

Плоские наноструктуры.

Современные исследования метаматериалов направлены на уменьшение размеров элементарной ячейки метаматериала. С переходом на микронный и субмикронный уровни размеров появились работы по исследованию более широкого класса образцов – так называемых наноструктур. Наноструктуры представляют собой рисунок полосок из металлической фольги (золото или платина), нанесенный на плоскую подложку (обычно кремниевую). Активно исследуются наноструктуры, состоящие из V-антенн.

В работе [1] исследовались оптические свойства наноструктуры приведенной на рис. 4

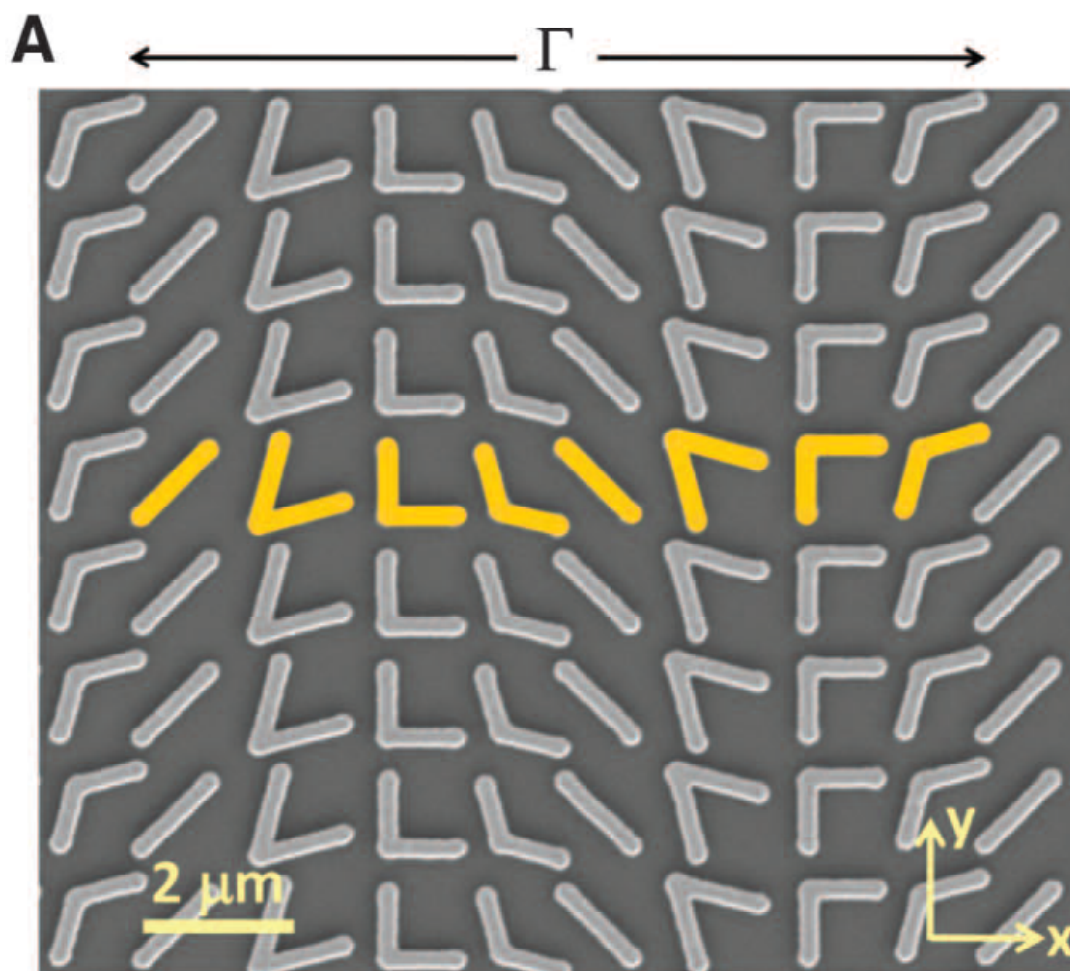


Рис.4. Рисунок взят из работы [1]. Изображение с электронного микроскопа образца антенной решетки на кремниевой пластине. Элементарная ячейка состоит из восьми золотых V-антенн шириной ~ 220 нм и толщиной ~ 50 нм, и это повторяется с периодичностью $G = 11$ мкм в направлении оси x и $1,5$ мкм в направлении оси y.

и было обнаружено аномальное отражение и преломление света, как это изображено на рис. 5.

