Реакция двухуровневой среды на поле монохроматической волны.

Рассмотрим решение дифференциальных уравнений для матрицы плотности двухуровневой среды в приближении вращающейся волны:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} + \gamma_1\rho_{11} = \gamma_1\rho_{11}^0 - i\dfrac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}\right) \\ \dot{\rho}_{22} + \gamma_2\rho_{22} = \gamma_2\rho_{22}^0 + i\dfrac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}\right) \\ \dot{\tilde{\rho}}_{21} - i\Omega\tilde{\rho}_{21} + \Gamma\tilde{\rho}_{21} = i\dfrac{R}{2}\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right) \end{cases} \qquad (3.7)$$

Будем искать решение в стационарном случае, когда $\dot{\rho}_{11} = \dot{\rho}_{22} = \dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$.

Из третьего уравнения системы (3.7) при условии $\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$ получим:

$$\tilde{\rho}_{21} = i\frac{R}{2}\cdot\frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega} \qquad (3.8).$$

Здесь $\Omega = \omega' - \omega_{21} = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты света в системе отсчета молекулы относительно частоты поглощающего перехода.

Найдем $\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}$, чтобы подставить это выражение в два первых уравнения системы (3.7).

$$\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21} = \tilde{\rho}_{21}^* - \tilde{\rho}_{21} = \left(-i\frac{R}{2}\cdot\frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma + i\Omega}\right) - \left(i\frac{R}{2}\cdot\frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega}\right) = -iR\frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma^2 + \Omega^2}\Gamma$$

В два первых уравнения системы входит выражение

$$i\frac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}\right) = \frac{R^2}{2\Gamma}\cdot\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right)\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right),$$

где $\mathscr{L}(x) \equiv \dfrac{1}{1 + x^2}$ — так называемый лоренцевский контур.

Подставим его и получим

$$\begin{cases} \rho_{11} = \rho_{11}^0 - \dfrac{R^2}{2\gamma_1\Gamma}\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right)\cdot\mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \rho_{22} = \rho_{22}^0 + \dfrac{R^2}{2\gamma_2\Gamma}\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right)\cdot\mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases} \qquad (3.9)$$

Возьмем разность этих двух уравнений и разрешим полученное уравнение относительно разности $\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right)$. В результате получим решение

$$\rho_{11} - \rho_{22} = \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right)\cdot\left(1 - \frac{G}{1 + G}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1 + G}}\right)\right) \qquad (3.10),$$

где $G \equiv \dfrac{R^2}{2\Gamma}\cdot\left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2}\right)$ — фактор насыщения или безразмерная мощность световой волны.

Окончательное решение для переменных ρ_{11} и ρ_{22} получается при подстановке выражения (3.10) в правую часть уравнений системы (3.9). Подставляем и получаем решение для диагональных элементов матрицы плотности:

$$\begin{cases} \rho_{11} = \rho_{11}^0 - \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right) \cdot \dfrac{\gamma_2 G}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \left(1 - \dfrac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \rho_{22} = \rho_{22}^0 + \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right) \cdot \dfrac{\gamma_1 G}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \left(1 - \dfrac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases} \quad (3.11).$$

Подставляем (3.10) в (3.8) и получаем решение для недиагонального элемента матрицы плотности:

$$\tilde{\rho}_{21} = i \cdot \sqrt{\frac{\Gamma \gamma_1 \gamma_2 G}{2(\gamma_1 + \gamma_2)}} \cdot \frac{\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0}{\Gamma - i\Omega} \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right).$$

Проанализируем полученное решение для элементов матрицы плотности. Для анализа решения удобно ввести два новых понятия: заселенность уровня энергии и комплексная поляризация среды.

<u>Провал и пик Беннета.</u>

$N_1 \equiv N_0 \rho_{11}$ — заселенность или населенность 1-го уровня энергии,

$N_2 \equiv N_0 \rho_{22}$ — заселенность 2-го уровня энергии.

Здесь N_0 — концентрация молекул или число молекул в единице объема.

Заселенность уровня энергии — это как бы концентрация молекул на этом уровне. Только как бы концентрация, так как в световом поле каждая молекула одновременно находится на двух уровнях энергии, связанных световым полем.

Введем обозначение для распределения концентрации по лучевой скорости молекул $N_{0_{V_z}}$.

Для любой физической величины F связь ее и ее распределения F_{V_z} по лучевой скорости имеет следующий вид:

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{V_z} dV_z .$$

Аналогично для концентрации молекул N_0:

$$N_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{0_{V_z}} dV_z ,$$

где $N_{0_{V_z}} dV_z$ — концентрация молекул, лучевые скорости которых лежат в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$.

Распределение молекул по лучевой скорости при термодинамическом равновесии — это распределение Максвелла по проекции скорости:

$N_{0_{V_z}} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} \cdot e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$, где $U = \sqrt{\frac{2k_Б T}{m}}$ — наиболее вероятная скорость.

$N_{1_{V_z}} \equiv N_{0_{V_z}} \rho_{11}(V_z)$ — распределение заселенности нижнего уровня энергии по лучевой скорости молекул,

$N_{2_{V_z}} \equiv N_{0_{V_z}} \rho_{22}(V_z)$ — распределение заселенности верхнего уровня энергии по лучевой скорости молекул.

Здесь и в будущем будем различать распределение любой физической величины F по лучевой скорости F_{V_z} и функцию величины F от лучевой скорости $F(V_z)$. Для распределения F_{V_z} интеграл от него по лучевой скорости равен самой величине F, то есть $F = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{V_z} dV_z$, а для функции $F(V_z)$ нет никакого смысла интегрировать ее по лучевой скорости.

Умножим равенство (3.11) на распределение концентрации молекул по проекции скорости на луч $N_{0_{V_z}} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} \cdot e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$ и получим

$$\begin{cases} N_{1_{V_z}} = N^0_{1_{V_z}} - \left(N^0_{1_{V_z}} - N^0_{2_{V_z}}\right) \cdot \frac{\gamma_2 G}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ N_{2_{V_z}} = N^0_{2_{V_z}} + \left(N^0_{1_{V_z}} - N^0_{2_{V_z}}\right) \cdot \frac{\gamma_1 G}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases}.$$

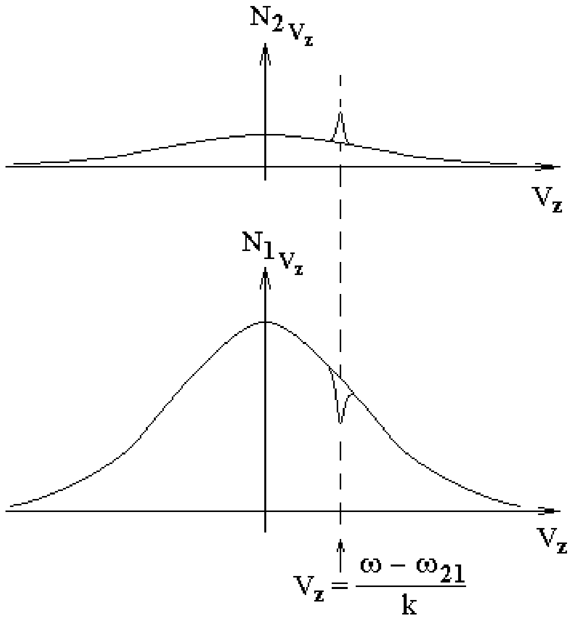
Откуда получим

$$\begin{cases} N_{1_{V_z}} - N^0_{1_{V_z}} = -\left(N^0_{1_{V_z}} - N^0_{2_{V_z}}\right) \cdot \frac{\gamma_2 G}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ N_{2_{V_z}} - N^0_{2_{V_z}} = \left(N^0_{1_{V_z}} - N^0_{2_{V_z}}\right) \cdot \frac{\gamma_1 G}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases}.$$

Здесь зависимость ($N_{1_{V_z}} - N^0_{1_{V_z}}$) от V_z называют провалом Беннета, а зависимость ($N_{2_{V_z}} - N^0_{2_{V_z}}$) от V_z называют пиком Беннета.

