

Дисперсионные соотношения Крамерса — Кронига.

Сигнал на выходе устройства не может появиться раньше, чем на его входе.

Пусть электрическое (или оптическое) устройство имеет комплексный коэффициент передачи $\tilde{K}(\omega)$, где

$$\tilde{U}_{вых\omega} = \tilde{K}(\omega) \cdot \tilde{U}_{вх\omega}.$$

Пусть $U_{вх}(t) = \delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Тогда

$$\tilde{U}_{вх\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \cdot U(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \cdot \delta(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega \cdot 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi}$$

Тогда

$$\tilde{U}_{вых\omega} = \tilde{K}(\omega) \cdot \tilde{U}_{вх\omega} = \frac{1}{2\pi} \tilde{K}(\omega) \quad \Rightarrow$$

$$U_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot \tilde{U}_{вых\omega} \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot \tilde{K}(\omega) \cdot d\omega.$$

Сигнал на выходе схемы не может появиться раньше, чем сигнал появляется на входе, тогда $U_{вых}(t) = 0$ при $t < 0$, так как $U_{вх}(t) = \delta(t) = 0$ при $t < 0$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot \tilde{K}(\omega) \cdot d\omega = 0 \quad \underline{\text{при } t < 0}.$$

Амплитудно-частотная $K_0(\omega)$ и фазо-частотная $\varphi(\omega)$ характеристики любой схемы связаны приведенным выше интегральным соотношением для комплексного коэффициента передачи $\tilde{K}(\omega) = K_0(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$.

В оптике коэффициент передачи тонкого слоя $\tilde{K}(\omega)$ определяется комплексной поляризуемостью молекул $\tilde{\alpha}(\omega)$, то есть коэффициентом пропорциональности между комплексной амплитудой \tilde{p}_ω дипольного момента молекулы и комплексной амплитудой \tilde{E}_ω напряженности светового поля:

$$\tilde{p}_\omega = \tilde{\alpha}(\omega) \cdot \tilde{E}_\omega, \text{ где } \tilde{\alpha}(\omega) = \alpha' + i\alpha''.$$

$$\text{Пусть } E(t) = \varepsilon_0 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \varepsilon_0 \frac{e^{i\omega t}}{2} + \varepsilon_0 \frac{e^{-i\omega t}}{2}.$$

Для каждого из двух слагаемых поля $E(t)$ будет своё слагаемое \tilde{p}_ω :

$$\begin{aligned} p(t) &= \tilde{\alpha}(-\omega) \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{e^{i\omega t}}{2} \right) + \tilde{\alpha}(\omega) \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{e^{-i\omega t}}{2} \right) = \\ &= (\alpha'(-\omega) + i\alpha''(-\omega)) \frac{\varepsilon_0}{2} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + \end{aligned}$$

$$+(\alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega)) \frac{\varepsilon_0}{2} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)).$$

$$\text{Im}(p(t)) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\alpha'(-\omega) - \alpha'(\omega)) \cdot \sin(\omega t) + (\alpha''(-\omega) + \alpha''(\omega)) \cdot \cos(\omega t) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha'(-\omega) = \alpha'(\omega) \\ \alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega) \end{cases}.$$

Крамерс (1927) и Крониг (1926) рассматривали интеграл $\int \frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$, в

котором интегрирование ведется по замкнутому контуру на комплексной плоскости. Интегрирование ведется в положительном направлении вдоль всей вещественной оси, и контур замыкается по полуокружности в верхней полуплоскости.

Крамерс и Крониг, используя условие $\tilde{\alpha}(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$, независимо друг от друга взяли интеграл по вычетам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = \frac{1}{2} 2\pi i \cdot \text{Res}_{\omega=\omega_0} \left(\frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega - \omega_0} \right) = \pi i \tilde{\alpha}(\omega_0)$$

и получили, что

$$\begin{cases} \alpha'(\omega_0) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega \alpha''(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \\ \alpha''(\omega_0) = -\frac{2\omega_0}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\alpha'(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \end{cases}.$$

