

Скоростные уравнения или уравнения баланса.

Скоростные уравнения — это приближение, которое получается из условия

$$\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$$

и уравнений для матрицы плотности в приближении вращающейся волны:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} + \gamma_1 \rho_{11} = \gamma_1 \rho_{11}^0 - i \frac{R}{2} (\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) \\ \dot{\rho}_{22} + \gamma_2 \rho_{22} = \gamma_2 \rho_{22}^0 + i \frac{R}{2} (\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{21} - i\Omega \tilde{\rho}_{21} + \Gamma \tilde{\rho}_{21} = i \frac{R}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}) \end{cases} \quad (5.1)$$

где

$$R = \frac{p \mathcal{E}_0}{\hbar} \text{ — частота Раби,}$$

$$p = \int_{V=\infty} \psi_1^* (\vec{p}, \vec{e}) \psi_2 dV \text{ — дипольный момент перехода,}$$

$\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты света относительно частоты перехода в системе отсчета молекулы,

$$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21} e^{-i\varphi} \text{ — недиагональный элемент матрицы плотности,}$$

$$\varphi = \omega t - kz - \varphi_0 \text{ — фаза световой волны.}$$

Нас в дальнейшем будет интересовать взаимодействие двух световых волн со средой. Если световые волны встречные, то в системе отсчета молекулы две волны будут иметь разные частоты, даже если в лабораторной системе отсчета частоты одинаковы. В таком случае в системе отсчета молекулы амплитуда суммарного светового поля испытывает биения, поэтому

условие $\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$ не выполнено даже для стационарных явлений с двумя световыми волнами.

Однако при условии слабого светового поля, когда $G \ll 1$, так называемые когерентные нестационарные эффекты в наблюдаемых величинах усредняются, и скоростные уравнения дают хорошее приближение.

Подставим $\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$ в третье уравнение системы (5.1) и получим

$$\tilde{\rho}_{21} = i \frac{R}{2} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega} \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21} = \tilde{\rho}_{21}^* - \tilde{\rho}_{21} = -i \frac{R}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}) \cdot \frac{2\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \quad \Rightarrow$$

$$i \frac{R}{2} (\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) = \frac{R^2 (\rho_{11} - \rho_{22})}{2\Gamma} \cdot \mathcal{L} \left(\frac{\Omega}{\Gamma} \right), \text{ где}$$

$\mathcal{L}(x) \equiv \frac{1}{1+x^2}$ — лоренцевский контур \Rightarrow

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} + \gamma_1 \rho_{11} = \gamma_1 \rho_{11}^0 - \frac{R^2}{2\Gamma} (\rho_{11} - \rho_{22}) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \dot{\rho}_{22} + \gamma_2 \rho_{22} = \gamma_2 \rho_{22}^0 + \frac{R^2}{2\Gamma} (\rho_{11} - \rho_{22}) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases}$$

Умножим систему на распределение концентрации по лучевой скорости и получим N_{0V_z}

$$\begin{cases} \dot{N}_{1V_z} + \gamma_1 N_{1V_z} = \gamma_1 N_{1V_z}^0 - \frac{R^2}{2\Gamma} (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \dot{N}_{2V_z} + \gamma_2 N_{2V_z} = \gamma_2 N_{2V_z}^0 + \frac{R^2}{2\Gamma} (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases} \quad (5.2)$$

Это почти скоростные уравнения, осталось заменить величину R^2 на более традиционное выражение.

Для получения нового вида уравнений нам понадобятся две новые величины: J и σ .

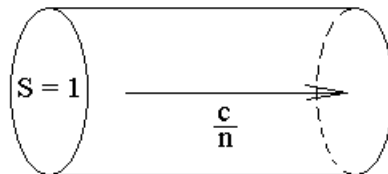
Введем в рассмотрение J — плотность потока фотонов. Эта величина связана с интенсивностью света I , которая представляет собой плотность потока энергии светового поля. Тогда

$$J \equiv \frac{I}{h\nu},$$

где $I \equiv \langle |\vec{S}| \rangle$, где угловые скобки означают усреднение по времени,

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$ — вектор Пойнтинга.

Рассмотрим цилиндр со световым полем, объемная плотность которого w , а фазовая скорость — $\frac{c}{n}$.



Пусть площадь сечения цилиндра равна единице, а длина — $\frac{c}{n}$. Тогда

объем цилиндра равен их произведению $\frac{c}{n}$, а энергия светового поля в этом

объеме равна $w \frac{c}{n}$. Вся эта энергия в единицу времени пройдет через единичную площадку. Следовательно,

$$I = \langle w \rangle \frac{c}{n}.$$

Объемную плотность энергии w можно выразить через амплитуду светового поля \mathcal{E}_0 . И действительно

$$w = \frac{1}{8\pi} \left\{ (\vec{D}, \vec{E}) + (\vec{B}, \vec{H}) \right\}.$$

В оптике $\mu = 1$ и $\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E$ в бегущей световой волне, тогда

$$w = \frac{1}{8\pi} \left\{ (\vec{D}, \vec{E}) + (\vec{B}, \vec{H}) \right\} = \frac{1}{8\pi} \left\{ \varepsilon E^2 + \mu H^2 \right\} = \frac{1}{4\pi} \varepsilon E^2 = \frac{n^2 E^2}{4\pi}.$$

$$E = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \langle E^2 \rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\langle w \rangle = \frac{n^2 \mathcal{E}_0^2}{8\pi}.$$

Тогда

$$J = \frac{I}{h\nu} = \langle w \rangle \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{h\nu} = \frac{nc\mathcal{E}_0^2}{8\pi\hbar\omega}.$$

Оказывается, что в этом выражении нужно заменить $n \rightarrow n_0$.

Такая странность имеет две причины.

Во-первых, часть энергии светового поля принято считать энергией, запасенной в среде. Дело в том, что $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, где поляризация \vec{P} имеет два слагаемых: резонансное $\vec{P}_{рез}$ и нерезонансное $\vec{P}_{нерез}$. Резонансный вклад связан с тем, что молекула может поглощать или излучать свет, только одновременно находясь на двух уровнях энергии. Следовательно, резонансный вклад в поляризацию неразрывно связан с частичным заселением возбужденного уровня энергии. По этой причине соответствующую энергию рассматривают, как энергию среды, а не как энергию светового поля. Тогда обозначим вектор электрического смещения без резонансного вклада в поляризацию, как

$$\vec{D}_0 = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_{нерез} = n_0^2 \vec{E}, \text{ что аналогично } \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon \vec{E} = n^2 \vec{E}.$$

Соответственно объемная плотность энергии $\langle w_0 \rangle = \frac{n_0^2 \mathcal{E}_0^2}{8\pi}$.

Кроме того, рассматривая обратное воздействие среды на волну, мы договорились рассматривать свет, как будто он распространяется со скоростью $\frac{c}{n_0}$, а не $\frac{c}{n}$.

В результате

$$J = \langle w_0 \rangle \cdot \frac{c}{n_0} \cdot \frac{1}{h\nu} = \frac{n_0 c \varepsilon_0^2}{8\pi \hbar \omega}.$$

 Введем теперь в рассмотрение новую величину σ — сечение поглощения, которая по своему физическому смыслу должна быть равна площади тени молекулы. Через сечение поглощения σ может быть выражен коэффициент поглощения κ .

Коэффициент поглощения определяется зависимостью изменения интенсивности света по мере его распространения в поглощающей среде:

$$I(z) = I(0) \cdot e^{-\kappa z}$$

С учетом равенства $J \equiv \frac{I}{h\nu}$ получим

$$J(z) = J(0) \cdot e^{-\kappa z}.$$

 $(N_1 - N_2)$ — эффективная концентрация поглощающих свет молекул, так как при одинаковых заселенностях верхнего и нижнего уровней энергии число переходов снизу вверх равно числу вынужденных переходов сверху вниз, и поглощение света отсутствует.

$(N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz$ — число этих как бы поглощающих свет молекул в объеме $S \cdot dz$.

$\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz$ — площадь тени этих молекул.

$\frac{\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz}{S}$ — относительная площадь тени или вероятность

поглощения фотона на длине dz .

$\left| \frac{dJ}{J} \right|$ — тоже вероятность поглощения для фотона на длине dz .

Тогда

$$\frac{dJ}{J} = - \frac{\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz}{S} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dJ}{J} = -\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot dz \quad \Rightarrow$$

$$J(z) = J(0) \cdot e^{-\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot z}.$$

Сравним это выражение с другим: $J(z) = J(0) \cdot e^{-\kappa z}$ и получим

$$\kappa = (N_1 - N_2) \cdot \sigma.$$

 В случае неоднородного уширения спектральной линии $\Gamma \ll kU$ величины κ, σ, N_1, N_2 зависят от лучевой скорости V_z , так как частота света в системе от счета молекулы $\omega' = \omega - kV_z$ зависит от V_z .

Поглощение среды складывается из поглощения молекул с разными лучевыми скоростями

$$\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa_{V_z} dV_z.$$

Соотношение $\kappa = (N_1 - N_2) \cdot \sigma$ можно записать для молекул, лучевая скорость которых лежит в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$:

$$\kappa_{V_z} dV_z = (N_{1V_z} dV_z - N_{2V_z} dV_z) \cdot \sigma(V_z) \quad \Rightarrow$$

$$\kappa_{V_z} = (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \sigma(V_z) \quad \Rightarrow$$

$$\sigma(V_z) = \frac{\kappa_{V_z}}{N_{1V_z} - N_{2V_z}}.$$

Рассматривая обратное воздействие среды на волну, мы получили, что поглощение среды пропорционально мнимой части комплексной восприимчивости среды $\kappa_{V_z} = \frac{4\pi\omega}{cn_0} \chi''_{V_z}$, тогда

$$\sigma(V_z) = \frac{\frac{4\pi\omega}{cn_0} \chi''_{V_z}}{N_{1V_z} - N_{2V_z}}.$$

Рассматривая влияние монохроматической световой волны на среду, мы получили выражение для мнимой части комплексной восприимчивости среды

$$\chi''_{V_z} = \frac{p^2 N_{0V_z} (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} = \frac{p^2 (N_{1V_z} - N_{2V_z})}{\hbar \Gamma} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\chi''_{V_z}}{N_{1V_z} - N_{2V_z}} = \frac{p^2}{\hbar \Gamma} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right).$$

Подставим это отношение в формулу для сечения поглощения

$$\sigma(V_z) = \frac{\frac{4\pi\omega}{cn_0} \chi''_{V_z}}{N_{1V_z} - N_{2V_z}} \text{ и получим}$$

$$\sigma(V_z) = \frac{4\pi\omega p^2}{\hbar cn_0 \Gamma} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\sigma(V_z) = \sigma_0 \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right).$$

Здесь $\sigma_0 = \frac{4\pi\omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma}$ — амплитуда сечения поглощения, $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$

— расстройка частоты света в системе отсчета молекулы относительно частоты поглощающего перехода.