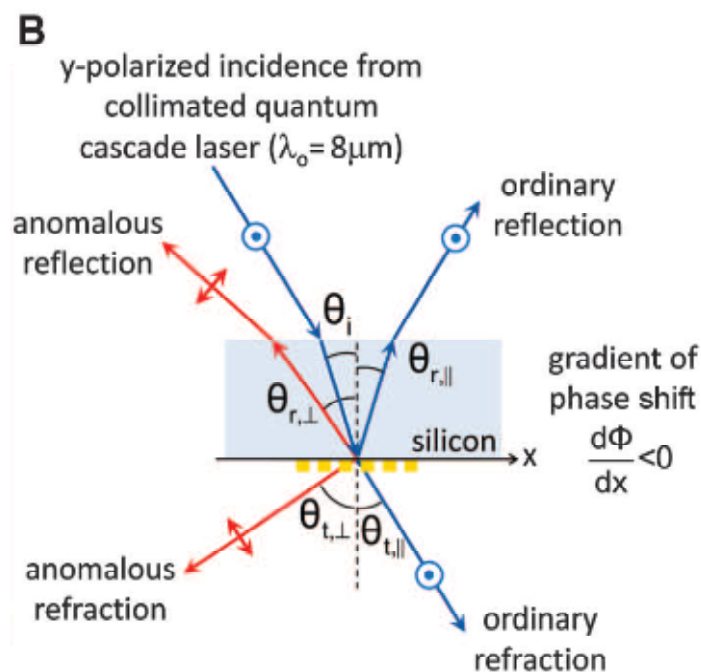


Рис. 5. Рисунок взят из работы [1].

Аномальное отражение и преломление света авторы работы [1] объясняют с помощью обобщения принципа Ферма для поверхности с дискретными фазовыми скачками.

Приведенные в статье значения углов аномального отражения $\theta_{r,\perp}$ и аномального преломления $\theta_{t,\perp}$ вполне соответствуют уравнению дифракционной решетки:

$$d \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)) = \lambda, \quad (3)$$

где $\alpha_1 = \theta_i$ — угол падения света на решетку, $\alpha_2 = \theta_{t,\perp}$ — угол дифракции прошедшего света. Луч, аномально отраженный под углом $\theta_{r,\perp}$, после выхода из силиконовой подложки идет под тем же углом $\theta_{r,\perp}$ к нормали, что и аномально преломленный луч. То есть аномальное отражение также соответствует уравнению дифракционной решетки.

В рассматриваемых работе [1] аномальное отражение и преломление регистрируется через скрещенный поляризатор, который не пропускает линейную поляризацию падающей световой волны. Таким образом, отсекается регистрация света прошедшего между V-антеннами. Если убрать поляризатор перед приемником света, то свет, прошедший между V-антеннами, тоже регистрируется и в этом случае одновременно наблюдается как обычное, так и аномальное отражение и преломление.

Обсудим, каким образом в свете, рассеянном V-антеннами, появляется составляющая поляризации ортогональная к поляризации, падающей на образец световой волны.

На рис. 4 вторая слева вертикальная полоска образована набором антенн, которые вообще не согнуты, или V-антеннами с углом 180° между двумя

отрезками образующими V-антенну. Эти металлические отрезки наклонены направо под углом 45^0 к оси Y рисунка.

Рассмотрим световую волну, которая нормально падает на образец (перпендикулярно плоскости рисунка). Пусть в падающей волне свет линейно поляризован вдоль вертикальной оси рисунка (вектор E падающей волны направлен вдоль оси Y).

Падающая световая волна может раскачать токи только вдоль металлического отрезка, то есть токи направлены под углом 45^0 к оси Y. Эти токи излучают свет с направлением вектора E вдоль металлического отрезка. Если теперь рассеянный металлическим отрезком свет пропустить через скрещенный поляризатор, который пропускает только составляющую светового поля вдоль оси X, то мы зарегистрируем световое поле с амплитудой, которая получит сомножитель в виде синуса 45^0 .

Итак, мы объяснили формирование ортогональной поляризации в рассеянном металлическими V-антеннами свете.

Объясним теперь формирование аномального преломления.

Рассмотрим рассеяние света 6-й вертикальной полоской V-антенн на рис. 3. Эти металлические отрезки опять образуют не согнутую антенну в виде одной металлической полоски. Только теперь эта полоска наклонена относительно вертикали в другую сторону под тем же углом 45^0 .

Снова рассмотрим падающую волну, поляризованную вдоль оси Y.