$N^0_{1_{V_z}} - N^0_{2_{V_z}} = \left(N^0_1 - N^0_2\right) \cdot \frac{N_{0_{V_z}}}{N_0} = \left(\rho^0_{11} - \rho^0_{22}\right) \cdot N_{0_{V_z}}$, где $N_{0_{V_z}} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} \cdot e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$ — распределение Максвелла по проекции скорости молекул.

Рассмотрим две эти зависимости при условии слабого светового поля $G << 1$, где фактор насыщения $G \equiv \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right)$, и при условии неоднородного уширения спектральной линии, когда доплеровская ширина спектральной линии гораздо больше лоренцевской ширины спектральной линии каждой молекулы $kU >> \Gamma$.



В случае неоднородного уширения спектральной линии $N_{0_{V_z}} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} \cdot e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$ — широкий доплеровский контур в зависимости от лучевой скорости V_z, а $\mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) = \frac{\Gamma^2}{\Omega^2 + \Gamma^2}$ — узкий лоренцевский контур в зависимости от расстройки $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ частоты светового поля ω от частоты перехода ω_{21}.

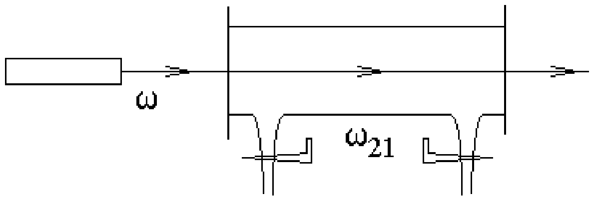
Изменение частоты $\Delta\Omega$ и изменение лучевой скорости ΔV_z пропорциональны друг другу $\Delta\Omega = -k\Delta V_z$. Тогда kU — полуширина доплеровского контура в шкале частот на уровне $\frac{1}{e}$, Γ — полуширина на полувысоте для лоренцевского контура.

Качественно объяснить появление провала и пика Беннета можно следующим образом. Без светового поля в соответствии с распределением Больцмана на нижнем уровне энергии больше молекул, чем на верхнем уровне. Световое поле перебрасывает молекулы с нижнего уровня энергии на верхний, а с верхнего — на нижний, уменьшая разность заселенностей этих уровней. Световое поле уменьшает заселенность нижнего уровня энергии и увеличивает заселенность верхнего уровня, но делает это только для молекул с одним значением лучевой скорости. Значение лучевой скорости определяется тем, что сдвинутая эффектом Доплера частота света в системе отсчета молекулы должна совпадать с частотой поглощающего перехода. Уменьшение для этой лучевой скорости разности заселенностей и приводит к появлению провала Беннета в распределении заселенности нижнего уровня по лучевой скорости и к появлению пика Беннета в распределении заселенности верхнего уровня.

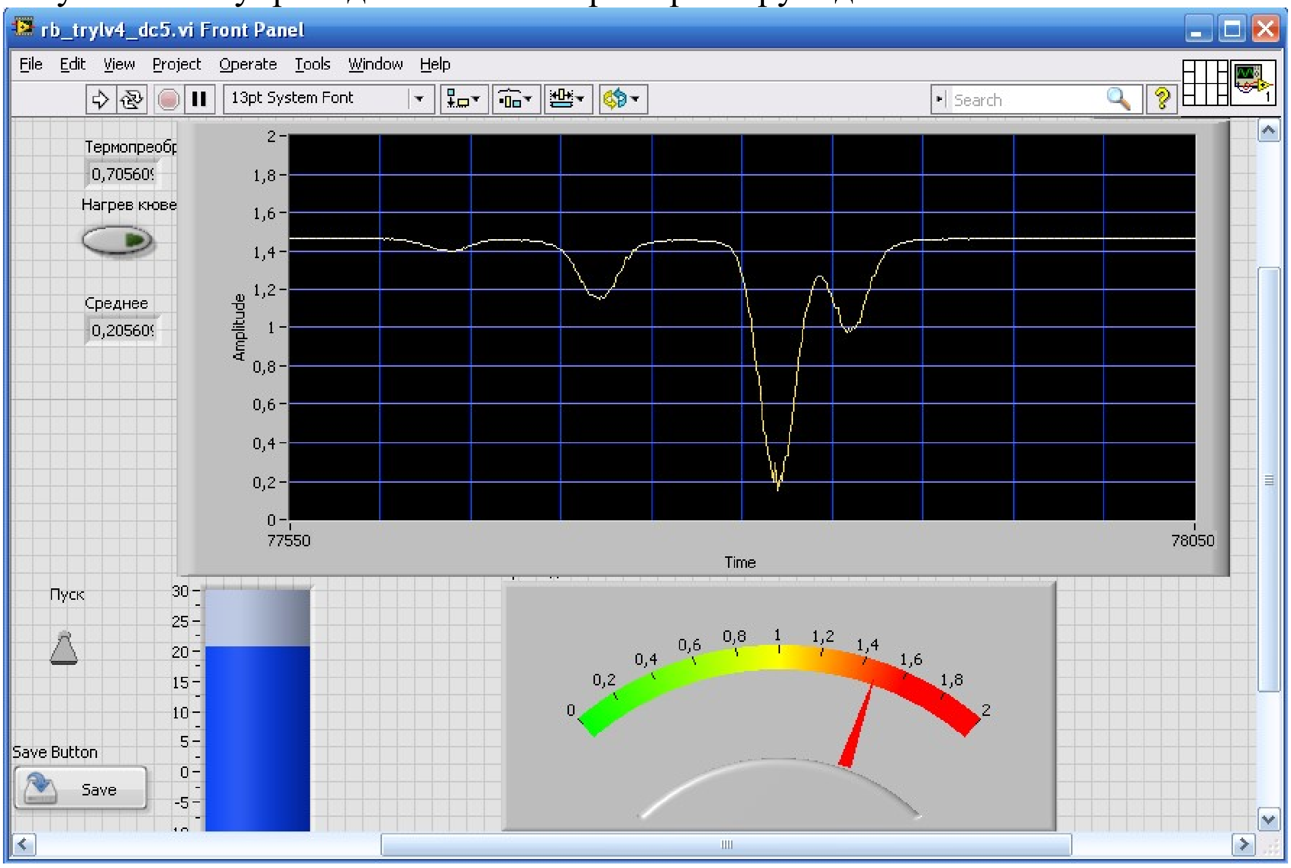
Короче, свет переводит молекулы вверх-вниз для такого значения V_z, что $\omega - kV_z = \omega_{21}$.

Светоиндуцированный дрейф. Разделение изотопов.

Рассмотрим следующую оптическую схему. Пусть монохроматическое излучение лазера с частотой ω проходит через кювету с газовой смесью двух изотопов.