Из формулы $\sigma(V_z) = \sigma_0 \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)$ следует, что форма линии поглощения каждой молекулы — лоренцевский контур с шириной 2Γ , где Γ — скорость затухания недиагонального элемента матрицы плотности, она же — скорость затухания поляризации среды.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \sigma(V_z) \cdot J &= (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \sigma_0 \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \cdot \frac{n_0 c \mathcal{E}_0^2}{8\pi \hbar \omega} = \\ &= (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \frac{4\pi\omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \cdot \frac{n_0 c \mathcal{E}_0^2}{8\pi \hbar \omega} = \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right). \end{aligned}$$

Сравним это выражение с полученными ранее почти скоростными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{N}_{1V_z} + \gamma_1 N_{1V_z} = \gamma_1 N_{1V_z}^0 - \frac{R^2}{2\Gamma} (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \dot{N}_{2V_z} + \gamma_2 N_{2V_z} = \gamma_2 N_{2V_z}^0 + \frac{R^2}{2\Gamma} (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases}$$

и получим скоростные уравнения в окончательном виде:

$$\begin{cases} \dot{N}_{1V_z} + \gamma_1 N_{1V_z} = \gamma_1 N_{1V_z}^0 - (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \sigma(V_z) \cdot J \\ \dot{N}_{2V_z} + \gamma_2 N_{2V_z} = \gamma_2 N_{2V_z}^0 + (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \sigma(V_z) \cdot J \end{cases}.$$

Здесь сечение поглощения σ зависит от лучевой скорости V_z в соответствии с формулой:

$$\sigma(V_z) = \sigma_0 \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right), \quad \text{где } \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \text{ — расстройка частоты, а}$$

амплитуда сечения $\sigma_0 = \frac{4\pi\omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma}$.

Физический смысл скоростных уравнений.

Рассмотрим второе уравнение из системы скоростных уравнений, пренебрегая затуханием и накачкой, и на время забудем о зависимости рассматриваемых величин от лучевой скорости V_z . Тогда

$$\dot{N}_2 = (N_1 - N_2) \sigma J.$$

Здесь правую часть равенства можно преобразовать:

$$\dot{N}_2 = (N_1 - N_2)\sigma J = \kappa J = -\frac{dJ}{dz} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{N}_2 = -\frac{dJ}{dz}.$$

Здесь \dot{N}_2 — число переходов с нижнего уровня на верхний уровень в единицу времени в единице объема,

$\left(-\frac{dJ}{dz}\right)$ — насколько в единицу времени на единице длины и единице площади влетает фотонов больше, чем вылетает.

Тогда скоростные уравнения отражают тот факт, что скорость потери фотонов равна скорости оптических переходов с нижнего уровня энергии на верхний уровень.

Скоростные уравнения — это условие баланса энергий или равенства числа поглощенных фотонов числу переходов снизу вверх.

По этой причине скоростные уравнения называются также уравнениями баланса.

Уравнения баланса энергий вполне очевидны, и их можно записать без привлечения дифференциальных уравнений для матрицы плотности.

Как же тогда могло оказаться, что балансные уравнения выполняются неточно, а являются результатом приближения $\dot{\rho}_{21} = 0$?

Скоростные уравнения действительно выполняются неточно. Дело в том, что кроме баланса энергий при выводе уравнений баланса была использована формула $\kappa = (N_1 - N_2)\sigma$, в которой подразумевается, что поглощение света пропорционально разности заселенностей, что на самом деле справедливо только в случае независимости от времени амплитуды светового поля.

В общем случае коэффициент поглощения пропорционален мнимой части комплексной восприимчивости среды

$$\kappa \sim \chi'',$$

а вот мнимая часть комплексной восприимчивости среды пропорциональна разности заселенностей $\chi'' \sim (N_1 - N_2)$ только в стационарном случае, когда амплитуда светового поля не зависит от времени.

Дело в том, что разность заселенностей не гарантирует наличия дипольного момента среды, который появляется под действием светового поля только с некоторым запаздыванием по времени. Пока нет дипольного момента, комплексная восприимчивость равна нулю, как коэффициент пропорциональности между нулевой поляризацией среды и световым полем. Поглощение света средой связано с интерференцией переизлученного молекулами света и света проходящего мимо молекул. Пока нет переизлученного света, нет и поглощения света.

В сухом остатке, уравнение баланса $\dot{N}_2 = -\frac{dJ}{dz}$ выполняется строго и

всегда, а скоростное уравнение $\dot{N}_2 = (N_1 - N_2)\sigma J$ выполняется только приближенно, так как уравнение $\kappa = (N_1 - N_2)\sigma$ справедливо только при постоянной амплитуде светового поля или при медленном по сравнению с частотой Раби $R = \frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ изменении амплитуды светового поля.

Импульс предвестник.

Итак, при быстром включении светового поля диполи молекул раскачиваются не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени. Подробнее это явление мы рассмотрим в конце курса в вопросе "Оптические нутации".

В первый момент при включении света в среде нет осциллирующих молекулярных диполей, тогда нет и их излучения, нет изменения амплитуды проходящего света в результате интерференции проходящей волны и волны переизлученной диполями среды, нет даже показателя преломления среды, вызванного далекими крыльями дисперсионных контуров нерезонансных линий поглощения.

В результате в первый момент после быстрого включения света свет распространяется в среде без поглощения и со скоростью света в пустоте.

Рассмотрим слой среды, для которого $\kappa z \approx 200$. Тогда на выходе из среды интенсивность света составляет малую часть $e^{-\kappa z} \approx e^{-200}$ интенсивности света на входе в слой среды. Для сравнения число протонов в видимой части Вселенной — это величина порядка e^{200} . То есть ни одного фотона на выходе из среды не будет. Однако на опыте, если свет на входе в кювету включают быстро, то на выходе появляется короткий световой импульс — импульс предвестник, который проходит среду без поглощения и со скоростью света в пустоте. Если свет слабый $R = \frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar} < \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — спектральная ширина линии поглощения, то длительность импульса предвестника примерно равна $\frac{1}{\kappa \cdot z \cdot \Delta\omega} \approx \frac{1}{200 \cdot \Delta\omega}$.

Два качественных описания взаимодействия света со средой.

Возможны два описания "на пальцах" взаимодействия света с веществом. Эти два описания нельзя смешивать друг с другом, иначе получатся заведомо ошибочные результаты.

Первый способ описания использует формализм матрицы плотности. В этом формализме свет поглощают все молекулы среды, и каждая молекула одновременно находится и на нижнем уровне энергии перехода и на верхнем уровне. В стационарном случае способность поглощать свет каждой молекулы

пропорциональна разности заселенностей $(N_1 - N_2)$. Этот способ описания более правильный.

Второй способ описания в формализме скоростных уравнений. Этот способ менее точный, но более наглядный, более простой для понимания. Этот второй способ описания является хорошим приближением в стационарном случае, когда амплитуда световой волны не зависит от времени. В формализме скоростных уравнений одна часть молекул находится на нижнем уровне энергии, концентрация этих молекул равна заселенности нижнего уровня N_1 , другая часть молекул находится на верхнем уровне энергии, и их концентрация N_2 . При этом эффективная концентрация поглощающих молекул равна $N_1 - N_2$. Способность каждой молекулы поглощать свет не зависит от заселенностей уровней, а зависит только от расстройки частоты света относительно частоты перехода. Способность поглощать свет каждой молекулой пропорциональна сечению поглощения $\sigma = \sigma_0 \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)$.

Если же перепутать оба формализма, то можно предположить, что способность поглощать свет каждой молекулой пропорциональна $N_1 - N_2$, и число поглощающих молекул пропорционально $N_1 - N_2$. Тогда получается, что поглощение света пропорционально $(N_1 - N_2)^2$, что неверно, так как на самом деле поглощение пропорционально $N_1 - N_2$.

Резонанс насыщения поглощения слабой пробной волны сильной встречной волной.

Резонанс насыщения поглощения иногда называют обращенным провалом Лэмба.

Рассмотрим явление качественно без формул.

Сильная световая волна перебрасывает молекулы с нижнего уровня на верхний и с верхнего на нижний. В результате переходов под действием света уменьшается разность заселенностей уровней:

$$(N_1 - N_2) \searrow.$$

Поглощение слабой встречной волны пропорционально этой разности заселенностей:

$\kappa \sim (N_1 - N_2)$, и, следовательно, поглощение убывает или, как говорят, насыщается.

Насыщается поглощение, так как сильная волна просветляет среду не только для слабой встречной волны, но и для самой себя. Поглощение уменьшается так, что интенсивность поглощенного света стремится к некоторой константе, при стремлении интенсивности падающей на среду световой волны к бесконечности, когда частота Раби больше как однородной ширины спектральной линии $R > 2\Gamma$, так и неоднородной (доплеровской) ширины $R > 2kU$.

Нас будет интересовать случай неоднородно уширенной линии поглощения, когда лоренцевская ширина линии поглощения каждой молекулы 2Γ гораздо меньше доплеровской ширины $2kU$ спектральной линии поглощения среды. То есть $\Gamma \ll kU$.

В случае неоднородного уширения спектральной линии насыщение поглощения сильной световой волной с частотой ω_1 наступает не для всех молекул, а только для тех, для которых сдвинутая эффектом Доплера частота света совпадает с частотой поглощающего перехода:

$$\omega_1 - kV_{1z} = \omega_{21}.$$

Как говорят, эти молекулы находятся в резонансе со световым полем.

Встречная световая волна с частотой ω_2 поглощается молекулами с лучевой скоростью V_{2z} такой, что

$$\omega_2 + kV_{2z} = \omega_{21}.$$

Доплеровский сдвиг частоты $+kV_{2z}$ имеет другой знак для встречной волны по сравнению со сдвигом для сильной волны $-kV_{1z}$.

Просветление среды сильной световой волной для слабой встречной волны происходит в том случае, когда обе волны поглощаются одним и тем же набором молекул:

$$V_{1z} = V_{2z}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \omega_1 - kV_{1z} = \omega_{21} \\ \omega_2 + kV_{2z} = \omega_{21} \\ V_{1z} = V_{2z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 - kV_z = \omega_{21} \\ \omega_2 + kV_z = \omega_{21} \end{cases} \Rightarrow \omega_{21} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Рассмотрим задачу количественно в приближении скоростных уравнений.

Проведем рассмотрение в два этапа.

1). На первом этапе рассмотрим изменение среды под действием сильной световой волны.

2). На втором этапе рассмотрим уменьшение поглощения слабой волны средой измененной сильной волной.

Начнем рассмотрение со второй части.

Пусть κ_2 — коэффициент поглощения слабой световой волны.