В металлических отрезках наклоненных направо и наклоненных налево токи одновременно будут течь вверх и одновременно — вниз. При этом составляющие тока вдоль оси Y окажутся синфазными, а составляющие вдоль оси X окажутся в противофазе. Соответственно, излучение этой пары металлических отрезков с поляризацией вдоль оси Y окажется синфазным, а излучение с поляризацией вдоль оси X — противофазным или сдвинутым по фазе на π .

Таким образом, мы приходим к выводу, что X составляющая светового поля, рассеянного 2-й и 6-й вертикальными полосками металлических отрезков, окажется сдвинутой по фазе друг относительно друга на угол π .

При переходе от 2-й полоски к 6-й полоске форма V-антенн меняется плавно. Это приведет к тому, что и фаза рассеянного света будет изменяться равными шагами $\frac{\pi}{4}$ при переходе от одной полоски к рассмотрению соседней полоски. При переходе от 6-й полоски к 10-й фаза снова изменится на π и снова будет изменяться шагами по $\frac{\pi}{4}$.

Полоски 2-я и 10-я — это одинаковые полоски. Следовательно, сдвиг фазы рассеянного ими света для любой поляризации равен нулю. Будем вместо этого считать, что сдвиг фазы равен 2π . Нам так будет удобнее рассуждать. Поскольку 2π — это период изменения фазы, добавка 2π ничего не меняет.

В результате для X поляризации рассеянного света мы получаем структуру вертикальных полосок, для которых, свет рассеянный каждой

соседней парой полосок имеет одинаковый фазовый сдвиг $\frac{\pi}{4}$. Фазовые сдвиги постоянно нарастают при перемещении по полоскам в одну сторону.

Рассмотрим фронт рассеянной световой волны сразу за плоскостью V-антенн. Рассмотрим эту плоскость, как плоскость вторичных источников света. Согласно теории дифракции Френеля-Кирхгофа характер дальнейшего распространения света при удалении от плоскости V-антенн будет полностью определяться амплитудами и фазами света в этой плоскости вторичных источников.

Аналогичное распределение фазы и амплитуды в плоскости вторичных источников можно получить другим способом. Тогда в этом другом способе свет после плоскости вторичных источников будет распространяться точно так же, как и после плоскости V-антенн. Это позволит нам понять, как будет распространяться свет после плоскости V-антенн.

Рассмотрим прозрачную пластинку с показателем преломления n , толщина которой изменяется малыми ступеньками, как это изображено на следующем рисунке.

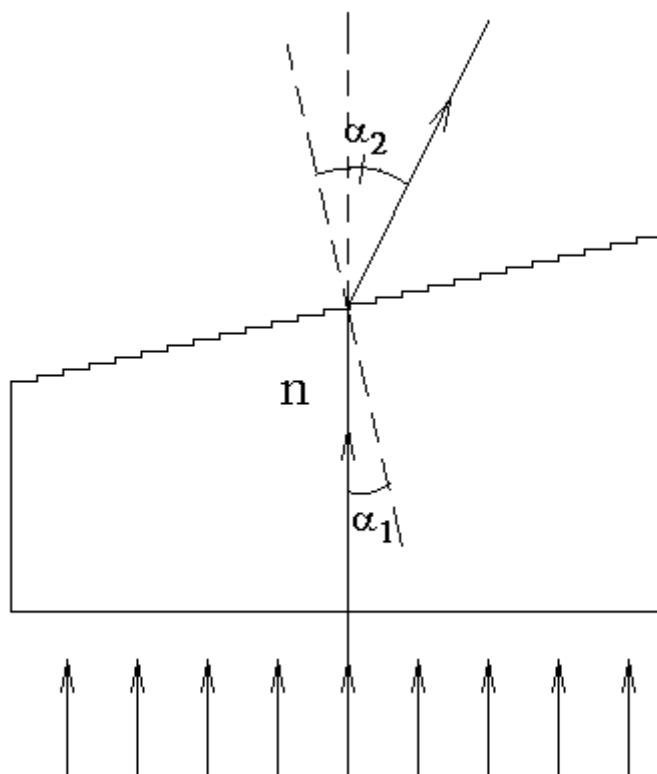


Рис. 7.

Будем считать, что свет, проходя через любые две соседние ступеньки, имеет разность фаз на выходе (в горизонтальной плоскости) равную $\frac{\pi}{4}$. То есть

$h(n-1) = \frac{\lambda}{8}$, где h — высота ступеньки. Тогда в горизонтальной плоскости

после прохождения этой пластинки мы получим вторичные источники света такие же, как в плоскости за V-антеннами.