Линии поглощения изотопов несколько сдвинуты по частоте друг относительно друга. Так на следующем рисунке приведена изотопическая тонкая структура D_2 линии рубидия 780 нм. Две средние компоненты принадлежат изотопу Rb^{85}, две крайние — изотопу Rb^{87}. Линии уширены эффектом Доплера. Лабораторная работа по наблюдению поглощения излучения полупроводникового лазера парами рубидия.



Пусть частота излучения лазера лежит в пределах доплеровского контура линии поглощения одного из двух изотопов с центром на частоте ω_{21}.

Пусть для определенности частота лазера выше частоты поглощающего перехода $\omega > \omega_{21}$. Тогда $V_z = \dfrac{\omega - \omega_{21}}{k} > 0$. Это означает, что излучение лазера поглощают молекулы, летящие в направлении луча. Поглощая свет и переходя в возбужденное состояние, молекулы разбухают, так как в возбужденном состоянии молекула имеет бо̀льшие размеры, чем в невозмущенном состоянии. Большие молекулы чаще сталкиваются, так как имеют бо̀льшую площадь поперечного сечения.

Рассмотрим два набора молекул одного и того же изотопа, но с противоположными значениями лучевой скорости. Пусть один из двух наборов молекул с лучевой скоростью $V_z > 0$ взаимодействует со светом. Молекулы из этого набора летят вдоль лазерного луча, чаще сталкиваются и поэтому сильнее тормозятся. Следовательно, центр масс двух наборов молекул начинает смещаться навстречу лазерному лучу.

В результате поглощающий свет изотоп скапливается около окна кюветы, расположенного ближе к лазеру. Второй изотоп выдавливается из этой области в ту часть кюветы, которая расположена дальше от лазера.

Через один из кранов, расположенных в концах кюветы, можно выпустить обогащенный одним из двух изотопов газ в предварительно откачанный до вакуума сосуд.

<u>Поляризация среды.</u>

Поляризация — это электрический дипольный момент единицы объема.

При взаимодействии среды со световым полем в молекулах среды возникает дипольный момент, осциллирующий на частоте световой волны. Именно этот дипольный момент и связанная с ним поляризация среды на частоте световой волны нас и будут интересовать

$\vec{P} \equiv \dfrac{d\vec{p}}{dV}$, где $\vec{P}$ — поляризация среды, $\vec{p} \equiv \sum\limits_i q_i \vec{r}_i$ — дипольный момент системы зарядов $\{q_i\}$, расположенных в точках с радиус-векторами $\{\vec{r}_i\}$.

$\vec{P} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}_{V_z} dV_z$, где $\vec{P}_{V_z}$ — распределение поляризации по лучевой скорости молекул, $\vec{P}_{V_z} dV_z$ — поляризация молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$.

$\vec{P} = N_0 \cdot \langle \vec{p} \rangle$, где N_0 — концентрация молекул, $\langle \vec{p} \rangle$ — среднее значение дипольного момента одной молекулы.

Рассмотрим поляризацию молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$:

$\vec{P}_{V_z} dV_z = N_{0_{V_z}} dV_z \cdot \langle \vec{p}(V_z) \rangle$, где $N_{0_{V_z}} dV_z$ — концентрация молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$, $\langle \vec{p}(V_z) \rangle$ — средний дипольный момент этих молекул, который может зависеть от лучевой скорости V_z.

Для любой физической величины $\langle F \rangle = Sp\left(\hat{\rho}\hat{F}\right) = \sum\limits_{n,k} \rho_{kn} F_{nk}$. Тогда

$$\langle p \rangle = Sp\left(\hat{\rho}\hat{p}\right) = \sum_{n,k} \rho_{kn} p_{nk} = \rho_{12} p_{21} + \rho_{21} p_{12} = p\left(\rho_{12} + \rho_{21}\right) = 2p\,\mathrm{Re}\left(\rho_{21}\right),$$

где $\langle p \rangle$ — среднее значение проекции дипольного момента молекулы на единичный вектор поляризации световой волны, p в правой части равенства — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны (дипольный момент перехода).

При взаимодействии двухуровневой среды с монохроматическим световым полем в приближении вращающейся волны недиагональный элемент матрицы плотности имеет вид:

$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21} e^{-i\varphi}$, где $\varphi \equiv \omega t - kz - \varphi_0$ — фаза световой волны, $\tilde{\rho}_{21} = i\dfrac{R}{2} \cdot \dfrac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega}$.

Тогда

$$\langle p \rangle = p\left(\rho_{12} + \rho_{21}\right) = p\left(\overset{*}{\rho}_{21} + \rho_{21}\right) = 2p\,\mathrm{Re}\left(i\frac{R}{2} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega} e^{-i\varphi}\right) =$$

$$= pR\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right)\frac{\Gamma \cdot \sin(\varphi) - \Omega \cdot \cos(\varphi)}{\Gamma^2 + \Omega^2}.$$

Тогда

$$P_{V_z} = N_{0_{V_z}} \langle p \rangle = N_{0_{V_z}} pR\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)\frac{\Gamma \cdot \sin(\varphi) - \Omega \cdot \cos(\varphi)}{\Gamma^2 + \Omega^2},$$

где
$$\begin{cases} \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \\ R = \dfrac{p\mathcal{E}_0}{\hbar} \\ \varphi = -\varphi_0 + \omega t - kz \\ N_{0_{V_z}} = \dfrac{N_0}{\sqrt{\pi} U} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \\ p = \int \psi_1^* \left(\vec{p}, \vec{e}\right) \psi_2 dV \\ \vec{p} = \sum\limits_i q_i \vec{r}_i \\ \vec{E}(t) = \mathcal{E}_0 \vec{e} \cdot \cos(\varphi) \end{cases}.$$

Получается, что поляризация среды пропорциональна амплитуде светового поля $P \sim \mathcal{E}_0$, но сдвинута по фазе относительно осцилляций светового поля.

Для описания такой поляризации вводят в рассмотрение комплексную восприимчивость среды.

Сначала введем комплексную напряженность $\tilde{E}(t)$ световой волны, соответствующую вещественной напряженности $E(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\varphi)$:

$\tilde{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cdot e^{-i\varphi}$.

Тогда $E(t) = \operatorname{Re}\left(\tilde{E}(t)\right) = \dfrac{\tilde{E}(t)}{2} + к.с.$

$\tilde{P} = \tilde{\chi}\tilde{E}(t)$ — определение комплексной восприимчивости $\tilde{\chi}$, как коэффициента пропорциональности между комплексной поляризацией $\tilde{P}$ и комплексной напряженностью $\tilde{E}(t)$. В системе СИ: $\tilde{P} = \varepsilon_0 \tilde{\chi}\tilde{E}(t)$.

Выразим комплексное число $\tilde{\chi}$ через два вещественных числа χ' и χ'':

$\tilde{\chi} = \chi' + i\chi''$.

Выразим вещественную поляризацию среды, осциллирующую с частотой световой волны, через вещественную и мнимую части комплексной восприимчивости среды.

$$P = \operatorname{Re}\left(\tilde{P}\right) = \frac{\tilde{P}}{2} + к.с. = \frac{\tilde{\chi}\tilde{E}(t)}{2} + к.с. = \frac{1}{2}(\chi' + i\chi'')\mathcal{E}_0 e^{-i\varphi} + к.с. =$$

$$= \frac{1}{2}(\chi' + i\chi'')\mathcal{E}_0\left(\cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)\right) + к.с. = \mathcal{E}_0\left(\chi'\cos(\varphi) + \chi''\sin(\varphi)\right).$$

$P = \mathcal{E}_0\left(\chi'\cos(\varphi) + \chi''\sin(\varphi)\right)$.