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa_{2V_z} dV_z = \int_{-\infty}^{+\infty} (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \sigma_2(V_z) \cdot dV_z = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} N_{0V_z} \cdot (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)) \cdot \sigma_2(V_z) \cdot dV_z. \end{aligned}$$

Подставим сюда

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{0V_z} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi U}} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \\ \rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \left(1 - \frac{G_1}{1+G_1} \cdot \mathcal{L} \left(\frac{\Omega_1}{\Gamma \sqrt{1+G_1}} \right) \right), \\ \sigma_2(V_z) = \sigma_0 \mathcal{L} \left(\frac{\Omega_2}{\Gamma} \right) \end{array} \right.$$

где второе равенство является решением 1-го этапа задачи и описывает изменение среды сильной световой волной. Подставим и получим

$$\kappa_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{\sqrt{\pi U}} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \cdot (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \left(1 - \frac{G_1}{1+G_1} \cdot \mathcal{L} \left(\frac{\Omega_1}{\Gamma \sqrt{1+G_1}} \right) \right) \cdot \sigma_0 \mathcal{L} \left(\frac{\Omega_2}{\Gamma} \right) \cdot dV_z.$$

Здесь Ω_1 — частотная расстройка первой световой волны в системе отсчета молекулы относительно частоты поглощающего перехода, Ω_2 — расстройка встречной слабой волны, G_1 — фактор насыщения или безразмерная мощность сильной световой волны.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \omega_1 - kV_z - \omega_{21} \\ \Omega_2 = \omega_2 + kV_z - \omega_{21} \\ G_1 = \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \cdot \frac{R_1^2}{2\Gamma} \\ R_1 = \frac{p\mathcal{E}_{01}}{\hbar} \end{array} \right.$$

Здесь R_1 — частота Раби для сильной световой волны.

В предельном случае неоднородного уширения спектральной линии $\Gamma \ll kU$ интеграл для коэффициента поглощения слабой волны κ_2 можно взять.

В выражении

$$\kappa_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{\sqrt{\pi U}} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \cdot (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \left(1 - \frac{G_1}{1+G_1} \cdot \mathcal{L} \left(\frac{\Omega_1}{\Gamma \sqrt{1+G_1}} \right) \right) \cdot \sigma_0 \mathcal{L} \left(\frac{\Omega_2}{\Gamma} \right) \cdot dV_z$$

сомножитель $\mathcal{L} \left(\frac{\Omega_2}{\Gamma} \right)$ играет роль дельта-функции Дирака, так как при условии

$\Gamma \ll kU$ оказывается, что лоренцевский контур $\mathcal{L} \left(\frac{\Omega_2}{\Gamma} \right)$ — это узкий пик, как функция от V_z .

В той области значений лучевой скорости, в которой $\mathcal{L}\left(\frac{\Omega_2}{\Gamma}\right)$ заметно

отличается от нуля $\Omega_2 \approx 0$, другой сомножитель $e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$ можно считать почти постоянной величиной, которую можно вынести за знак интеграла.

$$\Omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 + kV_z - \omega_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_z = \frac{\omega_{21} - \omega_2}{k} \quad \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \approx e^{-\left(\frac{\omega_2 - \omega_{21}}{kU}\right)^2}$$

Тогда

$$x_2 = \frac{N_0}{\sqrt{\pi U}} e^{-\left(\frac{\omega_2 - \omega_{21}}{kU}\right)^2} \cdot (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \sigma_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{G_1}{1 + G_1} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_1}{\Gamma \sqrt{1 + G_1}}\right)\right) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_2}{\Gamma}\right) \cdot dV_z$$

Оставшийся интеграл можно разбить на два слагаемых:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(x) dx = \pi$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(y-x) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx \quad \text{— свертка двух лоренцевских контуров разной}$$

ширины.

В математике сверткой $(f \circ \varphi)$ двух функций f и φ называют следующий интеграл:

$$(f \circ \varphi)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-x) \cdot \varphi(x) \cdot dx.$$

Для вычисления свертки двух Лоренцев нужно подынтегральную функцию разложить на простые дроби:

$$\frac{1}{1+(x-y)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{A(x-y)+B}{1+(x-y)^2} + \frac{C\frac{x}{a}+D}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

где A, B, C, D — неизвестные функции от y и от a .

Каждый из 4-х получающихся интегралов при вычислении свертки двух Лоренцев можно взять. В результате получается

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(y-x) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx = \pi(B + aD) = \frac{\pi a}{1+a} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{y}{1+a}\right),$$

где B и D — функции от y и от a .

Свертка двух Лоренцев — это Лоренц суммарной ширины.

Подставим интегралы

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(x) dx = \pi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(y-x) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx = \pi \frac{a}{1+a} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{y}{1+a}\right) \end{cases}$$

в выражение для коэффициента поглощения пробной световой волны и получим

$$\kappa_2 = 4\pi^2 \cdot \frac{\omega_2 p^2 N_0 (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)}{c \hbar n_0 k U} \cdot e^{-\left(\frac{\omega_2 - \omega_{21}}{kU}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{G_1}{(1 + G_1 + \sqrt{1 + G_1})} \cdot \frac{(1 + \sqrt{1 + G_1})^2 \Gamma^2}{(\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_{21})^2 + (1 + \sqrt{1 + G_1})^2 \Gamma^2} \right).$$

В спектроскопии представляют интерес узкие резонансы насыщения поглощения, когда $G_1 \ll 1$. В этом приближении:

$$\kappa_2 = 4\pi^2 \cdot \frac{\omega_2 p^2 N_0 (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)}{c \hbar n_0 k U} \cdot e^{-\left(\frac{\omega_2 - \omega_{21}}{kU}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{G_1}{1 + \left(\frac{\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_{21}}{2\Gamma}\right)^2} \right).$$

Здесь ω_1 — частота сильной световой волны, ω_2 — частота слабой встречной световой волны, $G_1 = \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right) \cdot \frac{R_1^2}{2\Gamma}$ — фактор насыщения или безразмерная мощность сильной световой волны, $R_1 = \frac{p\mathcal{E}_{01}}{\hbar}$ — частота Раби для сильной световой волны.

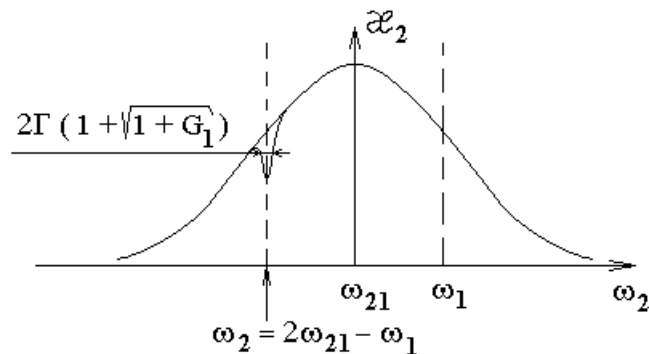
Резонанс просветления среды — это отрицательная добавка к коэффициенту поглощения световой волны.

Ширина резонанса при изменении ω_1 и постоянном значении ω_2 или при изменении ω_2 и постоянном значении ω_1 равна:

$$\Delta\omega = 2\Gamma \left(1 + \sqrt{1 + G_1}\right).$$

Ширина резонанса просветления среды равна сумме ширины провала Беннетта в шкале частот, который выжигает сильная световая волна, и ширины сечения поглощения слабой встречной волны. Контур суммарной ширины получается в результате свертки двух лоренцев: провала Беннетта и сечения поглощения.

Резонанс насыщения поглощения возникает при условии $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}$.



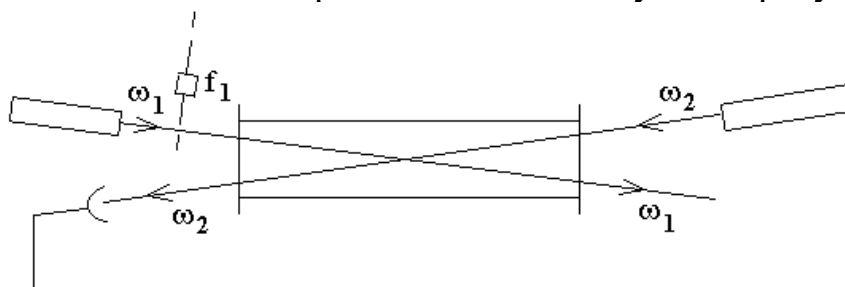
Еще раз коротко о механизме формирования резонанса насыщения поглощения. Сильная волна перебрасывает молекулы с одного уровня энергии на другой, уменьшая, таким образом, разность заселенностей $(N_1 - N_2)$. Поглощение слабой волны пропорционально этой разности $\kappa \sim (N_1 - N_2)$. Просветление среды происходит в том случае, когда две встречных волны поглощаются одним и тем же набором молекул с лучевой скоростью V_z :

$$\begin{cases} \omega_1 - kV_z = \omega_{21} \\ \omega_2 + kV_z = \omega_{21} \end{cases} \Rightarrow \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}.$$

Варианты спектроскопии насыщения поглощения.

1). Встречные волны разной частоты.

Оптическая схема опыта представлена на следующем рисунке:



Подразумевается, что угол между встречными волнами очень мал.

Прерыватель, он же модулятор, представляет собой вращающийся диск с прорезями, через которые проходит излучение лазера 1.

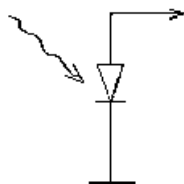
Если две световые волны нелинейно взаимодействуют в среде кюветы, то фототок приемника излучения слабой волны с частотой ω_2 модулирован на частоте f_1 прерываний света сильной волны ω_1 . Фототок модулирован на частоте f_1 , если при включении луча ω_1 изменяется поглощение луча ω_2 .

Обсудим теперь некоторые технические детали эксперимента.

В качестве приемника излучения света используется фотодиод, фоторезистор или ФЭУ — фотоэлектронный умножитель.

Чаще всего используется фотодиод, поэтому рассмотрим три варианта включения фотодиода в электрическую схему.

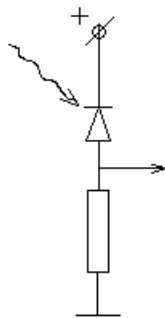
1). Режим фото ЭДС



При указанной полярности включения фотодиода под действием света на выходе образуется положительное напряжение $U_{вых} > 0$. В контакте *p-n* перехода есть двойной электрический слой, который создает контактную разность потенциалов и не пускает основные носители тока диффундировать из одного полупроводника в другой полупроводник. Под действием фотона внутри контактного слоя образуется пара электрон-дырка. Под действием поля в контактном слое электрон и дырка движутся так, что частично нейтрализуют заряды двойного электрического слоя. Контактная разность потенциалов уменьшается, это и есть напряжение с фотодиода.

Преимущество схемы — малые шумы. Недостаток — нелинейная зависимость напряжения на выходе от интенсивности света.