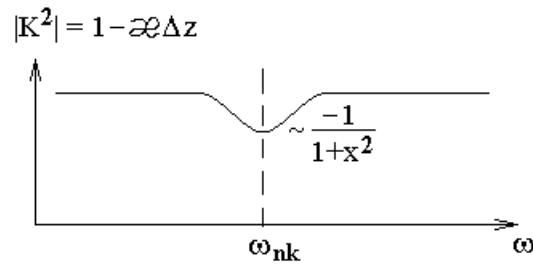
Здесь $\mathcal{P} \int$ — интеграл в смысле главного значения. Эти интегральные связи между $\alpha'(\omega)$ и $\alpha''(\omega)$ означают, что интегрально связаны зависимость коэффициента поглощения от частоты света и зависимость показателя преломления от частоты света. Для оптически тонкого слоя:

$$\begin{cases} \alpha' \sim \chi' \sim (n - n_0) \\ \alpha'' \sim \chi'' \sim \kappa \end{cases}.$$

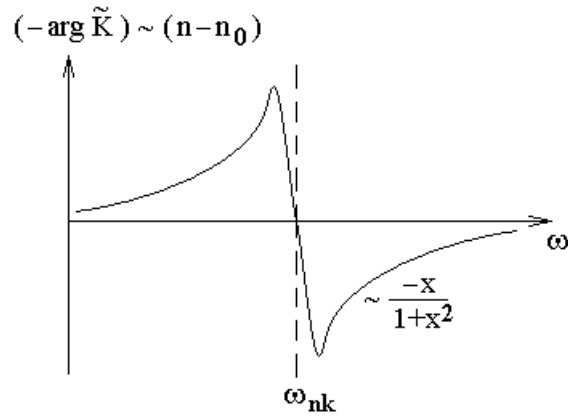
В свою очередь от добавки к показателю преломления и от коэффициента поглощения зависит комплексный коэффициент передачи оптически тонкого слоя $\tilde{K}(\omega)$:

$$\begin{cases} |\tilde{K}^2| = 1 - \kappa \cdot \Delta z \\ -\arg(\tilde{K}) \sim (n - n_0) \end{cases}.$$

Так если амплитудный коэффициент пропускания имеет провал лоренцевской формы

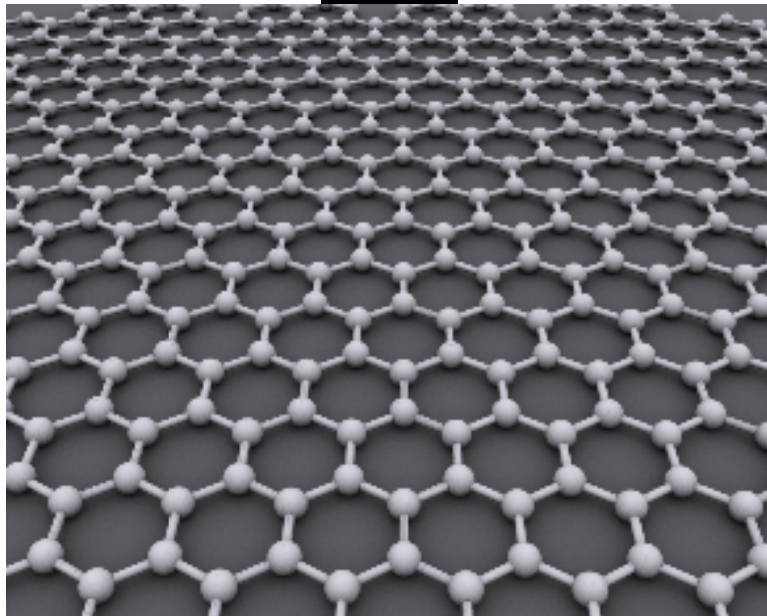


то показатель преломления имеет добавку в виде всплеска дисперсионной формы:

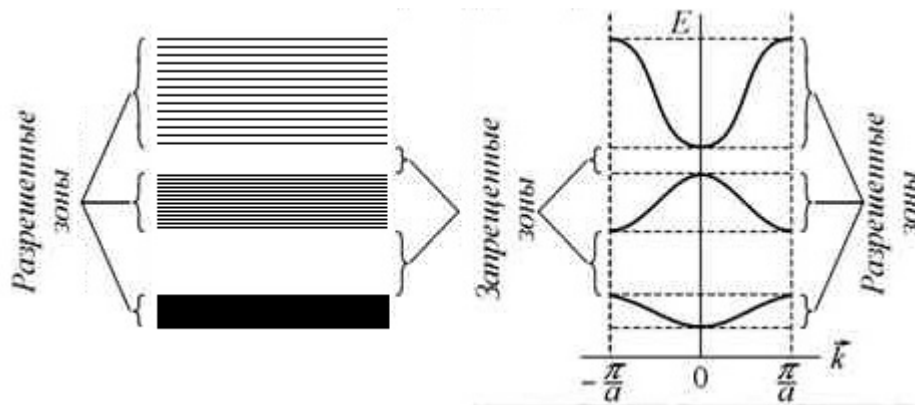


Если форма провала не совсем лоренцевская, то и форма всплеска не совсем дисперсионная.