Соответствующее равенство для распределений по лучевой скорости:

$P_{V_z} = \mathcal{E}_0\left(\chi'_{V_z}\cos(\varphi) + \chi''_{V_z}\sin(\varphi)\right)$.

Сравним это выражение с полученным ранее выражением

$$P_{V_z} = N_{0_{V_z}} pR\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)\frac{\Gamma \cdot \sin(\varphi) - \Omega \cdot \cos(\varphi)}{\Gamma^2 + \Omega^2}.$$

Оба равенства справедливы для любого момента времени и, следовательно, для любой фазы φ. В таком случае можно приравнять коэффициенты при косинусе φ и при синусе φ этих двух выражений для P_{V_z}.

Тогда с учетом $R = \dfrac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ получим

$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\dfrac{p^2 N_{0_{V_z}}\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = \dfrac{p^2 N_{0_{V_z}}\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases}.$$

Здесь

$$\begin{cases} \rho_{11}(V_z)-\rho_{22}(V_z)=\left(\rho_{11}^0-\rho_{22}^0\right)\cdot\left(1-\dfrac{G}{1+G}\cdot\mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \\ G=\dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(\dfrac{1}{\gamma_1}+\dfrac{1}{\gamma_2}\right) \\ R=\dfrac{p\mathscr{E}_0}{\hbar} \\ \Omega=\omega-kV_z-\omega_{21} \end{cases}.$$

Следующее равенство

$$P=P_c\cos(\varphi)+P_s\sin(\varphi)$$

является определением синфазной P_c и квадратурной P_s амплитуд поляризации среды. Тогда с учетом равенства $P=\mathscr{E}_0\left(\chi'\cos(\varphi)+\chi''\sin(\varphi)\right)$ следует

$$\begin{cases} P_c=\chi'\mathscr{E}_0 \\ P_s=\chi''\mathscr{E}_0 \end{cases}.$$

В системе СИ: $\begin{cases} P_c=\varepsilon_0\chi'\mathscr{E}_0 \\ P_s=\varepsilon_0\chi''\mathscr{E}_0 \end{cases}.$

<u>**Обратное воздействие среды на волну. Дифференциальные уравнения для амплитуды поля или укороченные волновые уравнения.**</u>

Излучение диполей среды изменяет проходящую мимо световую волну. Это изменение проявляется в поглощении света и изменении скорости распространения света в среде. Изменения в проходящей световой волне возникают в результате интерференции света переизлученного диполями молекул и проходящей мимо световой волны. В этом и состоит обратное воздействие среды на волну.

Вместо сложения волн излучения диполей, изменение световой волны в среде можно вывести из системы уравнений Максвелла. Что мы и сделаем.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}+\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

без свободных зарядов $\rho=0$ и без токов проводимости $\vec{j}=0$.

Тогда получим:

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=0 \\ rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}.$$

Рассмотрим два выражения для ротора ротора $\vec{E}$.

С одной стороны, возьмем ротор от второго уравнения и подставим в правую часть вместо ротора $\vec{B}$ выражение для ротора $\vec{H}$ из четвертого уравнения. Напомним, что в оптике $\mu=1$ и $\vec{B}=\vec{H}$. Тогда получим

$$rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}rot\left(\vec{B}\right)=-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}.$$

А с другой стороны по правилу "бац минус цап":

$$rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right)-\vec{E}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right).$$

Здесь $\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right)=div\left(\vec{E}\right)=\frac{1}{\varepsilon}div\left(\vec{D}\right)=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}=0$, тогда

$$rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=-\vec{E}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)=-\Delta\vec{E}.$$

Объединяя оба выражения для $rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)$, получим:

$$\Delta\vec{E}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}=0 \qquad (4.1)$$

Если подставить $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ в уравнение (4.1), то получим волновое уравнение для поля $\vec{E}$:

$$\Delta\vec{E}-\frac{\varepsilon}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \qquad (4.2)$$

Сравнивая уравнение (4.2) с определением волнового уравнения в математике:

$$\Delta\vec{E}-\frac{1}{V^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0,$$

получим величину фазовой скорости световых волн $V=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$. Сравнивая величину скорости с определением показателя преломления $V=\frac{c}{n}$, получаем

$n=\sqrt{\varepsilon}$, точнее $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$, но в оптике $\mu\approx 1$.

Тогда $\varepsilon=n^2$ => $\vec{D}=n^2\vec{E}$

Векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ можно связать друг с другом и несколько иначе:

$\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}$, где $\vec{P}$ — поляризация среды или объемная плотность дипольного момента, осциллирующая на световой частоте.

Разобьем поляризацию на два слагаемых $\vec{P}=\vec{P}_{нерез}+\vec{P}_{рез}$:

$\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}_{нерез}+4\pi\vec{P}_{рез}$.

Здесь $\vec{P}_{рез}$ — резонансный вклад в поляризацию или вклад двух уровней энергии, связанных переходом близким по частоте к частоте света; $\vec{P}_{нерез}$ — нерезонансный вклад в поляризацию среды от остальных переходов.

По аналогии с формулой $\vec{D}=n^2\vec{E}$ запишем $\vec{E}+4\pi\vec{P}_{нерез}=n_0^2\vec{E}$, где n_0 — показатель преломления среды вдали от рассматриваемой линии поглощения. Тогда

$\vec{D}=n_0^2\vec{E}+4\pi\vec{P}_{рез}$.

Чтобы не тянуть за собой во всех формулах нижний индекс у поляризации будем во всех последующих формулах вместо $\vec{P}_{рез}$ писать просто $\vec{P}$, подразумевая под $\vec{P}$ вклад в поляризацию только от рассматриваемого перехода среды.

Подставим $\vec{D}=n_0^2\vec{E}+4\pi\vec{P}_{рез}$ в уравнение (4.1), заменим $\vec{P}_{рез}$ на $\vec{P}$ и получим

$$\Delta\vec{E}-\frac{n_0^2}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} \qquad (4.3)$$

Это — уравнение Даламбера или волновое уравнение с источниками поля.

Далее из этого уравнения мы хотим получить дифференциальное уравнение для амплитуды светового поля через амплитуду поляризации. Эти уравнения для амплитуд и называются укороченными волновыми уравнениями.

Будем рассматривать уравнение (4.3) для комплексных $\vec{E}$ и $\vec{P}$. Для линейного уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть комплексного решения является вещественным решением.

Рассмотрим световую волну, распространяющуюся вдоль оси z, и линейно поляризованную вдоль оси y. Тогда $\vec{P}\parallel\vec{E}\parallel\vec{e}_y$. Для краткости записи отбросим векторные обозначения, и будем рассматривать только проекции векторов на ось y.

Чтобы отличать комплексные величины от вещественных величин будем писать волну над комплексными величинами.

$E=\mathrm{Re}\left(\tilde{E}\right)$ и $P=\mathrm{Re}\left(\tilde{P}\right)$.

Перепишем уравнение (4.3) для комплексных величин:

$$\Delta\tilde{E}-\frac{n_0^2}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\tilde{E}}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial t^2} \tag{4.4}$$

Будем искать решение в виде

$\tilde{E}=\tilde{E}_0(t,z)\cdot e^{-i\varphi}$, где ось z направлена вдоль направления распространения световой волны $\varphi=\omega t-k_0z-\varphi_0$ — фаза световой волны и будем рассматривать фазу, как фазу волны распространяющейся с фазовой скоростью $\frac{c}{n_0}$, а не со скоростью $\frac{c}{n}$, как на самом деле. Соответственно $k_0=\frac{2\pi}{\lambda_0}=\frac{2\pi\nu}{\lambda_0\nu}=\frac{\omega}{\frac{c}{n_0}}=\frac{n_0\omega}{c}$ — нерезонансное волновое число вместо $k=\frac{n\omega}{c}$.