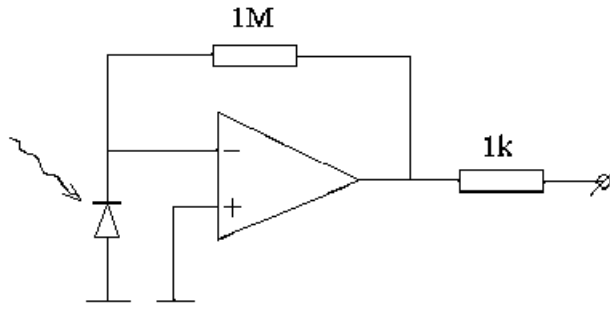
2). Режим включения с внешним источником напряжения.



Напряжение на выходе схемы линейно возрастает с ростом интенсивности света.

Преимущество схемы — линейность и большая чувствительность (высокий коэффициент передачи). Недостаток схемы — большие шумы.

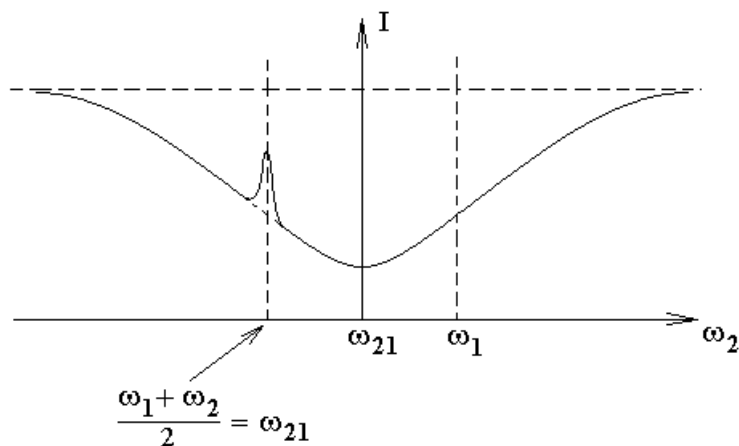
3). Режим короткого замыкания.



Преимущества схемы — высокая линейность, малые шумы, высокий коэффициент передачи. При указанной полярности включения фотодиода под действием света на выходе операционного усилителя образуется положительное напряжение $U_{вых} > 0$.

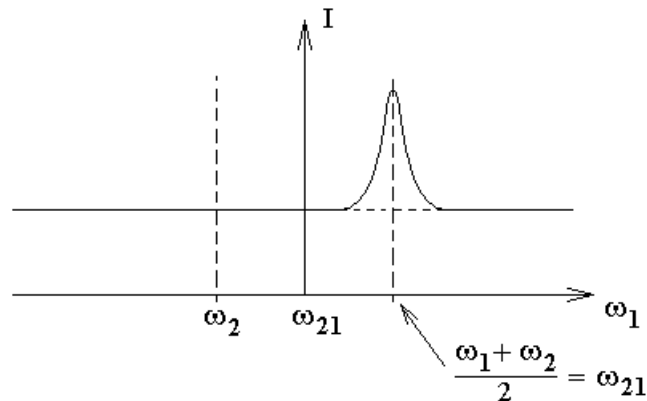
Рассмотрим зависимость интенсивности света на приемнике от частоты сильной волны ω_1 и от частоты слабой встречной волны ω_2 для начала без модуляции на частоте f_1 лазерного луча сильной волны ω_1 .

Пусть частота пробной волны ω_2 медленно изменяется. Тогда зависимость интенсивности света на приемнике от времени и, соответственно, от частоты ω_2 будет иметь вид широкого доплеровского контура линии поглощения (подразумевается, что $\Gamma \ll kU$) и узкого лоренцевского пика просветления среды на частоте, для которой частоты встречных волн симметрично расположены относительно частоты перехода $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}$.



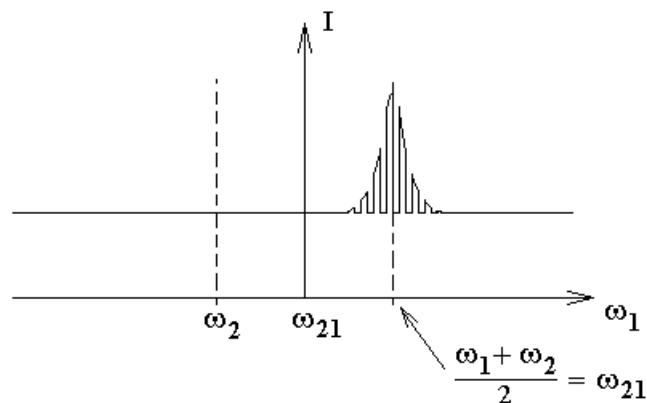
Теперь рассмотрим вариант регистрации резонанса, если частота пробной волны фиксирована $\omega_2 = const$. Тогда при изменении частоты насыщающей волны ω_1 интенсивность света на приемнике не изменяется до тех пор, пока не

будет выполнено условие $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}$, при котором обе встречные волны поглощаются одним и тем же набором молекул:



Здесь изображен более широкий резонанс только для большей наглядности следующего рисунка.

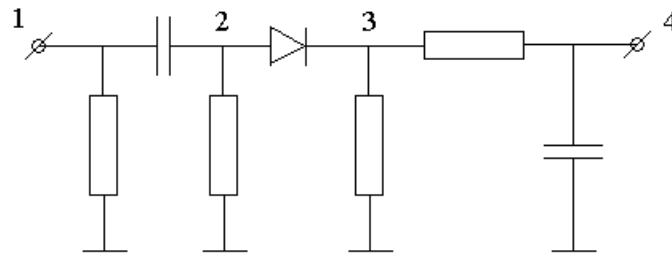
Если в этом втором варианте регистрации включить модуляцию сильной световой волны, то при линейном сканировании во времени частоты ω_1 сильной волны зависимость интенсивности на приемнике от времени будет иметь следующий вид:



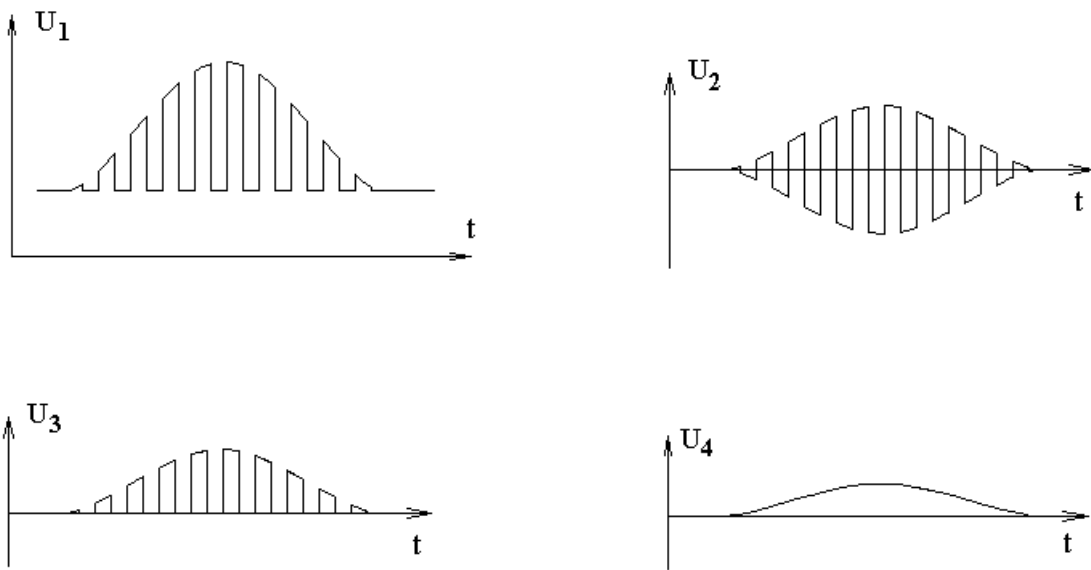
Обычно резонанс просветления среды очень мал и составляет один процент или еще меньше от величины постоянной подложки — засветки приемника. При этом даже незначительные шумы подложки существенно затрудняют регистрацию резонанса. Как говорят, резонанс тонет в шумах. В таком случае возникает задача выделения огибающей резонанса и исключения подложки из электрического сигнала фотоприемника.

Рассмотрим два способа выделения огибающей фототока.

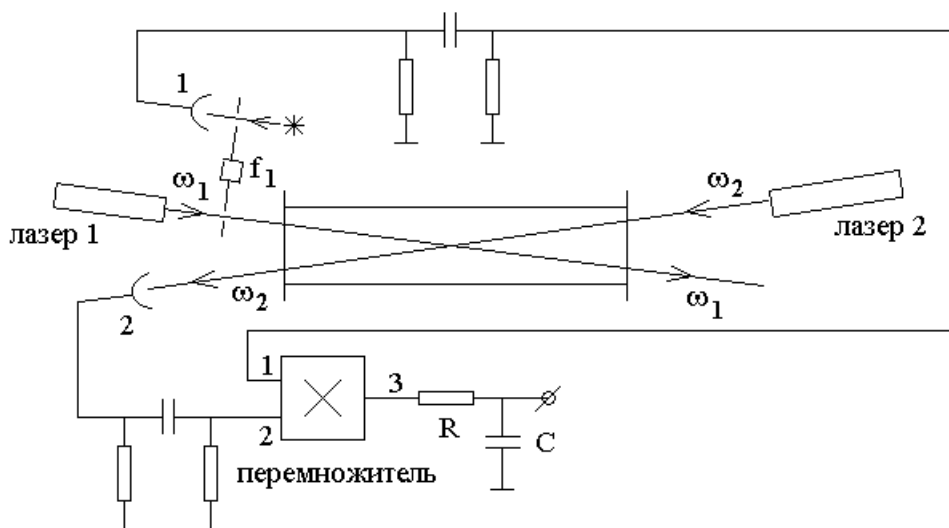
1-ый способ.



Рассмотрим напряжение, как функцию времени (при линейном сканировании частоты любого из лазеров) в четырех точках схемы, приведенной на рисунке выше. Обозначим эти напряжения, как U_1, U_2, U_3, U_4 .



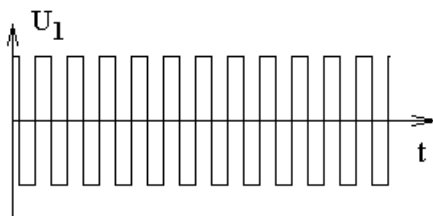
2-ой способ выделения огибающей — это синхронное детектирование сигнала.



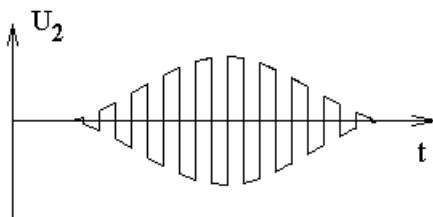
Синхронное детектирование сигнала происходит на аналоговом перемножителе сигналов. Перемножитель — это микросхема с двумя входами и одним выходом, не считая выводов питания и коррекции.