Графен.



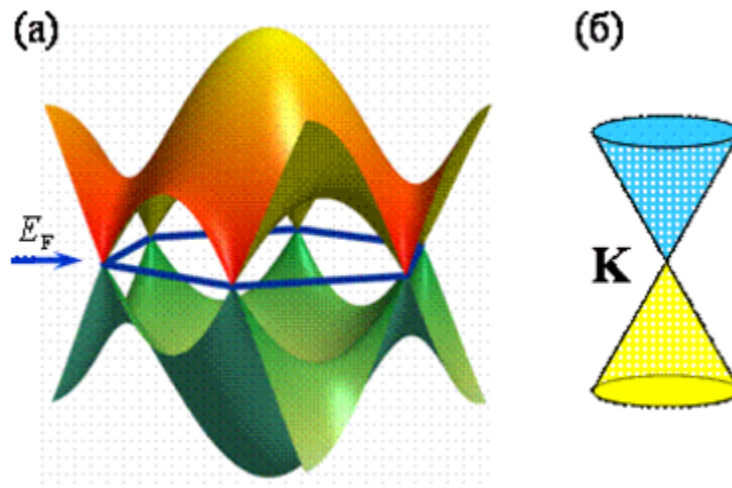
Автор: AlexanderAIUS - собственная работа, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11294534>



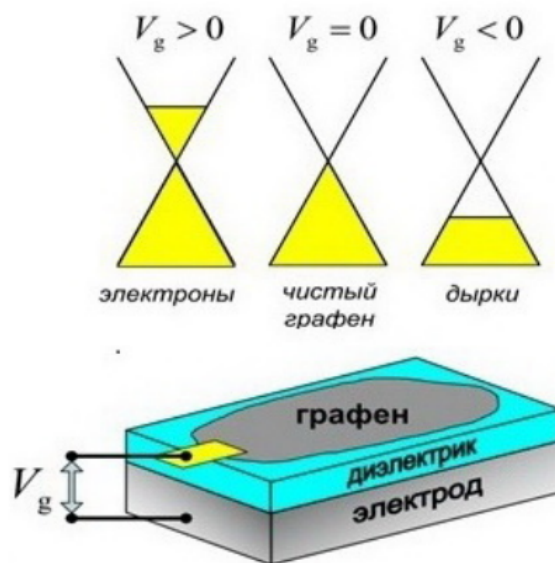
http://dssp.petsu.ru/p/tutorial/fft/Part9/part9_2_1.htm

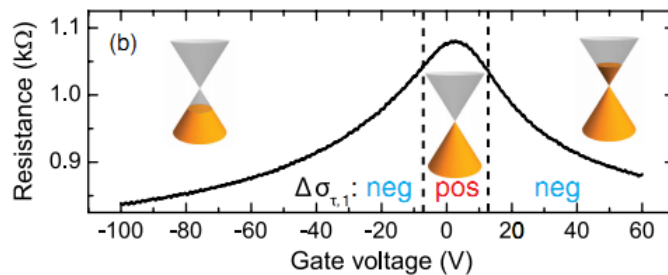
$$\lambda = \frac{h}{mV} = \frac{h}{p} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{h}{2\pi} = \hbar k \quad E_{\text{кин}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Наиболее вероятное состояние в валентной зоне — дырки с нулевой скоростью. Тогда в валентной зоне зависимость энергии от импульса электрона — парабола ветвями вниз.

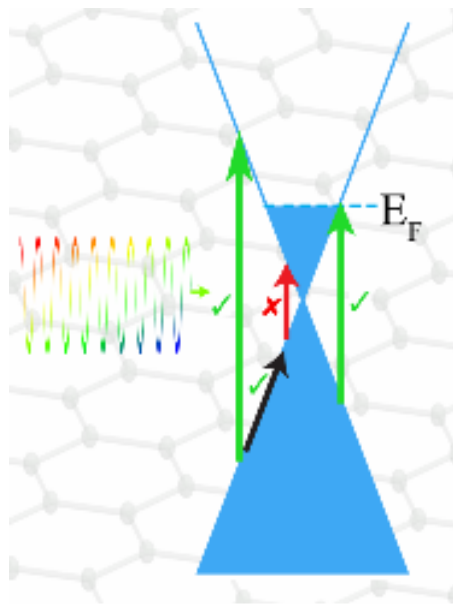


Линейная зависимость энергии от импульса.