Несоответствие k_0 настоящему k спрятано в зависимости амплитуды света $\tilde{E}_0$ от z координаты.

Аналогично будем считать

$\tilde{P}=\tilde{P}_0(t,z)\cdot e^{-i\varphi}$, где $\varphi=\omega t-k_0z-\varphi_0$.

Получим теперь из уравнения (4.4) связь комплексных амплитуд $\tilde{E}_0$ и $\tilde{P}_0$.

В уравнение надо подставить вторые производные, для которых введем более компактные обозначения:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\tilde{E}}{\partial z^2}\equiv\tilde{E}''\\[2mm] \dfrac{\partial^2\tilde{E}}{\partial t^2}\equiv\ddot{\tilde{E}}\\[2mm] \dfrac{\partial^2\tilde{P}}{\partial t^2}\equiv\ddot{\tilde{P}}\end{cases}$$

Выразим эти производные через амплитуды поля и поляризации и подставим в уравнение (4.4).

Дифференцируя по z выражение $\tilde{E}=\tilde{E}_0(t,z)\cdot e^{-i\varphi}$, получим $\tilde{E}'=\tilde{E}_0'e^{-i\varphi}+ik_0\tilde{E}_0e^{-i\varphi}$. Тогда

$$\tilde{E}''=\tilde{E}_0''e^{-i\varphi}+2ik_0\tilde{E}_0'e^{-i\varphi}-k_0^2\tilde{E}_0e^{-i\varphi}.$$

Аналогично:

$$\ddot{\tilde{E}}=\ddot{\tilde{E}}_0e^{-i\varphi}-2i\omega\dot{\tilde{E}}_0e^{-i\varphi}-\omega^2\tilde{E}_0e^{-i\varphi}$$

и

$$\ddot{\tilde{P}}=\ddot{\tilde{P}}_0e^{-i\varphi}-2i\omega\dot{\tilde{P}}_0e^{-i\varphi}-\omega^2\tilde{P}_0e^{-i\varphi}.$$

Подставим все три выражения в уравнение (4.4), в котором $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, так как световая волна распространяется вдоль оси z, поэтому нет зависимости от координат x и y и вторые производные по ним равны нулю. После подстановки производных в уравнение (4.4) сократим это уравнение на $e^{-i\varphi}$ и получим:

$$\tilde{E}_0'' + 2ik_0\tilde{E}_0' - k_0^2\tilde{E}_0 - \frac{n_0^2}{c^2}\ddot{\tilde{E}}_0 + \frac{n_0^2}{c^2}2i\omega\dot{\tilde{E}}_0 + \frac{n_0^2}{c^2}\omega^2\tilde{E}_0 = \frac{4\pi}{c^2}\ddot{\tilde{P}}_0 - \frac{8\pi i\omega}{c^2}\dot{\tilde{P}}_0 - \frac{4\pi}{c^2}\omega^2\tilde{P}_0 \tag{4.5}$$

Слагаемые $-k_0^2\tilde{E}_0$ и $+\dfrac{n_0^2}{c^2}\omega^2\tilde{E}_0$ в сумме равны нулю, так как $k_0 = \dfrac{n_0\omega}{c}$.

Сократим эти два слагаемых в уравнении (4.5).

Амплитуды $\tilde{E}_0$ и $\tilde{P}_0$ — медленные функции координат и времени. Тогда высокими производными от амплитуд можно пренебречь по сравнению с низкими производными. Оставим в уравнении (4.5) только наибольшие слагаемые $\tilde{P}_0$, $\dot{\tilde{E}}_0$, $\tilde{E}_0'$ для амплитуд $\tilde{E}_0$ и $\tilde{P}_0$, отбросим более высокие производные и получим:

$$2ik_0\tilde{E}_0' + 2i\frac{n_0^2}{c^2}\omega\dot{\tilde{E}}_0 = -\frac{4\pi}{c^2}\omega^2\tilde{P}_0 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{2ik_0} \qquad \Rightarrow$$

$$\tilde{E}_0' + \frac{n_0}{c}\dot{\tilde{E}}_0 = 2\pi i\frac{\omega}{n_0 c}\tilde{P}_0 \tag{4.6}$$

Это и есть укороченное волновое уравнение или уравнение для комплексных амплитуд поля и поляризации.

Получим другую форму уравнения.

Рассмотрим выражение для дифференциала комплексной амплитуды светового поля $\tilde{E}_0$, как функции координаты z и времени t:

$$d\tilde{E}_0 = \frac{\partial\tilde{E}_0}{\partial z}dz + \frac{\partial\tilde{E}_0}{\partial t}dt = \tilde{E}_0'dz + \dot{\tilde{E}}_0\,dt$$

Разделим это равенство на дифференциал координаты dz и получим:

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = \tilde{E}_0' + \frac{dt}{dz}\cdot\dot{\tilde{E}}_0 .$$

Пусть $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{c}{n_0}$, тогда

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = \tilde{E}_0' + \frac{n_0}{c}\dot{\tilde{E}}_0 \tag{4.7}$$

Это совпадает с левой частью уравнения (4.6).

Какой смысл приравнивания $\frac{dz}{dt} = \frac{c}{n_0}$?

При этом условии мы берем производную $\frac{d\tilde{E}_0}{dz}$, как бы сидя верхом на гребне световой волны, которая распространяется со скоростью $\frac{c}{n_0}$. Это так называемая полная производная, она аналогична, например, производной $\frac{d\rho_{11}}{dt}$ в рассмотренных ранее уравнениях для матрицы плотности, где $\frac{d\rho_{11}}{dt}$ — полная производная в системе отсчета атома или как бы сидя верхом на атоме.

Выражение $\frac{d\tilde{E}_0}{dz}$ — производная, которая показывает, что происходит с амплитудой световой волны по мере распространения волны вдоль оси z.

Подставим (4.7) в (4.6) и получим

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \qquad (4.8)$$

Это то же самое укороченное волновое уравнение, что и (4.6), но в другой форме.

Получим теперь аналоги комплексных уравнений (4.6) и (4.8) в вещественном виде.

Вместо одной комплексной амплитуды $\tilde{P}_0$ рассмотрим две вещественные амплитуды P_c и P_s. Здесь P_c — синфазная по отношению к световому полю амплитуда, а P_s — квадратурная амплитуда поляризации, сдвинутая по фазе на $\frac{\pi}{2}$ относительно фазы светового поля.

$P = P_c \cos(\varphi) + P_s \sin(\varphi) = \mathrm{Re}\left((P_c + iP_s) \cdot e^{-i\varphi} \right)$, тогда комплексная амплитуда поляризации выражается через две вещественные амплитуды следующим образом:

$\tilde{P}_0 = P_c + iP_s$.

Аналогичное выражение получаем для напряженности светового поля:

$\tilde{E}_0 = E_c + iE_s$.