На первый вход перемножителя поступает сигнал с фотоприемника 1, на который попадает свет от светодиода, проходящий через прерыватель, который модулирует свет с частотой f_1 . С этой же частотой модулируется насыщающая световая волна ω_1 излучения лазера 1. Прерыватель, он же модулятор, представляет собой вращающийся диск с прорезями. Через прорези с одной стороны от оси диска проходит свет светодиода, через прорези с другой стороны — излучение лазера 1.

Напряжение с фотоприемника 1 после отсекающего конденсатором постоянной составляющей поступает на вход 1 перемножителя в качестве опорного сигнала. Зависимость напряжения опорного сигнала от времени имеет следующий вид:



На второй вход перемножителя через конденсатор, отсекающий постоянную составляющую, поступает полезный сигнал с фотоприемника 2. Этот сигнал на частоте модуляции f_1 появляется, только когда сильная световая волна ω_1 просветляет среду для слабой встречной волны ω_2 . Напряжение на втором входе перемножителя, как функция времени, имеет следующий вид:

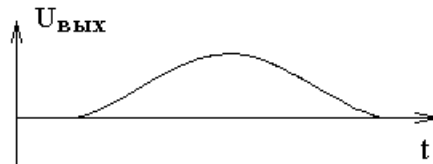


Для простоты анализа будем считать, что опорное напряжение принимает значения ± 1 . Тогда при перемножении с полезным сигналом отрицательные значения этого сигнала умножаются на -1 и становятся положительными. В результате зависимость напряжения на выходе перемножителя, как функция времени, имеет следующий вид:



Здесь на фронтах опорных прямоугольников остаются острые пики к нулевому значению напряжения. Эти пики связаны с тем, что фронты опорных прямоугольников не бесконечно крутые, и когда фронт прямоугольника проходит через ноль, произведение опорного и сигнального напряжений тоже равно нулю.

Чтобы убрать пики отрицательной полярности после перемножителя сигнал пропускают через сглаживающую RC -цепочку. В результате напряжение на выходе схемы, как функция времени, имеет следующий вид:



Синхронное детектирование, как второй способ выделения огибающей полезного сигнала, имеет два преимущества по сравнению с первым способом.

1. Синхронное детектирование позволяет отличить просветление среды от затемнения среды. Эта возможность представляет интерес, так как при взаимодействии двух световых волн с двумя связанными переходами возможно затемнение среды вместо ее просветления. Этот вопрос будет подробно обсуждаться в 4-ом варианте спектроскопии насыщения поглощения.

2. Синхронное детектирование позволяет получить более высокое отношение сигнал/шум путем уменьшения частотной полосы сигнала. Дело в том, что среднеквадратичное напряжение шумов пропорционально квадратному корню из частотной полосы сигнала $U_{шумов} \sim \sqrt{\Delta f}$. При синхронном детектировании полоса частот сигнала Δf связана с постоянной

RC -цепочки на выходе системы регистрации (смотри рисунок) $\Delta f = \frac{1}{2\pi RC}$.

Увеличивая, например, емкость конденсатора C , можно неограниченно уменьшать полосу частот Δf и шумовое напряжение $U_{шумов}$. Правда при этом время регистрации сигнала увеличивается пропорционально постоянной времени RC .

При обычном детектировании сигнала уменьшение полосы частот нужно производить до детектирования, так как на диоде, как и на любом нелинейном элементе, сигналы разных частот перемешиваются. В результате RC -цепочка, расположенная после диода, не может эффективно уменьшать шумовое напряжение.

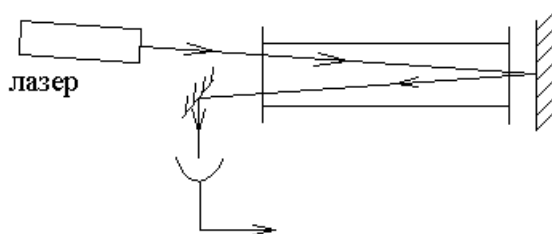
При обычном детектировании между приемником света и предложенной схемой детектирования ставят резонансный усилитель, который уменьшает полосу частот сигнала.

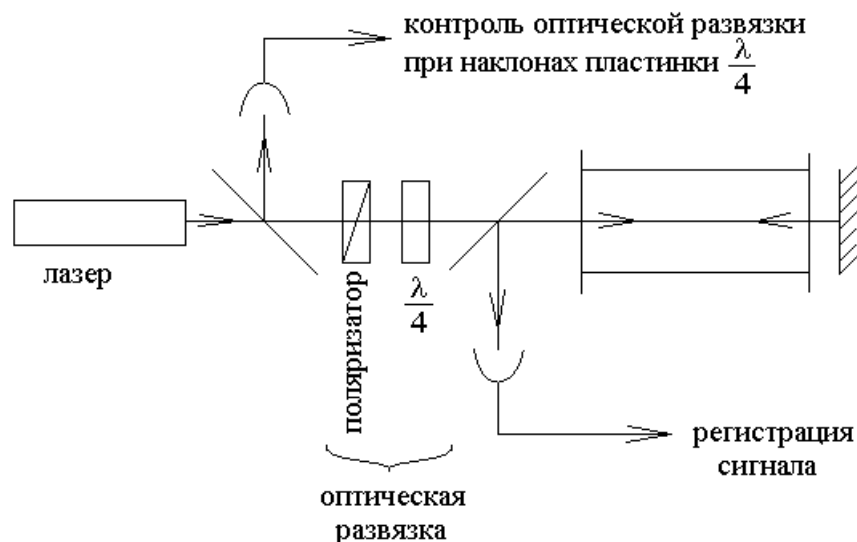
Уменьшение полосы частот пропускания резонансного усилителя затруднено тем, что при условии $\Delta f \ll f_{рез}$ усилитель становится капризным. У такого усилителя случайным образом изменяются во времени (плавают) такие параметры, как резонансная частота $f_{рез}$, полоса частотного пропускания Δf , величина усиления на резонансной частоте. Все это может сильно затруднить регистрацию сигнала. Так частота модуляции f_1 сильной световой волны может выйти за пределы полосы усиления резонансного усилителя $|f_1 - f_{рез}| > \Delta f$, и полезный сигнал пропадет. Это может произойти как в результате изменения параметров резонансного усилителя, так и в результате изменения частоты модуляции f_1 , например, из-за изменения силы трения в моторе, вращающем прерыватель луча лазера 1.

2). Встречные волны одинаковой частоты.

Встречные волны одинаковой частоты используются в традиционном варианте спектроскопии насыщения поглощения. В этом случае встречную слабую световую волну получают в результате отражения от зеркала сильной волны, прошедшей кювету с исследуемым газом.

На нижеследующих рисунках приведены два варианта оптической схемы эксперимента.





Второй вариант оптической схемы имеет два приемника лазерного излучения. Сигнал насыщения поглощения регистрируется в излучении, падающем на нижний приемник. Верхний приемник служит для контроля качества оптической развязки.

Представленная на рисунке оптическая развязка или оптический диод представляет собой последовательно расположенные друг за другом поляризатор и пластинку $\frac{\lambda}{4}$. Оси фазовой пластинки $\frac{\lambda}{4}$ и поляризатора ортогональны направлению лазерного луча. Фазовую пластинку поворачивают вокруг луча так, чтобы оси фазовой пластинки были направлены под углом 45° относительно оси поляризатора. В таком случае свет, пропущенный поляризатором, распадается на входе в фазовую пластинку на две световые волны с равными амплитудами и взаимно ортогональными поляризациями. На входе в фазовую пластинку эти две волны синфазны, а на выходе у них возникает оптическая разность хода $\frac{\lambda}{4}$, что соответствует разности фаз $\frac{\pi}{2}$. При сложении двух ортогональных колебаний с разностью фаз $\frac{\pi}{2}$ образуется вращение. По этой причине после прохождения пластинки $\frac{\lambda}{4}$ свет оказывается циркулярно поляризованным. Отраженная назад волна проходит пластинку $\frac{\lambda}{4}$ второй раз во встречном направлении. При этом колебания вдоль осей пластинки еще раз приобретают разность фаз $\frac{\pi}{2}$. Суммарная разность фаз становится равной π . В результате после второго прохождения пластинки $\frac{\lambda}{4}$ световая волна снова становится линейно поляризованной только в направлении ортогональном к направлению поляризации волны, падающей на

пластинку первый раз. Свет с поляризацией волны, идущей справа налево, не пропускает поляризатор оптической развязки. То есть свет свободно проходит через оптическую развязку слева направо и не проходит справа налево.

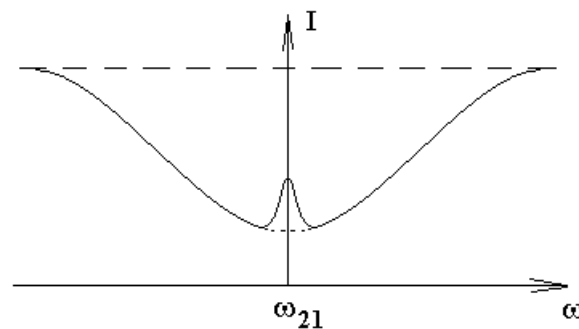
Оптическая развязка не пропускает отраженную назад световую волну обратно в резонатор лазера. Это нужно, потому что свет отраженный обратно в резонатор лазера сильно влияет на условия его генерации. Если отраженный свет оказывается в фазе со световой волной в резонаторе лазера, то мощность генерации возрастает, если в противофазе, то убывает. Если отраженный назад свет произвольным образом сдвинут по фазе относительно волны в резонаторе лазера, то он изменяет фазу, частоту и мощность генерации лазера. Казалось бы, пропускание зеркала лазера мало, и обратно в резонатор лазера проникает свет с малой мощностью, но проблема в том, что когерентные световые волны складываются по амплитуде, а не по мощности. Так, если мощности складываемых волн отличаются в 10000 раз, то амплитуды отличаются только в 100 раз. В результате при синфазном сложении волн суммарная амплитуда составляет 101 процент от амплитуды сильной волны, а при противофазном сложении 99 процентов. Изменению амплитуды света в два процента соответствует изменение мощности в четыре процента. В этом состоит так называемый эффект гетеродинного приема слабого сигнала. Уменьшение мощности световой волны может привести к тому, что усиление лазера окажется меньше потерь, и мощность генерации упадет до нуля. Если не подавлять отраженный назад свет, то частота и мощность генерации лазера становятся неустойчивыми.