A. J. Frenzel, C. H. Lui, Y. C. Shin, J. Kong, and N. Gedik. Semiconducting-to-Metallic Photoconductivity Crossover and Temperature-Dependent Drude Weight in Graphene // Physical Review Letters. 2014. V.113. Iss.5. Paper 056602. P.1-6.



Naresh Kumar Emani, Alexander V. Kildishev, Vladimir M. Shalaev, and Alexandra Boltasseva. Graphene: A Dynamic Platform for Electrical Control of Plasmonic Resonance // Nanophotonics. 2015. V.4. P.214–223.

Из рисунка видно, что фотоны с малой энергией (красная стрелка) не могут поглотиться без изменения импульса электрона, а фотоны с большой энергией (две зелёных стрелки) поглощаются без изменения импульса электрона. Дело в том, что импульс фотона очень мал, поэтому изменение импульса электрона трудно кому-то передать. Можно передать изменение импульса электрона в тепловое движение, но вероятность этого велика только при условии $h\nu \leq k_B T$, то есть в терагерцовом диапазоне частот электромагнитного поля.

Изменяя энергию Ферми графена, можно включать или выключать поглощение света на частоте ближнего инфракрасного диапазона с длинами волн порядка микрона. Если сделать на прозрачной поверхности узор наноплазмонных антенн из графена, то изменяя энергию Ферми, можно включать или выключать взаимодействие света с этой структурой наноплазмонных антенн.

Другой подход состоит в использовании графена, просто как очень тонкого проводника.

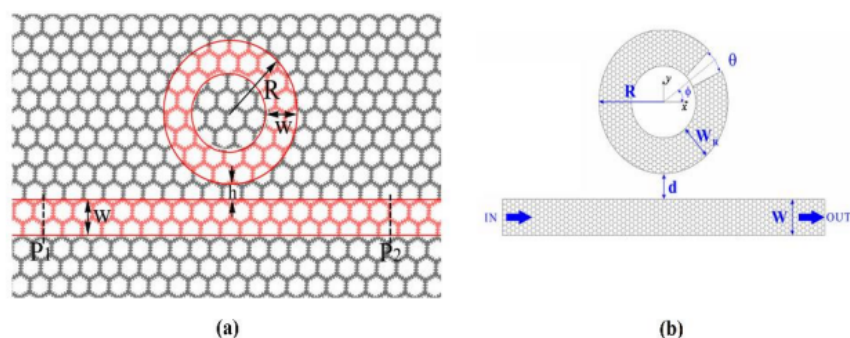


Fig. 2. (a) Band-stop filter constructed by a graphene ring resonator and a strip [65] (Reproduced by permission of AIP Publishing), (b) Tunable filter composed by a graphene strip waveguide and a graphene split ring resonator with split width corresponding to a sector angle θ [66] (Reprinted by permission from Springer Nature)

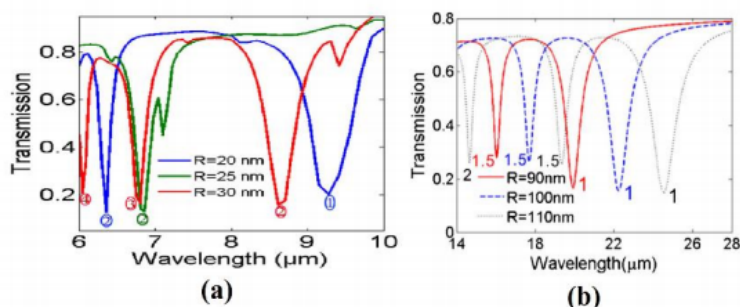


Fig. 3. (a) Transmission spectrum as a function of wavelength for the various radius ($R=20,25,30\text{ nm}$) and the width of the strip is supposed $w=10\text{ nm}$ [65] (Reproduced by permission of AIP Publishing), (b) Transmission spectrum as a function of wavelength for the various radius ($R=90,100,110\text{ nm}$); other geometrical parameters are supposed $w=w_R=50\text{ nm}$, $d=20\text{ nm}$,

$$\varphi = 90^\circ, \theta = 10^\circ \text{ [66] (Reproduced by permission from Springer Nature)}$$

- [65] H.-J. Li, L.-L. Wang, J.-Q. Liu, Z.-R. Huang, B. Sun, and X. Zhai, "Investigation of the graphene based planar plasmonic filters," *Applied Physics Letters*, vol. 103, p. 211104, 2013.
- [66] Y. Gao, G. Ren, B. Zhu, L. Huang, H. Li, B. Yin, et al., "Tunable plasmonic filter based on graphene split-ring," *Plasmonics*, vol. 11, pp. 291-296, 2016.