Пусть ступеньки имеют горизонтальный размер в несколько раз меньший, чем длина волны света. Тогда верхняя грань рассматриваемой пластинки будет казаться плоской и без ступенек, так как они очень малы. Верхняя грань наклонена. Свет падает на нее под углом α_1 , тогда по закону преломления $n \cdot \sin(\alpha_1) = \sin(\alpha_2)$.

В результате прохождения пластинки свет поворачивает на угол $\alpha_2 - \alpha_1$. Аналогично должен вести себя свет после прохождения плоскости V-антенн. Этот поворот света на угол $\theta_{t,\perp} + \theta_i = \alpha_2 - \alpha_1$ — это и есть аномальное преломление света.

Если бы между соседними ступеньками сдвиг фаз был не $\frac{\pi}{4}$, а например, $\frac{\pi}{10}$, то на восьми ступеньках получится сдвиг фаз $\frac{4\pi}{5}$ вместо 2π . Если от 7-й к 8-й ступеньке сдвиг фаз при этом будет таким, чтобы между 0-й и 8-й оказался сдвиг фаз 2π , то каждая 8-я ступенька будет большей величины. Получится фазовая дифракционная решетка с периодом 8 ступенек.

Нулевой порядок дифракции этой решетки совпадет по направлению со светом падающей волны, а первый порядок совпадет с рассмотренным ранее преломленным светом.

На такой фазовой дифракционной решетке в прошедшем свете будут наблюдаться разные порядки дифракции.

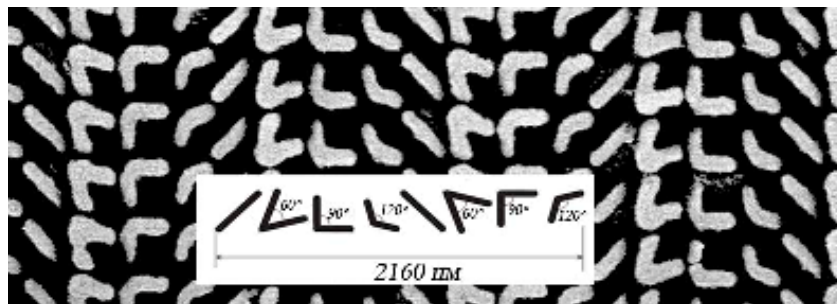
Решетка, рассмотренная нами на рисунке — это фазовая дифракционная решетка с профилированным штрихом, профиль которой подобран так, что в прошедшем свете наблюдается только первый порядок дифракции и никаких других порядков.

Итак, мы приходим к окончательному выводу, что рассмотренная на рис.4 система V-антенн представляет собой фазовую дифракционную решетку с профилированным штрихом. Причем форма профиля решетки обеспечивает наличие только первого порядка дифракции с подавлением всех других порядков: нулевого, минус первого, второго и т.д.

1. Yu N., Genevet P., Kats M.A., Aieta F., Tetienne J-P., Capasso F., Gaburro Z. Science. 2011. V.334. P.333.

2. Экспериментальное исследование углового и частотного спектра дифракции лазерного импульса на плоской периодической наноструктуре из золотых V-антенн.

М. В. Балабас, Е. А. Ефремова, А. Ю. Иванов, А.И. Канцеров, И. Р. Крылов*, Е. Б. Пелюхова,
Ю. В. Петров, У. В. Прохорова, Р. В. Силаев, О. Ю. Третьяк, А. А. Шимко.



Естественный подход к описанию действия такой структуры на световую волну состоит в рассмотрении анизотропной профилированной дифракционной решетки [7, 10, 11]. В то же время, как было показано в работах [3, 4], основные особенности в виде аномальных направлений отраженной и преломленной волн могут быть описаны посредством обобщенного закона Снеллиуса. С этой целью авторы [3, 4] использовали модифицированный принцип Ферма, учитывающий изменение фазы $\frac{\pi}{4}$, вносимое последовательными элементами субволнового масштаба. Такое действие планарной структуры эквивалентно оптическому клину. Этот подход удобен для рассмотрения отклика массивов со сложной геометрией [3]. Однако он не учитывает появления дополнительных отраженных и преломленных лучей, которые адекватно описываются волновой оптикой.

Направления и поляризация дифракционных максимумов

Оптимальные условия для наблюдения аномально преломленного и отраженного лучей первого порядка дифракции в соответствии с работами [3, 4] реализуются, когда поляризация падающего света либо параллельна, либо перпендикулярна столбцам наноструктуры (Рис. 1). В обоих случаях поляризация наблюдаемых нами аномально преломленного и отраженного лучей первого порядка дифракции была ортогональна поляризации падающего на структуру луча, что также соответствует указанным работам. В

* igor-krylov@yandex.ru

нашем эксперименте мощность аномально преломленного и отраженного лучей составляла примерно 1% от мощности падающего света. Во втором порядке дифракции поляризация совпадала с поляризацией падающего луча. Наблюдаемая мощность излучения во втором порядке дифракции еще примерно вдвое меньше.