Верхний приемник второй оптической схемы предназначен для контроля качества оптической развязки. Качество хорошее, если свет на этот приемник не попадает. Тонкая настройка оптической развязки осуществляется поворотами и наклонами пластинки $\frac{\lambda}{4}$. Поворотом пластики вокруг оптической оси добиваются угла 45^0 между осью фазовой пластинки и осью поляризатора. Наклонами плоскости фазовой пластинки незначительно изменяют оптическую длину пути луча в фазовой пластинке. Изменению оптической длины луча соответствует изменение толщины фазовой пластинки, которую нужно подобрать так, чтобы фазовая пластинка в точности оказалась пластинкой $\frac{\lambda}{4}$.

Можно сделать оптическую развязку не только на основе пластинки $\frac{\lambda}{4}$, но и на основе эффекта Фарадея. Пусть свет проходит вдоль оси стеклянного цилиндра, и пусть вдоль оси этого цилиндра включено постоянное магнитное поле. Из-за эффекта Фарадея в магнитном поле σ^+ и σ^- компоненты света (ось квантования выбрана вдоль магнитного поля) будут иметь разную фазовую скорость. Пусть к торцам рассматриваемого цилиндра приклеены поляризаторы, так что между осями поляризаторов угол составляет 45^0 . После первого поляризатора свет на входе в цилиндр имеет линейную поляризацию. Свет линейной поляризации представляет собой сумму σ^+ и σ^- компонент с

одинаковыми амплитудами. Эти компоненты распространяются в цилиндре с разной фазовой скоростью и на выходе из цилиндра имеют некоторый взаимный фазовый сдвиг. При сложении σ^+ и σ^- компонент с фазовым сдвигом получается линейно поляризованный свет, но поляризованный в другом направлении. Величину магнитного поля подбирают так, чтобы линейная поляризация света на выходе цилиндра составляла угол 45° по отношению к линейной поляризации на входе цилиндра. Так чтобы свет полностью проходил через поляризатор на выходе цилиндра. Если рассмотреть свет, идущий в обратном направлении, то после прохождения первого поляризатора компоненты σ^+ и σ^- опять имеют разные фазовые скорости и на выходе цилиндра линейная поляризация света снова получит поворот на 45° . Поворот будет в ту же сторону, что и при прямом распространении света через цилиндр. В ту же сторону относительно магнитного поля, а не относительно направления света. В результате окажется, что поляризатор на выходе цилиндра не пропускает свет, идущий во встречном направлении. То есть цилиндр с магнитным полем вдоль оси и двумя поляризаторами под углом 45° играет роль оптической развязки.

Мощность лазерного излучения дважды прошедшего кювету с исследуемым газом I , как функция частоты лазера ω , имеет следующий вид:



Здесь ω_{21} — центр линии поглощения среды. Зависимость мощности света на приемнике от частоты лазера имеет широкий провал доплеровской линии поглощения, в центре которого находится узкий пик просветления среды. Пик просветления — это и есть резонанс насыщения поглощения.

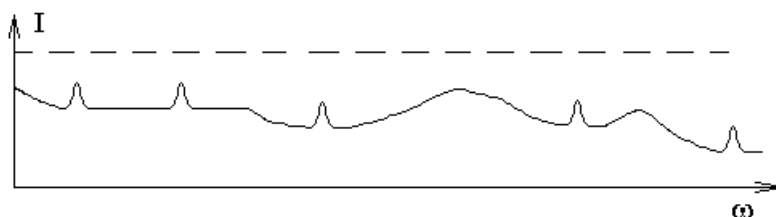
Резонанс формируется при симметричном расположении частот встречных световых волн относительно частоты поглощающего перехода $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}$. В рассматриваемом случае частоты встречных волн одинаковы $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Следовательно, условие резонанса преобразуется к виду $\omega = \omega_{21}$.

Ширина наблюдаемого резонанса $\Delta\omega = \Gamma(1 + \sqrt{1 + G_1})$ оказывается вдвое меньше, чем ширина резонанса в случае, когда одна из световых волн фиксирована по частоте.

Резонанс в коэффициенте поглощения слабой волны получается, как результат свертки провала Беннетта в разности заселенностей уровней и

сечения поглощения слабой волны. При изменении частоты генерации лазера провал Беннетта и сечение поглощения как бы наезжают по лучевой скорости молекул навстречу друг другу. Одновременное движение навстречу уменьшает вдвое ширину свертки.

Спектр поглощения молекул содержит много линий различных структур: колебательных, вращательных, кориолисовых, тонких, супертонких, сверхтонких. Каждая линия поглощения образует свой резонанс насыщения поглощения. Линии поглощения неразрешенные в обычной спектроскопии из-за доплеровского уширения спектральных линий могут иметь резонансы насыщения поглощения, достаточно разнесенные по частоте, для того чтобы резонансы не сливались друг с другом.



Совокупность резонансов насыщения поглощения образует так называемый спектр насыщенного поглощения. Некоторым резонансам этого спектра не соответствуют линии поглощения, но об этом подробнее расскажем в следующих вопросах.

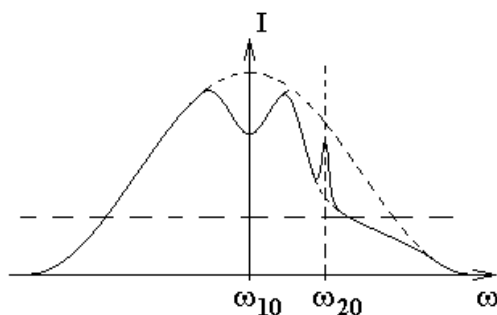
3). Внутррезонаторная спектроскопия насыщения поглощения.

Рассмотрим оптическую схему, в которой кювета с газом находится внутри резонатора лазера.



В резонаторе лазера есть две встречные волны, которые просветляют кювету друг для друга.

Зависимость мощности генерации такого лазера от частоты имеет примерно следующий вид:



Здесь широкий выпуклый контур с центром на частоте ω_{10} — это контур линии усиления среды уширенный эффектом Доплера. В центре контура линии усиления на рисунке изображен провал Лэмба.

Провал Лэмба имеет ту же природу, что и резонанс насыщения поглощения. Провал Лэмба — это резонанс в мощности генерации газового лазера с доплеровским уширением линии усиления, резонанс насыщения усиления среды вместо резонанса насыщения поглощения. Если частота света не совпадает с центром линии усиления, то встречные волны в резонаторе газового лазера усиливаются двумя разными наборами молекул с противоположными значениями проекции скорости на направление одной из двух волн. Когда частота света совпадает с центром линии усиления, то обе встречные волны усиливаются одним и тем же набором молекул с нулевой лучевой скоростью. Один набор молекул вместо двух означает меньше усиливающих свет молекул, отсюда меньше усиление среды, и меньше мощность генерации.

На правом склоне контура усиления изображен широкий провал поглощения с центром на частоте ω_{20} , который уменьшает мощность генерации лазера. Контур линии поглощения уширен эффектом Доплера. В центре контура линии поглощения на частоте ω_{20} наблюдается узкий резонанс насыщения поглощения встречными световыми волнами. Это насыщение поглощения приводит к резонансному увеличению мощности генерации на частоте ω_{20} .

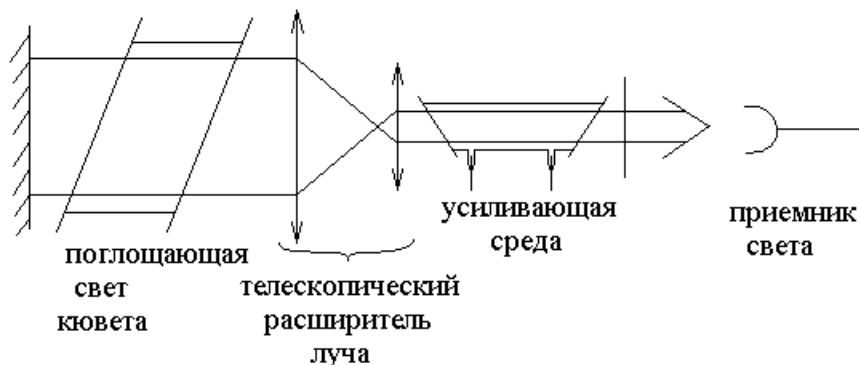
Основное преимущество внутрирезонаторной спектроскопии насыщения поглощения состоит в высоком контрасте резонансов. И действительно. Если считать, что по оси Y графика отложена не мощность генерации, а усиление среды с учетом потерь в поглощающей кювете, то график почти не изменится. Если же уровень потерь резонатора поднять до пунктирной горизонтальной линии, то генерация останется только на тех частотах, где усиление выше потерь. То есть новый график зависимости мощности генерации лазера от его частоты — это график над пунктирной горизонтальной линией.

Как видно из рисунка, резонанс насыщения поглощения при этом может иметь практически стопроцентный контраст. Постоянная подложка под резонансом может быть гораздо меньше самого резонанса.

Недостаток внутрирезонаторной спектроскопии насыщения поглощения — большое уширение мощностью лазерного луча. Ширина резонанса насыщения поглощения слабой пробной волны сильной встречной волной равна $\Delta\omega = \Gamma(1 + \sqrt{1 + G_1})$, а в рассматриваемом внутрирезонаторном варианте примерно одинаковой мощности встречных волн ширина резонанса примерно равна $\Delta\omega = \Gamma(\sqrt{1 + G_2} + \sqrt{1 + G_1}) = 2\Gamma\sqrt{1 + G}$. Мощность луча внутри резонатора лазера в $\frac{1}{1 - R}$ раз больше мощности излучения лазера, где R — коэффициент отражения по мощности для выходного зеркала лазера. Например, если $R = 0.97$, то мощность света внутри лазера в 30 раз выше мощности излучения лазера.

Большое уширение резонансов означает низкое спектральное разрешение.