Здесь световое поле возбуждает токи в полоске графена, эти токи возбуждают резонансные колебания в кольце из графена. В результате на резонансных частотах этого кольца свет интенсивно поглощается, в коэффициенте пропускания наблюдаются провалы.

Еще один подход в использовании графена состоит в том, что резонансная частота графеновых нанополосок зависит от энергии Ферми μ_c . Дело в том, что если увеличить энергию Ферми, то увеличится \vec{k} , увеличится импульс и увеличится скорость электронов участвующих в колебаниях. Увеличение скорости электронов эквивалентно уменьшению их массы и приводит к увеличению резонансной частоты $\omega_0 \sim \sqrt{\mu_c}$ при неизменных размерах нанополоски. В системе СИ для полоски графена перпендикулярной напряженности электрического поля световой волны $\omega_0 \approx \sqrt{\frac{e^2 \mu_c}{4\hbar^2 \epsilon_0 \epsilon w}}$, где w — ширина полоски, ϵ — диэлектрическая проницаемость окружающей среды.

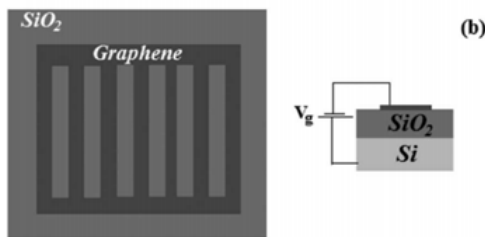
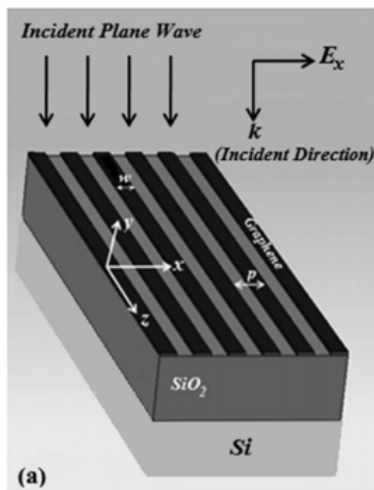


Fig. 2. (a) Schematic representation of proposed graphene-based filter and (b) top- and side-view illustration of a typical microribbon array.

H. Nasari and M. S. Abrishamian

Vol. 31, No. 7 / July 2014 / J. Opt. Soc. Am. B 1693

Здесь резонансная частота провала в коэффициенте пропускания увеличивается с ростом напряжения на графене.