В предложенной оптической схеме (Рис. 2) и при указанных выше параметрах эксперимента лучи других порядков дифракции, кроме приведенных на рисунке, в соответствии с формулами (1), не имеют разрешенных направлений. Исследуемая нами наноструктура, как профилированная решетка, подавляет отрицательные порядки дифракции. Чтобы экспериментально проверить их отсутствие мы поменяли направление падающего луча так, что угол падения изменил знак. При этом в формулах (1) отрицательные порядки соответствуют изменению знака всех величин. Лучи отрицательных порядков дифракции экспериментально не наблюдались. Учитывая чувствительность визуализатора, можно утверждать, что эти лучи как минимум на порядок слабее по мощности, чем соответствующие лучи положительных порядков. Это экспериментально подтверждает, что наноструктура представляет собой аналог именно профилированной дифракционной решетки.

В работах [3, 4] свет падал на наноструктуру со стороны подложки. При облучении со стороны наноструктуры мы получили ту же дифракционную картину в отраженном и преломленном свете.

Объяснение того факта, почему в четных порядках дифракции наблюдается одна поляризация, а в нечетных — другая.

Предположим, что наноструктура из золотых V-антенн рассчитана и изготовлена идеально. Идеальной наноструктура окажется только для одной длины волны света. Покажем, что для света других длин волн будет наблюдаться чередование ортогональных поляризаций в зависимости от номера порядка дифракции.

Для большей наглядности будем обсуждать только прошедшее наноструктуру излучение и на время забудем об отраженном излучении.

Оказывается, что действие наноструктуры на прошедшее излучение можно представить, как последовательное воздействие трех оптических

элементов: фазовой пластинки, оптического клина и дифракционной решетки с периодом вдвое меньшим периода наноструктуры. Причем оптический клин присутствует только для поляризации ортогональной к поляризации падающего на наноструктуру света.

Первый элемент — фазовая пластинка. И действительно, каждая V-антенна имеет ось симметрии. Эта ось направлена под 45^0 как по отношению к направлению столбцов V-антенн (см. рис. 1), так и по отношению к направлению строк V-антенн. Для одних V-антенн ось симметрии наклонена от направления столбцов в одну сторону, для других — в другую. В результате этого каждая половина периода наноструктуры от одной вырожденной в отрезок V-антенны до другой, наклоненной в другую сторону представляет собой фазовую пластинку с взаимно ортогональными главными диэлектрическими осями, направленными вдоль этих вырожденных в отрезок V-антенн.

Рассмотрим падающий свет линейно поляризованный, например, вдоль столбцов наноструктуры. Вектор E этого света нужно мысленно разложить на две поляризации по двум ортогональным направлениям главных диэлектрических осей, каждое из которых составляет угол 45^0 с исходным направлением вектора E . Эти две поляризации по-разному взаимодействуют с V-антеннами. В результате излучение V-антенн в этих двух поляризациях будет сдвинуто по фазе. В таком случае при сложении излученных V-антеннами волн появится поляризация ортогональная к поляризации падающего света, что характерно для фазовых пластинок.

Второй элемент — оптический клин. Размеры и форма V-антенн рассчитаны таким образом, чтобы для поляризации ортогональной к поляризации падающего света в излучении V-антенн наблюдался строго линейный сдвиг фазы при переходе от одного столбца V-антенн к соседнему столбцу. Это полностью эквивалентно оптическому клину. Для излучения антенн в поляризации падающего света такой оптический клин отсутствует. По крайней мере, два столбца V-антенн, отстоящие на $\frac{d}{2}$, излучают в одинаковой фазе в поляризации падающего света, если направление этой поляризации совпадает с направлением столбцов V-антенн или с направлением строк V-антенн.

Третий элемент — дифракционная решетка с половинным периодом.

Одинаковая амплитуда и линейность фазового сдвига излучения V-антенн строго соблюдается только для одной длины волны, так как фазовый сдвиг между током излучающей антенны и световым полем, раскачивающим этот ток, определяется соотношением длины антенны и длины волны света.