Подставим эти выражения в уравнения (4.6) и (4.8). В каждом из полученных комплексных уравнений можно приравнять друг другу вещественные части и мнимые части. В результате получим укороченные волновые уравнения в вещественном виде:

$$\begin{cases} E_c' + \dfrac{n_0}{c}\dot{E}_c = -2\pi\dfrac{\omega}{n_0 c}P_s \\ E_s' + \dfrac{n_0}{c}\dot{E}_s = +2\pi\dfrac{\omega}{n_0 c}P_c \end{cases}$$ из уравнения (4.6) и

$$\begin{cases} \dfrac{dE_c}{dz} = -\dfrac{2\pi\omega}{n_0 c}P_s \\ \dfrac{dE_s}{dz} = +\dfrac{2\pi\omega}{n_0 c}P_c \end{cases}$$ из уравнения (4.8).

Рассмотрим частный случай применения укороченных волновых уравнений для прохождения света через оптически тонкий слой среды толщиной Δz.

$\tilde{E}_{0_{вых}} = \tilde{E}_{0_{вх}} + \dfrac{d\tilde{E}_0}{dz}\Delta z$, где $\tilde{E}_{0_{вых}}$ — амплитуда света на выходе из среды, $\tilde{E}_{0_{вх}}$ — амплитуда на входе.

На входе $\begin{cases} E_c = \mathcal{E}_0 \\ E_s = 0 \end{cases}$, тогда

$$\begin{cases} E_{c_{вых}} = \mathcal{E}_0 - \dfrac{2\pi\omega}{n_0 c}P_s \cdot \Delta z \\ E_{s_{вых}} = \dfrac{2\pi\omega}{n_0 c}P_c \cdot \Delta z \end{cases}$$ — световое поле на выходе из слоя среды,

где

$$\begin{cases} P_c = \int P_{c_{V_z}}\, dV_z = \mathcal{E}_0 \int \chi'_{V_z}\, dV_z \\ P_s = \int P_{s_{V_z}}\, dV_z = \mathcal{E}_0 \int \chi''_{V_z}\, dV_z \end{cases},$$

и в свою очередь

$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\dfrac{p^2 \cdot N_{0_{V_z}} \cdot \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = +\dfrac{p^2 \cdot N_{0_{V_z}} \cdot \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases},$$

как это было показано в вопросе о поляризации среды.

Здесь

$p = \int \psi_1^* \cdot (\vec{p}, \vec{e}) \cdot \psi_2 \cdot dV$ — дипольный момент перехода (недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны).

$N_0(V_z) = \dfrac{N_0}{\sqrt{\pi}U} \cdot e^{-\frac{V_z{}^2}{U^2}}$ — распределение концентрации по лучевой скорости молекул.

$U = \sqrt{\dfrac{2k_Б T}{m}}$ — наиболее вероятная скорость молекул газа при температуре T, $k_Б$ — постоянная Больцмана.

$\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right) \cdot \left(1 - \dfrac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right)$, где

$G \equiv \dfrac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2}\right)$ — фактор насыщения, $R = \dfrac{p\mathscr{E}_0}{\hbar}$ — частота Раби,

$\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты света в системе отсчета атома относительно частоты перехода.

<u>Показатель преломления и коэффициент поглощения среды.</u>

$$\begin{cases} \tilde{P} = \tilde{\chi} \cdot \tilde{E} \\ \tilde{P} = \tilde{P}_0 \cdot e^{-i\varphi} \\ \tilde{E} = \tilde{E}_0 \cdot e^{-i\varphi} \end{cases} \quad =>$$

$\tilde{P}_0 = \tilde{\chi} \cdot \tilde{E}_0$ — комплексная восприимчивость $\tilde{\chi}$ является не только коэффициентом пропорциональности между комплексной поляризацией $\tilde{P}$ и комплексной напряженностью световой волны $\tilde{E}$, но и является коэффициентом пропорциональности между амплитудами комплексной поляризации и комплексной напряженности световой волны.

Подставим $\tilde{P}_0 = \tilde{\chi} \cdot \tilde{E}_0$ в укороченное волновое уравнение $\dfrac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \dfrac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0$ и получим

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{\chi} \tilde{E}_0 .$$

Решение этого дифференциального уравнения — экспонента:

$$\tilde{E}_0(z) = \mathscr{E}_0 \, e^{2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{\chi} z} = \mathscr{E}_0 \, e^{2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \chi' z} \, e^{-2\pi \frac{\omega}{n_0 c} \chi'' z} .$$

Сравним это решение с ожидаемым выражением:

$$\tilde{E}_0(z) = \mathscr{E}_0 \, e^{i(k-k_0)z} \, e^{-\frac{\varkappa}{2} z} .$$

Обсудим, почему это выражение ожидаемое.

Сомножитель $e^{-\frac{\varkappa}{2} z}$ связан с определением коэффициента поглощения $\varkappa$ через интенсивность света I :

$$\begin{cases} I = I_0 e^{-\varkappa z} \\ I \sim E_0^2 \end{cases} \quad => \quad E_0 \sim e^{-\frac{\varkappa}{2}z}.$$

Сомножитель $e^{i(k-k_0)z}$ в выражении для $\tilde{E}_0(z)$ связан с тем, что реальная скорость света в среде $\frac{c}{n}$ заменена нами при выводе укороченных волновых уравнений скоростью $\frac{c}{n_0}$, что соответствует замене $k = \frac{n\omega}{c}$ на $k_0 = \frac{n_0\omega}{c}$.

Вместо $\tilde{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i(\omega t - kz - \varphi_0)}$ мы при выводе укороченных волновых уравнений использовали формулу

$$\tilde{E} = \tilde{E}_0 e^{-i(\omega t - kz - \varphi_0)} = \mathcal{E}_0 e^{i(k-k_0)z} e^{-i(\omega t - k_0 z - \varphi_0)}.$$

Сравнивая две части правого равенства получим, что

$$\tilde{E}_0 \sim e^{i(k-k_0)z}.$$

Тогда, сравнивая два выражения для $\tilde{E}_0(z)$

$$\begin{cases} \tilde{E}_0(z) = \mathcal{E}_0 e^{2\pi i \frac{\omega}{n_0 c}\chi' z} e^{-2\pi \frac{\omega}{n_0 c}\chi'' z} \\ \tilde{E}_0(z) = \mathcal{E}_0 e^{i(k-k_0)z} e^{-\frac{\varkappa}{2}z} \end{cases}, \text{ получим:}$$

$$\begin{cases} k - k_0 = \dfrac{2\pi\omega}{n_0 c}\chi' \\ \varkappa = \dfrac{4\pi\omega}{n_0 c}\chi'' \end{cases}.$$

С учетом $n = k\frac{c}{\omega}$ первое уравнение можно изменить, тогда

$$\begin{cases} n - n_0 = \dfrac{2\pi}{n_0}\chi' \\ \varkappa = \dfrac{4\pi\omega}{n_0 c}\chi'' \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} \chi' = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \chi'_{V_z}\, dV_z \\ \chi'' = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \chi''_{V_z}\, dV_z \end{cases} \text{ и}$$

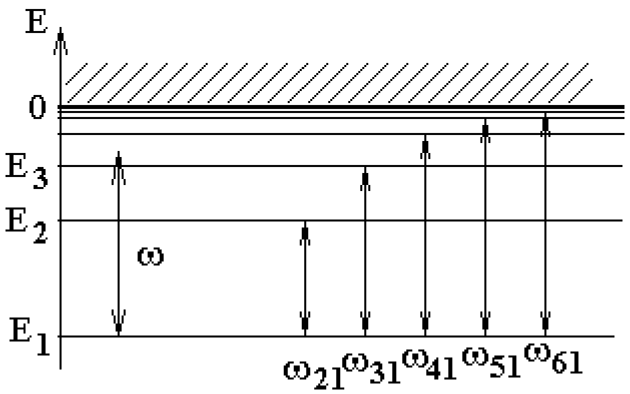
$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\dfrac{p^2 N_{0_{V_z}} \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = +\dfrac{p^2 N_{0_{V_z}} \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases}, \text{ где } \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21},$$

$$\rho_{11}(V_z)-\rho_{22}(V_z)=\left(\rho_{11}^0-\rho_{22}^0\right)\cdot\left(1-\frac{G}{1+G}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right),\text{ где}$$

$G\equiv\frac{R^2}{2\Gamma}\cdot\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right)$ — фактор насыщения, $R=\frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ — частота Раби,

Неравенство $n_0>1$ в области прозрачности среды, как влияние хвостов высокочастотных линий поглощения.