H. Nasari and M. S. Abrishamian

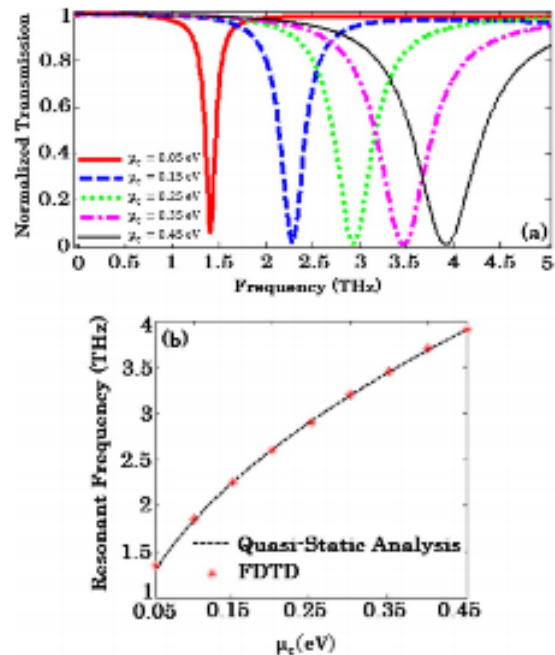
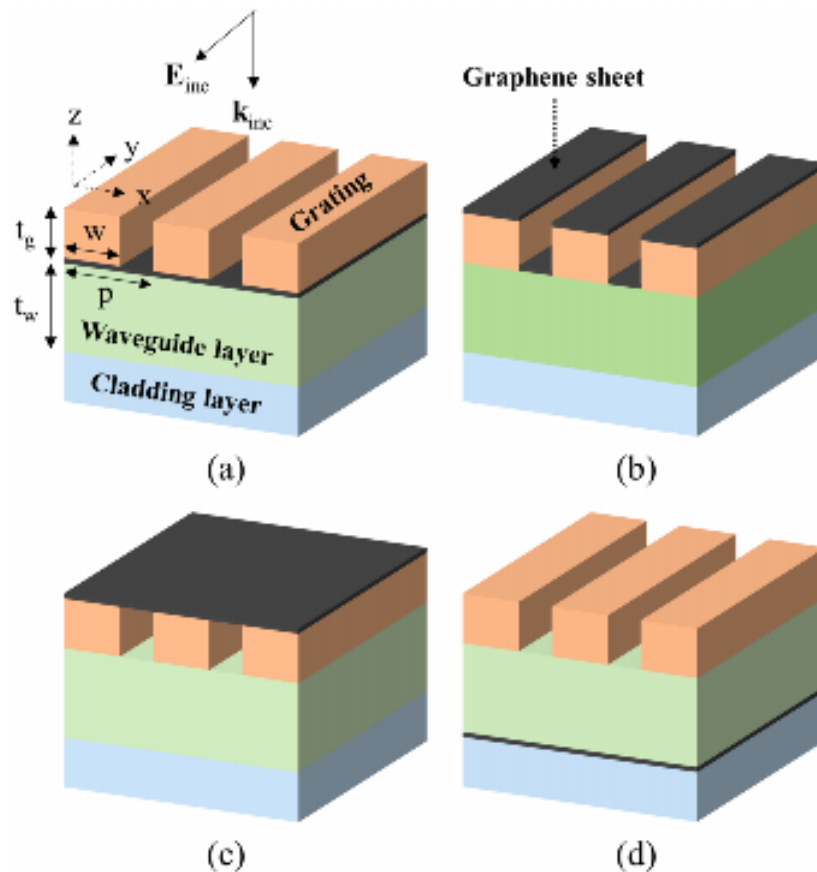


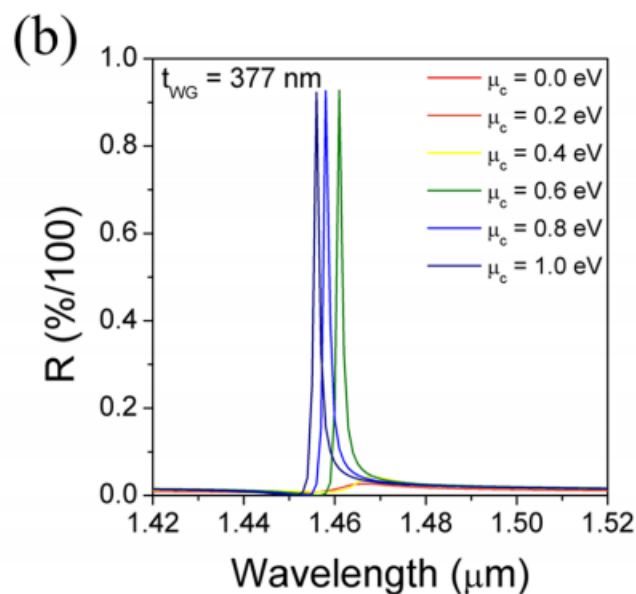
Fig. 4. (a) Transmission spectra for an array of graphene microribbons with $w = 7.5 \mu\text{m}$ and $p = 15 \mu\text{m}$ for different values of chemical potential. (b) Comparison of resonant frequency computed by FDTD and Eq. (13).

Hwa-Seub Lee^{1,2}, Joon Young Kwak¹, Tae-Yeon Seong², Gyu Weon Hwang¹, Won Mok Kim¹, inho Kim¹ & Kyeong-Seok Lee¹. Optimization of tunable guided-mode resonance filter based on refractive index modulation of graphene // Scientific Reports. 2019. 9:19951. <https://doi.org/10.1038/s41598-019-56194-4>.

Еще один подход в использовании графена состоит в его использовании на границе волноводного слоя.