Если период наноструктуры обозначить, как d , то при неоптимальной длине волны света сохраниться одинаковая амплитуда излучения столбцов V-антенн, отстоящих друг от друга на $\frac{d}{2}$ (форма этих V-антенн отличается отражением относительно горизонтальной оси (см. рис. 1), это преобразование не меняет излучательной способности для вертикальной (см. рис. 1) или горизонтальной поляризации). Причем фазовый сдвиг излучения пары столбцов, отстоящих друг от друга на $\frac{d}{2}$, в поляризации ортогональной падающему свету сохраниться равным π , несмотря на неоптимальность длины волны света (это хорошо видно для излучающих антенн в виде прямых палок).

Эти две особенности (одинаковая амплитуда и фазовый сдвиг π от столбцов, отстоящих на $\frac{d}{2}$) определяют период дифракционной решетки равный $\frac{d}{2}$, если фазовый сдвиг π отдельно учесть оптическим клином.

Рассмотрим только прошедший свет. В отраженном свете все будет аналогично. Мысленно вычтем линейный фазовый сдвиг в ортогональной поляризации излучаемого наноструктурой света. Это эквивалентно тому, как если бы свет сначала проходил через оптический клин, а затем через какую-то другую наноструктуру, которая будет обладать следующими двумя свойствами. Во-первых, столбцы, отстоящие на $\frac{d}{2}$, будут излучать свет одинаковой амплитуды. Во-вторых, столбцы, отстоящие на $\frac{d}{2}$, будут излучать свет одинаковой фазы вместо света со сдвигом фазы π , так как линейный сдвиг фазы воображаемого оптического клина (2π на периоде d) означает сдвиг фазы π на длине $\frac{d}{2}$. То есть, если в исходной наноструктуре столбцы, отстоящие на $\frac{d}{2}$, излучали со сдвигом фазы π , то новая вымышленная наноструктура, расположенная после оптического клина, будет иметь нулевой фазовый сдвиг для этих двух столбцов. В результате окажется, что новая наноструктура имеет период $\frac{d}{2}$ вместо периода d .

Если вдвое уменьшить период дифракционной решетки, то угловые расстояния между дифракционными максимумами вдвое увеличатся. Дифракционный максимум с номером N для решетки с периодом $\frac{d}{2}$ будет

точно совпадать по направлению с дифракционным максимумом с номером $2N$ для решетки с периодом d . То есть дифракционные максимумы новой вымышленной наноструктуры будут совпадать с четными дифракционными максимумами наноструктуры с периодом d . Вымышленный оптический клин сдвигает номер дифракционного порядка на (-1) , так как первый (и единственный для оптимальной длины волны света) порядок реальной наноструктуры в ортогональной поляризации света превращается в нулевой порядок для новой вымышленной наноструктуры. Этот сдвиг номера порядка дифракции на (-1) приводит к тому, что излучение, проходя вымышленный оптический клин и вымышленную новую наноструктуру, идет не в направлении четных порядков дифракции реальной наноструктуры, а в направлении нечетных порядков дифракции.

Таким образом, мы объяснили появление света в нечетных порядках дифракции в поляризации ортогональной к падающему свету и объяснили отсутствие этой ортогональной поляризации в четных порядках дифракции.

Покажем теперь, что в поляризации падающего света, наоборот, должны наблюдаться четные и только четные порядки дифракции.