Рассмотрим свет с частотой ω в области прозрачности среды. Пусть молекулы среды находятся на нижнем уровне энергии. Оказывается, что справа от частоты ω много линий поглощения ω_{n1} (бесконечно много), то есть неравенство $\omega<\omega_{n1}$ бывает часто, а слева от частоты ω линий поглощения мало, то есть неравенство $\omega_{n1}<\omega$ бывает редко. Это видно из рисунка



.

Если линия поглощения ω_{n1} находится справа от частоты света ω, то расстройка Ω частоты света относительно частоты перехода отрицательная

$$\omega<\omega_{nk}\quad=>\quad\Omega=\omega-\omega_{nk}<0\quad=>\quad\chi'\sim\left(-\frac{\Omega}{\Gamma^2+\Omega^2}\right)>0\quad=>$$

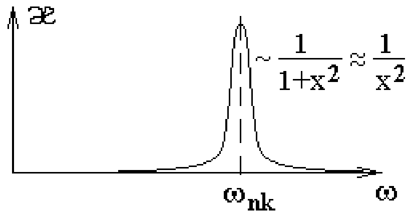
$$n-n_0=\frac{2\pi}{n_0}\chi'>0\quad=>\quad n-n_0>0$$

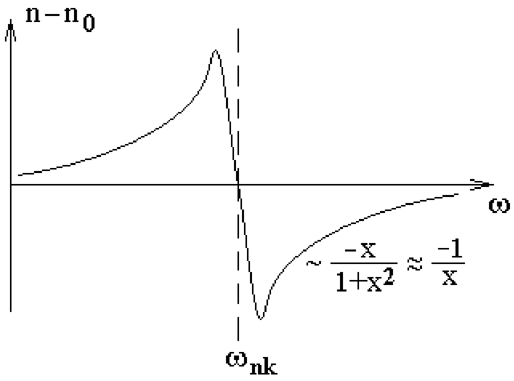
То есть рассматриваемая линия поглощения ω_{n1} дает положительную добавку к показателю преломления.

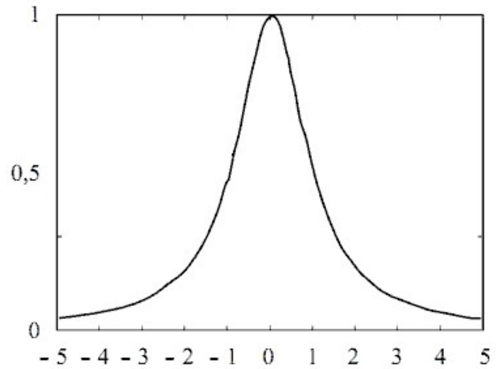
Поскольку линий поглощения справа от частоты света всегда много, и их вклады в показатель преломления положительны, сам показатель преломления в области прозрачности среды оказывается больше, чем в вакууме:

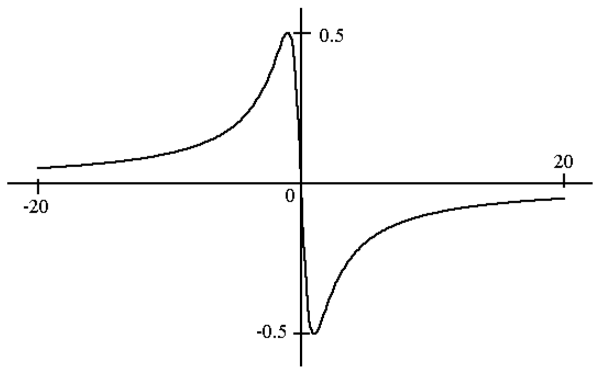
$n_0>1$.

При большом частотном удалении от линии поглощения коэффициент поглощения $\varkappa(x)$ убывает пропорционально $\frac{1}{1+x^2}\approx\frac{1}{x^2}$, а добавка к показателю преломления $n-n_0$ убывает гораздо медленнее, пропорционально $\frac{x}{1+x^2}\approx\frac{1}{x}$, где $x=\frac{\Omega}{\Gamma}$ — безразмерная частотная расстройка. Поведение обеих величин в зависимости от частоты света изображено на нижеследующих рисунках.









Нижняя пара рисунков — расчет в MATLAB.

Относительно быстрый спад коэффициента поглощения приводит к тому, что в частотной области, где поглощения практически нет и коэффициент поглощения равен нулю, показатель преломления заметно отличается от единицы.

<u>Дисперсионное соотношение Крамерса — Кронига.</u>

Сигнал на выходе устройства не может появиться раньше, чем на его входе.

Пусть электрическое (или оптическое) устройство имеет комплексный коэффициент передачи $\tilde{K}(\omega)$, где

$$\tilde{U}_{вых_\omega} = \tilde{K}(\omega) \cdot \tilde{U}_{вх_\omega}.$$

Пусть $U_{вх}(t) = \delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Тогда

$$\tilde{U}_{вх_\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \cdot U(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \cdot \delta(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega \cdot 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi}$$

Тогда

$$\tilde{U}_{вых_\omega} = \tilde{K}(\omega) \cdot \tilde{U}_{вх_\omega} = \frac{1}{2\pi}\tilde{K}(\omega) \qquad =>$$

$$U_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot \tilde{U}_{вых_\omega} \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot \tilde{K}(\omega) \cdot d\omega.$$

Сигнал на выходе схемы не может появиться раньше, чем сигнал появляется на входе, тогда $U_{вых}(t)=0$ при $t<0$, так как $U_{вх}(t)=\delta(t)=0$ при $t<0$. Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\cdot \tilde{K}(\omega)\cdot d\omega = 0 \ \underline{\text{при } t<0}.$$

Амплитудно-частотная и фазово-частотная характеристики любой схемы связаны приведенным выше интегральным соотношением.

В оптике коэффициент передачи тонкого слоя $\tilde{K}(\omega)$ определяется комплексной поляризуемостью молекул $\tilde{\alpha}(\omega)$, то есть коэффициентом пропорциональности между комплексным дипольным моментом молекулы $\tilde{p}$ и комплексной напряженностью светового поля $\tilde{E}$:

$\tilde{p}=\tilde{\alpha}\tilde{E}$, где $\tilde{\alpha}=\alpha'+i\alpha''$.

С дипольным комплексным моментом молекул $\tilde{p}$ связана комплексная поляризация среды $\tilde{P}=N_0\tilde{p}$, где N_0 — концентрация молекул.

