотности тока, что тоже позволяет найти длину волны плотности тока. Эти два значения длины волны плотности тока в общем случае не совпадают.

Длина стоячей волны плотности тока может отличаться от длины бегущей волны. Но амплитуда раскачавшейся стоячей волны будет большой только в том случае, если длина стоячей волны близка к длине бегущей волны. Длина падающей световой волны будет резонансной, если соответствующая длина бегущей волны плотности тока будет такой, что на удвоенной длине нанобалки будет укладываться целое число волн плотности тока.

Если потери энергии малы, то амплитуда стоячей волны заметно отличается от нуля только в случае почти полного совпадения длины вынужденных световым полем колебаний стоячей волны и длины волны свободных колебаний бегущей волны. Заметим, что если потери велики, то амплитуды встречных волн плотности тока сильно отличаются друг от друга, и образующаяся волна мало похожа на стоячую волну.

Рассмотрим падение световой волны перпендикулярно на плоскую проводящую полоску, наноантенну в форме прямоугольного параллелепипеда малой высоты (нанобалку). Пусть электрическое поле в падающей световой волне будет направлено вдоль одного из сторон полоски, вдоль оси *X*. на слайде презентации рис.6. Эту сторону в дальнейшем будем называть длиной наноантенны $l$, даже если этот размер меньше ортогонального ему размера $d$ вдоль оси *Y*. Толщину наноантенны $h$ вдоль оси $z$ будем считать малой величиной.

Рассмотрим волну плотности тока в один момент времени. Длине $\lambda_j$ волны плотности тока $j$ соответствует волновое число $k_j = \dfrac{2\pi}{\lambda_j}$ и волновой вектор $\vec{k}_j$. Длина волны $\lambda_j$ представляет собой пространственный период волны плотности тока, тогда $\frac{1}{\lambda_j}$ — пространственная частота, а волновое число $k_j = \frac{2\pi}{\lambda_j}$ — это циклическая пространственная частота. Соответственно, проекция $k_{jx}$ волнового вектора $\vec{k}_j$ на ось $X$ — это циклическая пространственная частота по оси *X*, а $\lambda_{jx} = \frac{2\pi}{k_{jx}}$ — пространственный период волны плотности тока по оси *X*. Аналогично для осей *Y* и *Z*.

Граничные условия для плотности тока означают, что пространственный период по каждой координате наноантенны должен быть таким, чтобы по этой координате укладывалось целое число полупериодов (в одномерном случае — целое число полуволн) на соответствующем размере наноантенны. Назовем число полупериодов индексом моды $m$. Для оси $X$ получим $l = m_x \frac{\lambda_{jx}}{2}$ или $\lambda_{jx} = \frac{2l}{m_x}$. С учетом того, что $\lambda_{jx} = \frac{2\pi}{k_{jx}}$, получаем $k_{jx} = \frac{\pi m_x}{l}$. Аналогично $k_{jy} = \frac{\pi m_y}{d}$ и $k_{jz} = \frac{\pi m_z}{h}$. Соответственно:

$$k_j = \sqrt{k_{jx}^2 + k_{jy}^2 + k_{jz}^2} = \pi \sqrt{\left(\frac{m_x}{l}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{d}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{h}\right)^2},$$

и длина стоячей волны плотности тока

$$\lambda_j = \frac{2\pi}{k_j} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m_x}{l}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{d}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{h}\right)^2}}.$$