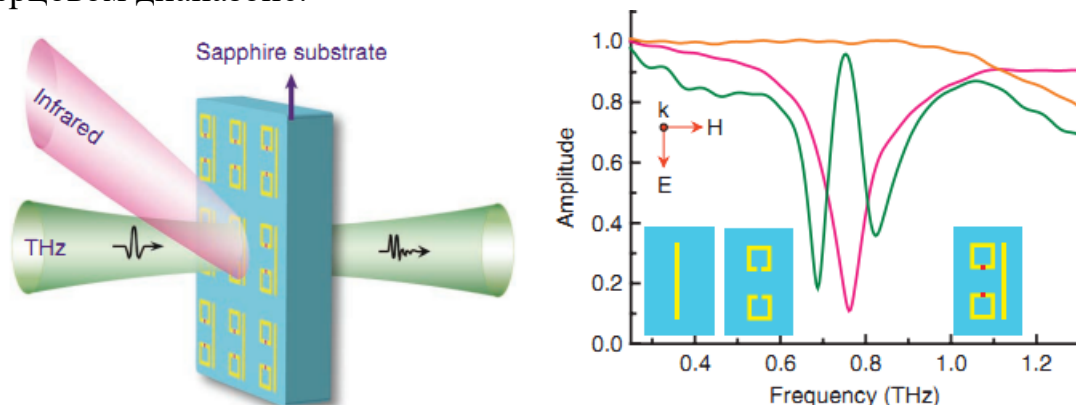
Для варианта d, low-index contrast SiO₂ grating (based on Configuration D):



Jianqiang Gu¹, Ranjan Singh, Xiaojun Liu, Xueqian Zhang, Yingfang Ma¹, Shuang Zhang, Stefan A. Maier, Zhen Tian, Abul K. Azad, Hou-Tong Chen, Antoinette J. Taylor, Jiaguang Han & Weili Zhang. "Active control of electromagnetically induced transparency analogue in terahertz metamaterials". Nature Communications. 2012. | 3:1151 | DoI: 10.1038/ncomms2153 | www.nature.com/naturecommunications.

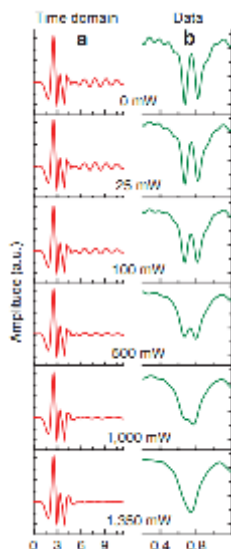
В некоторых случаях полупроводники могут использоваться аналогично графену.

Под действием ИК излучения полупроводниковые вставки становятся проводящими, изменяя резонансные частоты наноструктуры. Наноструктура используется, как управляемый фильтр для пропускания излучения в терагерцовом диапазоне.



Наноструктура состоит из полосок алюминиевой фольги на сапфировой подложке. Алюминиевые проводники содержат узкие зазоры заполненные полупроводником Si. Наноструктуру освещают достаточно мощным (до 1.3 Вт/см^2) ИК излучением, под действием которого полупроводниковые зазоры становятся проводящими. ИК излучение изменяет резонансные частоты наноструктуры.

На правом рисунке амплитудно-частотная характеристика пропускания. Рыжая кривая — для наноструктуры из вертикальных проводящих полосок, красная — для разомкнутых колец, зеленая — для полосок и колец с полупроводниковыми зазорами.



На рисунке слева красная экспериментальная временная в пикосекундах и зеленая рассчитанная через преобразование Фурье частотная в терагерцах зависимость для электромагнитного импульса прошедшего наноструктуру при разных значениях мощности управляющего ИК излучения.

Квантовые интерференционные эффекты, как раздел электромагнитно индуцированной прозрачности (ЕИТ) позволяют создавать индуцированное узкое окно прозрачности в полосе поглощения, которое может быть использовано, например, для замедления (остановки) света. Затруднения вызваны требованиями высокой стабильности газовых лазеров и требованиями к низкой температуре окружающей среды. Затруднения ограничивают применение квантовых интерференционных эффектов. Поэтому есть более дешевые заменители — плазмонные аналоги на метаматериалах в виде полосок (cut wires CWs), сеток (fishnets) и незамкнутых колец (split-ring resonators SRRs).

Различные модуляционные схемы для управления свойствами терагерцовых метаматериалов:

24. Chen, H. -T. et al. A metamaterial solid-state terahertz phase modulator. *Nat. Photon.* 3, 148–151 (2009).
25. Kleine-Ostmann, T., Dawson, P., Pierz, K., Hein, G. & Koch, M. Room-temperature operation of an electrically driven terahertz modulator. *Appl. Phys. Lett.* 84, 3555–3557 (2004).
26. Padilla, W. J., Taylor, A. J., Highstrete, C., Lee, M. & Averitt, R. D. Dynamical electric and magnetic metamaterial response at terahertz frequencies. *Phys. Rev. Lett.* 96, 107401 (2006).
27. Chen, H. -T. et al. Experimental demonstration of frequency-agile terahertz metamaterials. *Nat. Photon.* 2, 295–298 (2008).
28. Chen, H. T. et al. Ultrafast optical switching of terahertz metamaterials fabricated on ErAs/GaAs nanoisland superlattices. *Opt. Lett.* 32, 1620–1623 (2007).
29. Singh, R. et al. Optical tuning and ultrafast dynamics of high-temperature superconducting terahertz metamaterials. *Nanophotonics* 1, 117–123 (2012).