$\tilde{P}=\tilde{\chi}\tilde{E}$ $\qquad$ $\tilde{\chi}=N_0\tilde{\alpha}$ (для разреженного газа) $\qquad$ $\tilde{\chi}=\chi'+i\chi''$

Пусть $E(t)=\mathcal{E}_0\dfrac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$ на отрицательной и положительной частоте.

$$P(t)=\tilde{\chi}(-\omega)\frac{\mathcal{E}_0}{2}e^{i\omega t}+\tilde{\chi}(\omega)\frac{\mathcal{E}_0}{2}e^{-i\omega t}=$$

$$=\left(\chi'(-\omega)+i\chi''(-\omega)\right)\frac{\mathcal{E}_0}{2}\left(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\right)+$$

$$+\left(\chi'(\omega)+i\chi''(\omega)\right)\frac{\mathcal{E}_0}{2}\left(\cos(\omega t)-i\sin(\omega t)\right)=$$

$$=\frac{\mathcal{E}_0}{2}\Big(\left(\chi'(\omega)+\chi'(-\omega)\right)\cos(\omega t)+\left(\chi''(\omega)-\chi''(\omega)\right)\sin(\omega t)\Big)+$$

$$+i\frac{\mathcal{E}_0}{2}\Big(\left(\chi'(-\omega)-\chi'(\omega)\right)\sin(\omega t)+\left(\chi''(\omega)+\chi''(-\omega)\right)\cos(\omega t)\Big)$$

Из вещественности $P(t)$ следует, что

$$\begin{cases}\chi'(-\omega)=\chi'(\omega)\\ \chi''(-\omega)=-\chi''(\omega)\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\alpha'(-\omega)=\alpha'(\omega)\\ \alpha''(-\omega)=-\alpha''(\omega)\end{cases}.$$

Крамерс (1927) и Крониг (1926) рассматривали интеграл $\int\dfrac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega$, в котором интегрирование ведется по замкнутому контуру на комплексной плоскости. Интегрирование ведется в положительном направлении вдоль всей вещественной оси, и контур замыкается по полуокружности в верхней полуплоскости.

Крамерс и Крониг, используя условие $\tilde{\alpha}(\omega)\xrightarrow[\omega\to\infty]{}0$, получили, что интеграл по полуокружности равен нулю. Тогда интеграл можно взять по вычетам

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega=\frac{1}{2}2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{\omega=\omega_0}\left(\frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega-\omega_0}\right)=\pi i\tilde{\alpha}(\omega_0)$$

$$\tilde{\alpha}(\omega_0)=-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega$$

Рассмотрим вещественную часть равенства и получим:

$$\alpha'(\omega_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha''(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\alpha''(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\alpha''(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega$$

Заменим в первом интеграле $\omega\to-\omega$ и получим

$$\alpha'(\omega_0)=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\alpha''(-\omega)}{\omega+\omega_0}d\omega+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\alpha''(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega$$

Учтем, что $\alpha''(-\omega)=-\alpha''(\omega)$ и получим

$$\alpha'(\omega_0)=\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\alpha''(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega$$

Здесь $\mathcal{P}\int$ — интеграл в смысле главного значения.

Аналогично рассмотрим мнимую часть равенства

$$\tilde{\alpha}(\omega_0)=-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega$$

и с учетом $\alpha'(-\omega)=\alpha'(\omega)$ получим

$$\alpha''(\omega_0)=-\frac{2\omega_0}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\alpha'(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega$$

В результате:

$$\begin{cases}\alpha'(\omega_0)=\dfrac{2}{\pi}\mathcal{P}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\alpha''(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega\\[2ex]\alpha''(\omega_0)=-\dfrac{2\omega_0}{\pi}\mathcal{P}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\alpha'(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega\end{cases}.$$

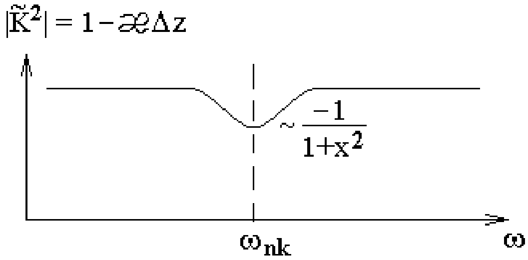
Здесь $\mathcal{P}\int$ — интеграл в смысле главного значения. Эти интегральные связи между $\alpha'(\omega)$ и $\alpha''(\omega)$ означают, что интегрально связаны зависимость коэффициента поглощения от частоты света и зависимость показателя преломления от частоты света. Для оптически тонкого слоя:

$$\begin{cases} \alpha' \sim \chi' \sim (n-n_0) \\ \alpha'' \sim \chi'' \sim \varkappa \end{cases}.$$

В свою очередь от добавки к показателю преломления и от коэффициента поглощения зависит комплексный коэффициент передачи оптически тонкого слоя $\tilde{K}(\omega)$:

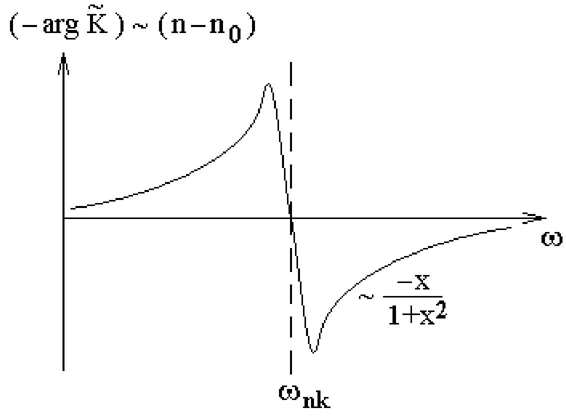
$$\begin{cases} \left|\tilde{K}^2\right| = 1 - \varkappa \cdot \Delta z \\ -\arg\left(\tilde{K}\right) \sim (n-n_0) \end{cases}$$, если показатель преломления увеличивается, то фаза на выходе больше отстает.

Так если амплитудный коэффициент пропускания имеет провал лоренцевской формы $\left|\tilde{K}\right| = 1 - \frac{\varkappa}{2}\Delta z$

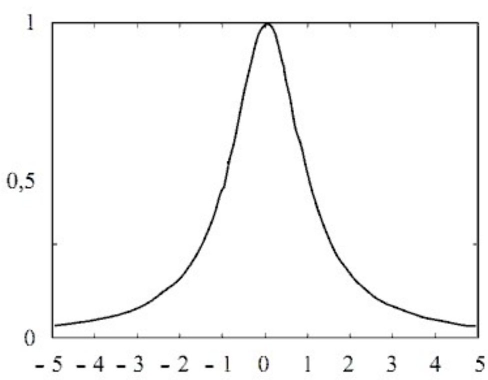


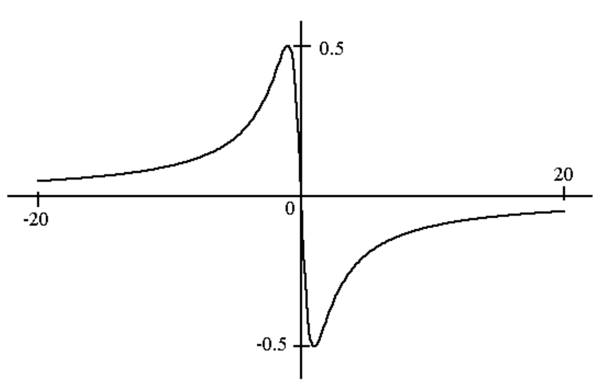
,

то показатель преломления имеет добавку в виде всплеска дисперсионной формы:



.





$$\mathscr{L}(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad \mathscr{D}(x)=\frac{-x}{1+x^2}$$

Если форма провала не совсем лоренцевская, то и форма всплеска не совсем дисперсионная.