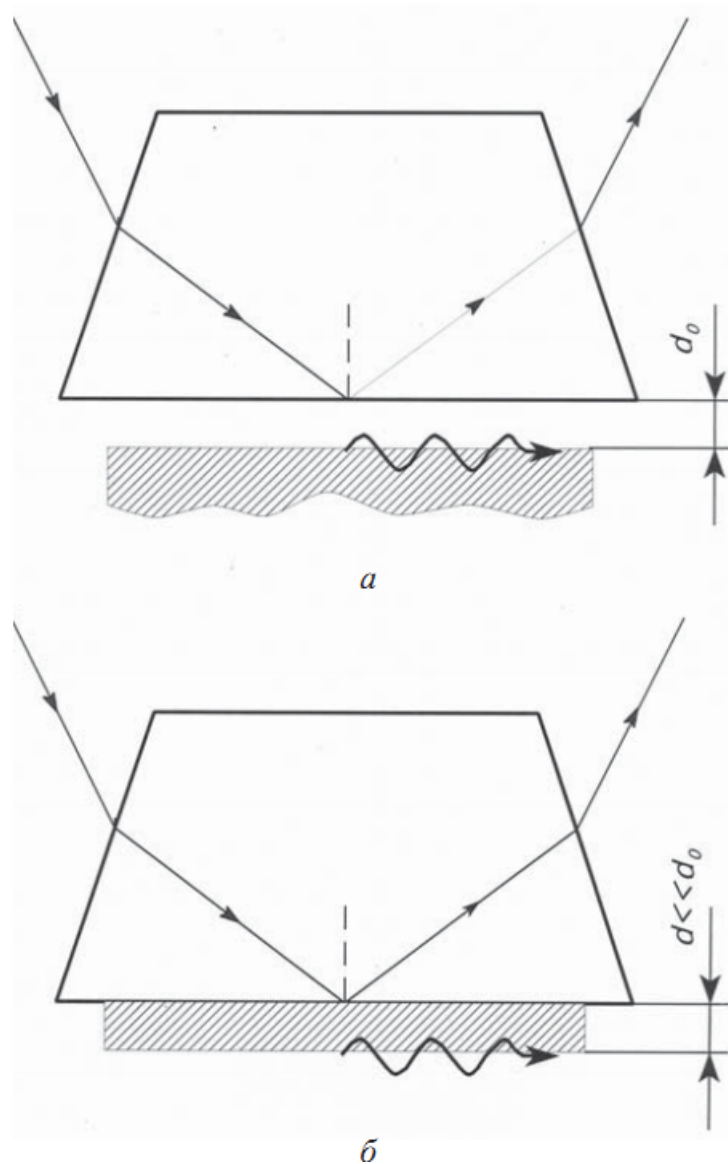
Заметим, что исходная наноструктура обладает тем свойством, что V-антенны, отстоящие друг от друга на $\frac{d}{2}$ половину периода, отличаются друг от друга отражением от горизонтальной оси (на рис.1), проходящей через середину строки V-антенн. При такой операции отражения V-антенн способность V-антенн излучать свет, поляризованный вдоль столбцов, не изменяется. Тем более не изменяется способность излучать свет, поляризованный вдоль строк V-антенн. Это означает, что V-антенны, отстоящие друг от друга на $\frac{d}{2}$, будут излучать свет одинаковой амплитуды и одинаковой фазы. То есть, для света, излученного V-антеннами в поляризации падающего света, период наноструктуры равен $\frac{d}{2}$, а не d . Как уже обсуждалось выше, дифракционные максимумы решетки с периодом $\frac{d}{2}$, будут вдвое реже по углам дифракции по сравнению с решеткой с периодом d . То есть, дифракционный максимум с номером N для решетки с периодом $\frac{d}{2}$ будет точно совпадать по направлению с дифракционным максимумом с номером $2N$ для решетки с периодом d . Соответственно, свет в поляризации падающего света будет наблюдаться в четных и только в четных порядках дифракции исходной наноструктуры. Что и требовалось объяснить.

Поверхностный плазмонный резонанс.

Поверхностный плазмон называют еще поверхностным плазмоном-поляритоном. Плазмон — квант колебаний поверхностного заряда. Поляритон — составная квазичастица колебаний светового поля и еще чего-нибудь, в данном случае — поверхностного заряда.

В вопросе распространения света в слое с высоким показателем преломления за пределами слоя амплитуда света экспоненциально убывает при удалении от светоносного слоя. Оказывается, возможна аналогичная ситуация, когда амплитуда света экспоненциально убывает в обе стороны, но самого светоносного слоя нет вовсе. Представьте себе свет, который в результате полного внутреннего отражения не может выйти из металла в вакуум. Пытаясь выйти из металла в вакуум, свет возвращается обратно в металл, но, отражаясь от металла, свет возвращается обратно в вакуум. В результате вдоль границы металл-вакуум бежит поверхностная волна, амплитуда которой экспоненциально убывает при удалении от границы раздела в любую сторону. При удалении от границы в металл амплитуда убывает по координате на порядок быстрее, чем при удалении от границы в вакуум.

Поверхностный плазмонный резонанс образуется в результате возбуждения поверхностной волны на границы металл-вакуум или на границе металл-диэлектрик. На нижеследующем рисунке изображены два способа получения поверхностной волны при нарушении полного внутреннего отражения света.



На рисунке изображены два метода возбуждения поверхностного плазмона: геометрия Отто и геометрия Кречмана. Заштрихованный объем — это металл.

Поверхностная волна возбуждается, когда горизонтальная составляющая волнового вектора падающей волны совпадает с величиной волнового вектора поверхностной волны.

Изменяя угол падения света на горизонтальную границу, можно заметить, что мощность отраженной волны для некоторого угла падения света резонансно уменьшается. Это вызвано тем, что возникает поверхностная волна, которая заметно поглощается в металле и уменьшает энергию отраженной световой волны.