и оптических метаматериалов:

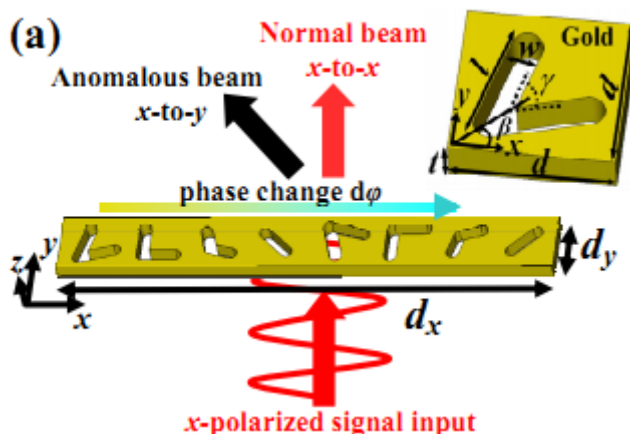
30. Gu, J. et al. An active hybrid plasmonic metamaterial. *Opt. Mater. Express* 1, 31–37 (2012).
31. Lapine, M. et al. Structural tunability in metamaterials. *Appl. Phys. Lett.* 95, 084105 (2009).

В этой статье впервые рассматривается активное управление терагерцовыми волнами электромагнитно индуцированной прозрачностью (ЕИТ) при комнатной температуре путем внедрения оптически активных силиконовых (Si) островков в функциональное устройство для терагерцовых волн.

В статье проведены расчет, моделирование и эксперимент увеличения проводимости Si островков путем их фотовозбуждения, что может быть применено в управлении задержкой и отражения терагерцовых волн в беспроводной коммуникации.

Когерентный контроль.

Jinhui Shi, Xu Fang, Edward T. F. Rogers, Eric Plum, Kevin F. MacDonald, and Nikolay I. Zheludev. Coherent control of Snell's law at metasurfaces // Optics Express. 2014. V.22. No.17. P.21051-21060.



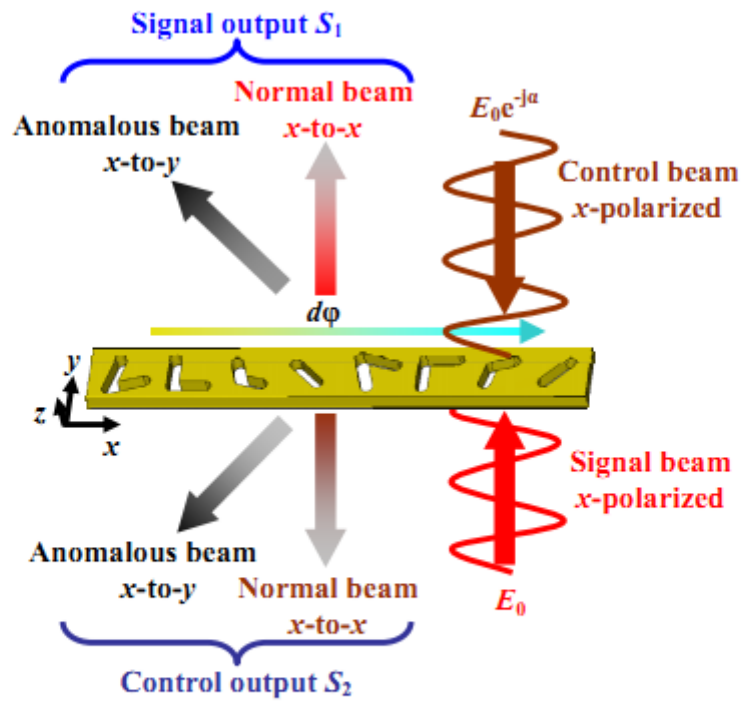


Fig. 2. Schematic of coherent control of the V-shaped slot antennas metasurface using coherent signal and control beams. Both input beams are x -polarized with a phase difference α .