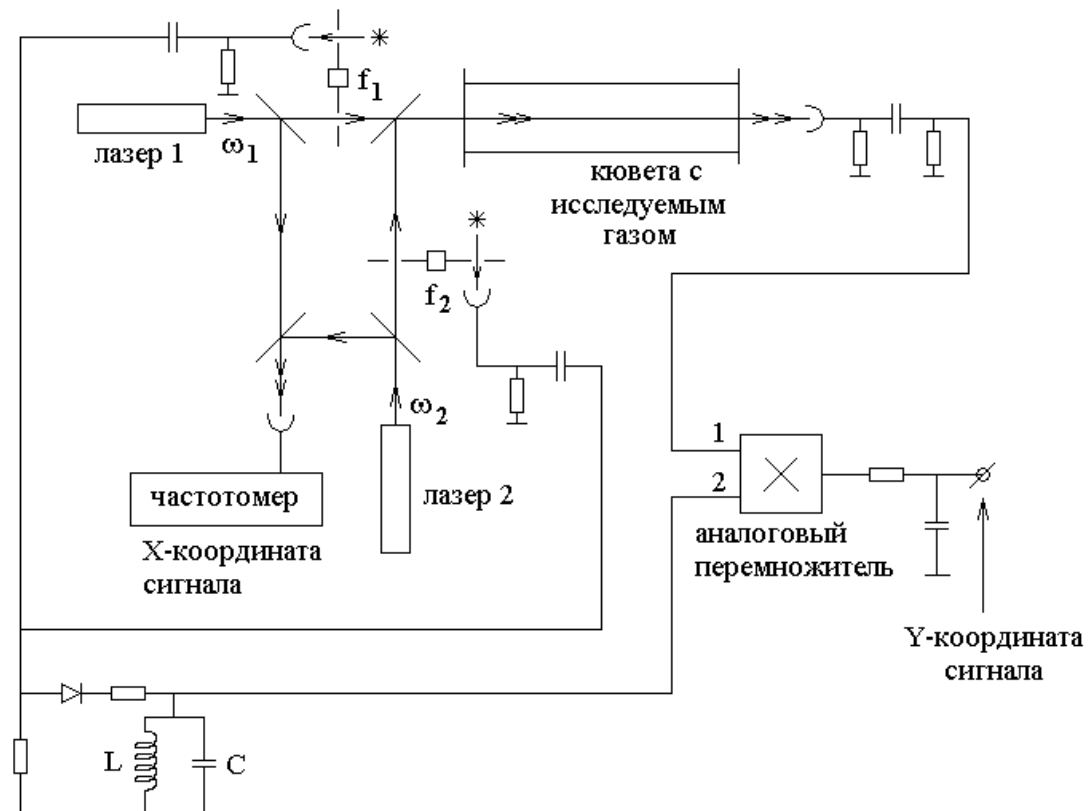
Чтобы уменьшить уширение резонансов мощностью света можно применить внутрирезонаторный телескопический расширитель луча. Телескопический расширитель луча — это две линзы с общим фокусом. Коэффициент расширения равен отношению фокусных расстояний двух линз.



Расширение пучка лучей в резонаторе лазера уменьшает интенсивность света и уменьшает уширение резонанса насыщения поглощения.

4). Однонаправленные световые волны и резонанс насыщения поглощения (двойной оптический резонанс).

Рассмотрим принципиальную схему экспериментальной установки для наблюдения резонансов насыщения поглощения в однонаправленных световых волнах:



Здесь излучение лазера 1 модулируется прерывателем с частотой f_1 , а излучение лазера 2 модулируется с частотой f_2 . Излучение обоих лазеров направляется через кювету в один и тот же приемник света. Сигнал с приемника через конденсатор подается на вход 1 аналогового перемножителя для синхронного детектирования.

На второй вход перемножителя подается опорный сигнал с частотой $f_1 - f_2$.

Для формирования опорного сигнала около каждого из двух прерывателей установлен светодиодный источник света и приемник его излучения. Излучение светодиода попадает на приемник через прерыватель, который модулирует свет светодиода с той же частотой, с которой модулируется и излучение соответствующего лазера. После каждого из двух приемников электрический сигнал проходит через конденсатор, который отсекает постоянное напряжение. За конденсатором получают прямоугольники с частотой f_1 для одного прерывателя и f_2 для второго прерывателя.

Прямоугольные напряжения с этими двумя частотами складываются на резисторе в левом нижнем углу схемы. После резистора напряжение проходит через диод и другой резистор на параллельный колебательный контур. Резонансная частота контура настроена на частоту $f_1 - f_2$, то есть

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi(f_1 - f_2).$$

На диоде, как на нелинейном элементе, формируются все возможные комбинационные частоты $m_1 f_1 \pm m_2 f_2$ из частот f_1 и f_2 , где m_1 и m_2 — целые числа. Колебательный контур выделяет из всех комбинационных частот синусоиду со своей резонансной частотой $f_1 - f_2$.

Перемножитель умножает эту синусоиду на сигнал с приемника лазерного излучения, расположенного в правом верхнем углу схемы. Произведение напряжений после усреднения RC -цепочкой равно Фурье образу напряжения с приемника лазерного излучения на частоте опорного сигнала $f_1 - f_2$. То есть на выходе схемы, обозначенном как "Y-координата сигнала", формируется постоянное напряжение пропорциональное амплитуде сигнала на частоте $f_1 - f_2$ в интенсивности света прошедшего кювету с исследуемым газом.

Если кювета пустая и приемник лазерного излучения линейный, то в напряжении с приемника присутствуют только частоты f_1 , f_2 и их гармоники, других комбинационных частот в сигнале с приемника быть не должно. Если кювета заполнена исследуемым газом, то в напряжении с приемника появляется составляющая на частоте $f_1 - f_2$ только в результате нелинейного взаимодействия световых волн в кювете с исследуемым газом. Рассматриваемое нелинейное взаимодействие — это просветление среды друг для друга двумя однонаправленными световыми волнами.

Рассмотрим подробнее, как формируется сигнал на частоте $f_1 - f_2$ в мощности световой волны прошедшей кювету с исследуемым газом.

Пусть интенсивность на выходе из кюветы $I_{вых}$ произвольным образом зависит от интенсивностей волн $I_{1вх}$, $I_{2вх}$ обоих лазеров на входе в кювету. Ограничимся аппроксимацией этой произвольной зависимости в виде суммы линейной зависимости и квадратичной нелинейности в виде произвольной квадратичной формы. Тогда получим:

$$I_{вых} = aI_{1вх} + bI_{2вх} + \alpha I_{1вх}^2 + \beta I_{1вх} I_{2вх} + \gamma I_{2вх}^2.$$

Нас будет интересовать только одно слагаемое $\beta I_{1вх} I_{2вх}$ в правой части равенства, которое, как окажется, и содержит интересующую нас зависимость с частотой $f_1 - f_2$.

Для простоты рассуждений будем считать, что интенсивность каждого лазера модулируется не прямоугольниками, а гармонически. Тогда интенсивность излучения первого лазера на входе в кювету следующим образом зависит от времени:

$I_{1вх} = I_0 (1 + \cos(2\pi f_1 t))$, где единица добавлена, так как интенсивность не может быть отрицательной величиной.

Аналогично, интенсивность второго лазера на входе в кювету имеет вид:

$$I_{2вх} = I_0 (1 + \cos(2\pi f_2 t)).$$

Тогда интересующее нас слагаемое в интенсивности на выходе из кюветы будет равно:

$$\beta I_{1ex} I_{2ex} = \beta I_0 (1 + \cos(2\pi f_1 t)) \cdot I_0 (1 + \cos(2\pi f_2 t)).$$

Если раскрыть произведение сумм в правой части равенства, то нас будет интересовать только слагаемое с произведением косинусов:

$$\beta I_0^2 \cdot \cos(2\pi f_1 t) \cdot \cos(2\pi f_2 t) = \frac{\beta I_0^2}{2} \cos(2\pi(f_1 + f_2)t) + \frac{\beta I_0^2}{2} \cos(2\pi(f_1 - f_2)t).$$

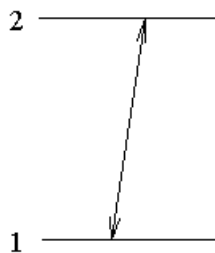
Нас интересует только второе слагаемое $\frac{\beta I_0^2}{2} \cos(2\pi(f_1 - f_2)t)$ в правой части равенства. Это слагаемое представляет собой колебания интенсивности с частотой $f_1 - f_2$ на выходе из кюветы, которое возникает в результате нелинейного взаимодействия однонаправленных световых волн в кювете с исследуемым газом.

Синхронный детектор, роль которого играет аналоговый перемножитель, формирует на выходе схемы постоянное напряжение пропорциональное амплитуде $\frac{\beta I_0^2}{2}$ колебаний интенсивности на выходе из кюветы с частотой $f_1 - f_2$. Это напряжение представляет собой Y-координату экспериментальной кривой.

X-координата экспериментальной кривой формируется из показаний частотомера и представляет собой частоту биений двух лазеров.

Двухуровневая схема.

Рассмотрим две однонаправленные световые волны, которые взаимодействуют со средой в двухуровневом приближении.



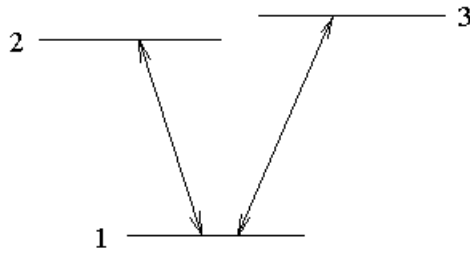
Пусть обе волны взаимодействуют с одним и тем же набором молекул с лучевой скоростью V_z такой, что

$$\begin{cases} \omega_1 - kV_z = \omega_{21} \\ \omega_2 - kV_z = \omega_{21} \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = \omega_2.$$

Если в пределах доплеровской ширины линии поглощения находится несколько поглощающих переходов, то их резонансы совпадают, что удобно для изучения ширины и формы резонансов насыщения поглощения. Форма резонансов не искажается неразрешенной структурой спектральной линии.

V-схема уровней энергии.

Рассмотрим два связанных перехода с общим нижним уровнем энергии.



Пусть первая волна резонансно взаимодействует с переходом ω_{21} , а вторая волна — с переходом ω_{31} . Тогда первая волна обедняет уровень 1 (уменьшает заселенность N_1), а поглощение второй волны пропорционально разности заселенностей $(N_1 - N_3)$. То есть поглощение второй волны уменьшается. Аналогично, вторая волна обедняет уровень 1, уменьшая поглощение первой волны. То есть волны просветляют среду друг для друга.

$$\begin{cases} \omega_1 - k_1 V_z = \omega_{21} \\ \omega_2 - k_2 V_z = \omega_{31} \end{cases}, \text{ где } k = \frac{\omega}{c}, \text{ тогда } \begin{cases} \omega_1 \left(1 - \frac{V_z}{c}\right) = \omega_{21} \\ \omega_2 \left(1 - \frac{V_z}{c}\right) = \omega_{31} \end{cases} \quad \text{и } \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}}.$$

Во многих случаях особый интерес представляет условие, когда разность частот $\omega_{32} = \frac{E_3 - E_2}{\hbar}$ двух оптических переходов ω_{31} и ω_{21} имеет порядок доплеровской ширины спектральной линии $\omega_{32} \approx kU \ll \omega_{21}$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, $U = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$ — наиболее вероятная скорость молекул, k_B — постоянная Больцмана.

Из неравенства $\omega_{32} \ll \omega_{21}$ следует, что для двух световых волн $k_1 \approx k_2 = k$.

$$\begin{cases} \omega_1 - kV_z = \omega_{21} \\ \omega_2 - kV_z = \omega_{31} \end{cases} \Rightarrow \omega_2 - \omega_1 = \omega_{32}.$$

Если же первая волна резонансно взаимодействует с переходом ω_{31} , а вторая волна — с переходом ω_{21} . Тогда

$$\begin{cases} \omega_1 - kV_z = \omega_{31} \\ \omega_2 - kV_z = \omega_{21} \end{cases} \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = \omega_{32}.$$

Оба рассмотренных случая — это варианты формирования двойного оптического резонанса, так как две световые волны находятся в резонансе с двумя поглощающими переходами для одних и тех же молекул.