Другой способ возбуждения поверхностной волны состоит в том, что световую волну направляют на металлическую дифракционную решетку под

таким углом, что один из порядков дифракции оказывается направленным вдоль поверхности решетки. По поверхности бежит поверхностная волна.

Получим условие поверхностной волны на границе металла и диэлектрика.

Возьмем ротор от уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

подставим в него

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

и монохроматическое поле $\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$

и получим

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\left(\vec{E}_0\right)\right) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \vec{E}_0 = 0.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде амплитуды монохроматической волны, волна бежит вдоль границы двух сред, где ε_1 — комплексная величина (для металла) и ε_2 — вещественная величина для диэлектрика. Будем считать, что волна поляризована в плоскости падения, а амплитуда волны экспоненциально убывает при удалении от границы в любую сторону.

Уравнение $\operatorname{div}(\vec{D}) = 0$ для монохроматической волны примет следующий вид $(\vec{k}, \vec{D}) = 0$.

Направим ось Z перпендикулярно границе раздела сред, а ось X — в плоскости падения волны. Для p -поляризации световой волны отличны от нуля только X и Z компоненты напряженности электрического поля. Тогда из $(\vec{k}, \vec{D}) = 0$ получим

$$k_x \tilde{D}_x + k_z \tilde{D}_z = 0.$$

С каждой стороны от границы раздела сред $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, и получаем

$$k_{1x} \tilde{E}_{1x} + k_{1z} \tilde{E}_{1z} = 0, \quad (1)$$

$$k_{2x} \tilde{E}_{2x} + k_{2z} \tilde{E}_{2z} = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим эти уравнения совместно с граничными условиями

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{E}_{1x} - \tilde{E}_{2x} = 0 \quad (3)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 \tilde{E}_{1z} - \varepsilon_2 \tilde{E}_{2z} = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим систему из этих 4-х уравнений с четырьмя неизвестными:

$\tilde{E}_{1x}, \tilde{E}_{1z}, \tilde{E}_{2x}, \tilde{E}_{2z}$ в матричном виде

$$\begin{pmatrix} k_{1x} & k_{1z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{2x} & k_{2z} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_{1x} \\ \tilde{E}_{1z} \\ \tilde{E}_{2x} \\ \tilde{E}_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отличные от нуля решения возможны только в том случае, когда определитель матрицы равен нулю

$$-k_{1x}k_{2z}\varepsilon_1 + k_{1z}k_{2x}\varepsilon_2 = 0.$$

Циклическая пространственная частота с двух сторон границы должна быть одинаковой

$$k_{1x} = k_{2x} = k_x, \text{ тогда}$$

$$\varepsilon_1 k_{2z} - \varepsilon_2 k_{1z} = 0. \quad (6)$$

Волновое число пропорционально показателю преломления

$$k_{1x}^2 + k_{1z}^2 = (nk_0)^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}, \text{ где } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{ — волновое число в вакууме.}$$

С учетом $k_{1x} = k_x$ и $n^2 = \varepsilon\mu \approx \varepsilon$ получаем

$$k_x^2 + k_{1z}^2 = \varepsilon_1 k_0^2 \quad (7)$$

аналогично

$$k_x^2 + k_{2z}^2 = \varepsilon_2 k_0^2. \quad (8)$$

Рассмотрим уравнения (6, 7, 8), как уравнения относительно неизвестных k_x, k_{1z}, k_{2z} и получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_x^2 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} k_0^2 \\ k_{1z}^2 = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} k_0^2, \\ k_{2z}^2 = \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} k_0^2 \end{array} \right. \quad \text{где } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{ — волновое число в вакууме.}$$

В металле на частоте ниже плазменной частоты показатель преломления — мнимая величина, а диэлектрическая проницаемость $\varepsilon \approx n^2 < 0$ —

отрицательная величина, так как $\varepsilon = n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$. В таком случае для металла

$\varepsilon_1 < 0$, а для диэлектрика $\varepsilon_2 > 0$. Распространение поверхностной волны вдоль

оси X возможно только при вещественном k_x и положительном k_x^2 . С учетом первого равенства системы для этого необходимо $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 0$.

То есть условие возможности существования поверхностных волн можно записать в виде

$$\begin{cases} \varepsilon_1 < 0 \\ \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 0 \end{cases} .$$

Далее свойства поверхностных плазмонов-поляритонов смотрим, например, по книге:

Новотный и Хехт, Основы нанооптики.pdf, начиная со страницы 353.