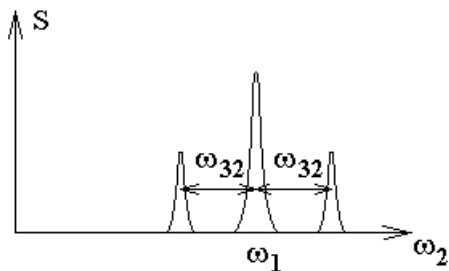
Кроме двойных оптических резонансов в V-схеме уровней наблюдаются резонансы, в которых две световые волны резонансно взаимодействуют с одним и тем же переходом, например ω_{21} :

$$\begin{cases} \omega_1 - kV_z = \omega_{21} \\ \omega_2 - kV_z = \omega_{21} \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = \omega_2,$$

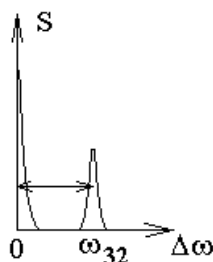
или ω_{31} :

$$\begin{cases} \omega_1 - kV_z = \omega_{31} \\ \omega_2 - kV_z = \omega_{31} \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = \omega_2.$$

Рассмотрим, как выглядят результаты эксперимента по наблюдению резонансов насыщения поглощения однонаправленных световых волн. Пусть S — сигнал синхронного детектирования в представленной ранее принципиальной схеме экспериментальной установки. Тогда сигнал S , как функция частоты генерации одного из двух лазеров будет иметь следующий вид:

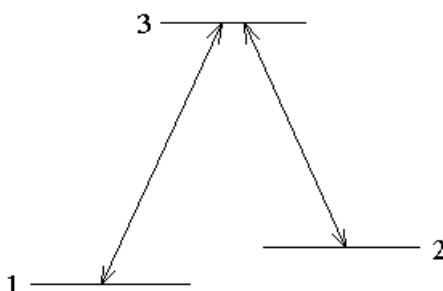


Обычно строится график зависимости сигнала S от показаний частотомера, регистрирующего модуль разности частот двух лазеров. В таком случае экспериментальная кривая будет иметь следующий вид:



Λ-схема уровней энергии.

Рассмотрим два связанных перехода с общим верхним уровнем энергии.



Пусть разность частот $\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ двух оптических переходов ω_{31} и ω_{32} имеет порядок доплеровской ширины спектральной линии $\omega_{21} \approx kU \ll \omega_{31}$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, $U = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$ — наиболее вероятная скорость молекул, k_B — постоянная Больцмана.

Рассмотрим только двойные оптические резонансы:

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 - kV_z = \omega_{31} \\ \omega_2 - kV_z = \omega_{32} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = \omega_{21} \quad \text{— условие формирования}$$

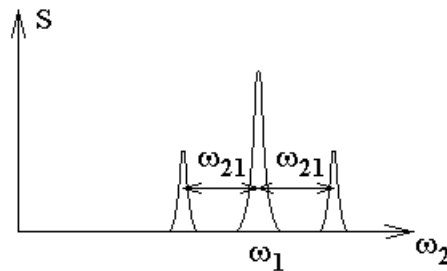
резонанса и

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 - kV_z = \omega_{32} \\ \omega_2 - kV_z = \omega_{31} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_2 - \omega_1 = \omega_{21} \quad \text{— условие формирования}$$

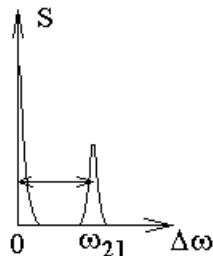
резонанса.

Кроме того, присутствуют резонансы насыщения поглощения $\omega_1 = \omega_2$, когда обе волны взаимодействуют с одним и тем же переходом.

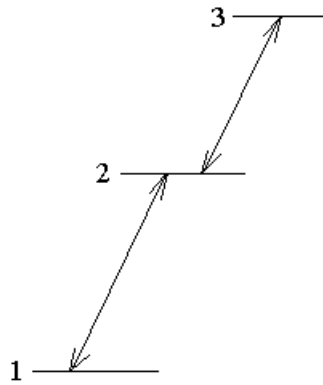
Сигнал S синхронного детектирования, как функция частоты ω_2 имеет вид аналогичный виду сигнала для V схемы уровней:



Если измеряется зависимость сигнала синхронного детектирования S от частоты биений двух лазеров $\Delta\omega$, то экспериментальный сигнал примет следующий вид:



Каскадная схема уровней энергии.



В каскадной схеме уровней энергии кроме резонансов $\omega_1 = \omega_2$, соответствующих каждому из переходов ω_{21} и ω_{32} , должны быть двойные резонансы затемнения среды.

Рассмотрим только двойные резонансы:

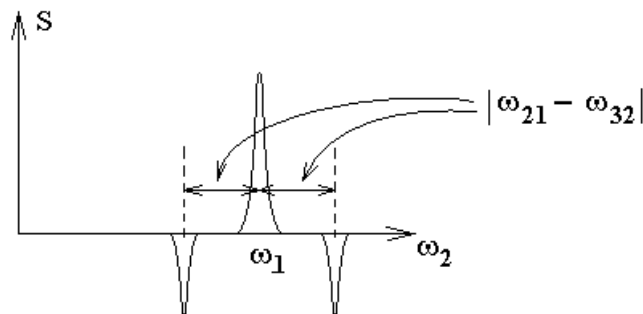
$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 - kV_z = \omega_{21} \\ \omega_2 - kV_z = \omega_{32} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = \omega_{21} - \omega_{32} \quad \text{— условие формирования}$$

резонанса и

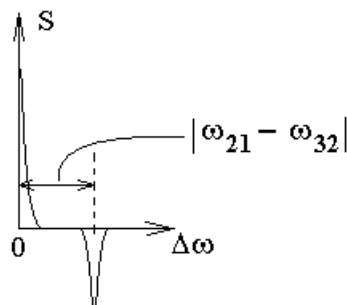
$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 - kV_z = \omega_{32} \\ \omega_2 - kV_z = \omega_{21} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_2 - \omega_1 = \omega_{21} - \omega_{32} \quad \text{— условие формирования}$$

резонанса.

Сигнал синхронного детектирования, как функция частоты ω_2 имеет следующий вид:



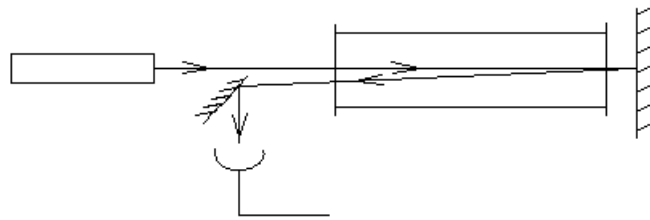
Если измеряется зависимость сигнала синхронного детектирования от частоты биений двух лазеров, то



5). Перекрестные резонансы насыщения поглощения во встречных световых волнах.

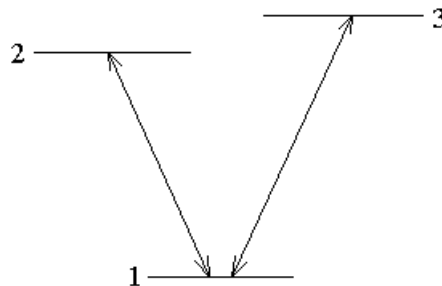
Перекрестный резонанс — это тот же двойной оптический резонанс, что и в однонаправленных световых волнах, только во встречных волнах одинаковой частоты.

Как уже рассматривалось выше для регистрации резонансов насыщения поглощения во встречных световых волнах одинаковой частоты возможно использование следующей оптической схемы:



Варианты уровней энергии те же, что и в случае однонаправленных световых волн:

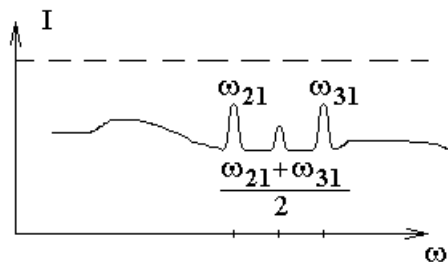
а). V-схема:



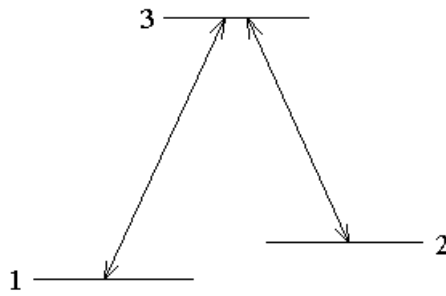
$$\left. \begin{aligned} \omega - kV_z &= \omega_{21} \\ \omega + kV_z &= \omega_{31} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega = \frac{\omega_{21} + \omega_{31}}{2} \quad \text{— условие формирования}$$

резонанса.

Экспериментальная зависимость мощности световой волны на приемнике, как функция частоты генерации лазера будет иметь следующий вид:



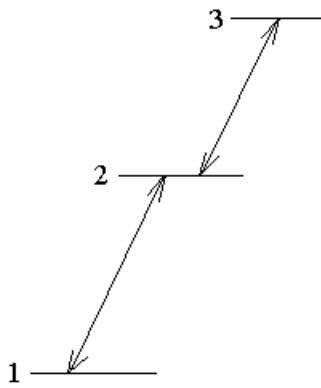
б). Λ-схема.



$$\left. \begin{array}{l} \omega - kV_z = \omega_{31} \\ \omega + kV_z = \omega_{32} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = \frac{\omega_{31} + \omega_{32}}{2} \quad \text{— условие формирования}$$

резонанса.

в). Каскадная схема с резонансами затемнения.

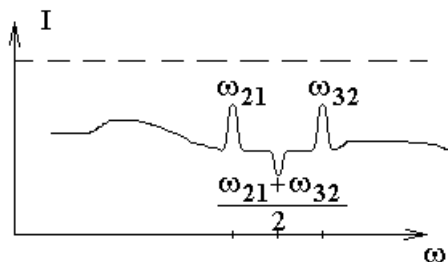


Поглощение на переходе ω_{32} включается только при заселении уровня 2, а заселение уровня 2 происходит при поглощении на переходе ω_{21} .

$$\left. \begin{array}{l} \omega - kV_z = \omega_{21} \\ \omega + kV_z = \omega_{32} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = \frac{\omega_{21} + \omega_{32}}{2} \quad \text{— условие формирования}$$

резонанса.

Экспериментальная зависимость мощности световой волны на приемнике, как функция частоты генерации лазера будет иметь следующий вид:



Резонанс затемнения во встречных световых волнах экспериментально не наблюдался.

Во всех схемах уровней энергии перекрестный резонанс находится ровно посередине между родительскими резонансами.

