

## Резонанс насыщения плотности возбужденных частиц (продолжение).

Рассмотрим количественное описание резонанса насыщения плотности возбужденных частиц в приближении скоростных равнений.

$$\begin{cases} \dot{N}_{1V_z} + \gamma_1 N_{1V_z} = \gamma_1 N_{1V_z}^0 - (N_{1V_z} - N_{3V_z}) \cdot \left( J_1 \cdot \sigma_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_1}{\Gamma}\right) + J_2 \cdot \sigma_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_2}{\Gamma}\right) \right) \\ \dot{N}_{3V_z} + \gamma_3 N_{3V_z} = \gamma_3 N_{3V_z}^0 + (N_{1V_z} - N_{3V_z}) \cdot \left( J_1 \cdot \sigma_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_1}{\Gamma}\right) + J_2 \cdot \sigma_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_2}{\Gamma}\right) \right) \end{cases}$$

Здесь скоростные уравнения записаны для распределений по лучевой скорости  $V_z$  заселенностей  $N_1$  и  $N_3$  уровней энергии 1 и 3 с учетом двух встречных световых волн 1 и 2 с плотностями потока фотонов  $J_1$  и  $J_2$ , сечениями поглощения света  $\sigma_0 \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_1}{\Gamma}\right)$  и  $\sigma_0 \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_2}{\Gamma}\right)$ , частотными расстройками  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \omega - kV_z - \omega_{31} \\ \Omega_2 = \omega + kV_z - \omega_{31} \end{cases}$$

Напомним, что плотность потока фотонов  $J$  связана с интенсивностью света  $I$  соотношением  $J = \frac{I}{\hbar\omega}$ .

Решим скоростные уравнения в стационарном случае, когда производные по времени от заселенностей равны нулю  $\dot{N}_1 = \dot{N}_3 = 0$ . Тогда вместо двух дифференциальных уравнений получаем два линейных уравнения относительно двух неизвестных  $N_{1V_z}$  и  $N_{3V_z}$ .

Введем для краткости следующее обозначение:

$$\xi = J_1 \cdot \sigma_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_1}{\Gamma}\right) + J_2 \cdot \sigma_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_2}{\Gamma}\right).$$

Тогда решение системы скоростных уравнений для интересующей нас величины  $N_{3V_z}$  будет иметь следующий вид:

$$N_{3V_z} = N_{3V_z}^0 + \frac{\xi}{\gamma_3} \cdot \frac{N_{1V_z}^0 - N_{3V_z}^0}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_3}\right)\xi}$$

Зависимость  $N_{3V_z}$  от  $\xi$  нелинейная.

Найдем теперь заселенность верхнего уровня  $N_3$ , как интеграл от распределения заселенности по лучевой скорости:

$$N_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{3V_z} dV_z.$$

Чтобы получить аналитический результат при интегрировании, рассмотрим решение для подынтегральной функции  $N_{3V_z}$  в случае слабых интенсивностей встречных световых волн  $\xi \ll \gamma_i$  (в этом случае получается узкий резонанс, что и представляет интерес), когда нелинейная зависимость  $N_{3V_z}$  от  $\xi$  представлена отрезком ряда Тейлора:

$$N_{3V_z} = N_{3V_z}^0 + \left( N_{1V_z}^0 - N_{3V_z}^0 \right) \cdot \frac{\xi}{\gamma_3} \cdot \left( 1 - \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_3} \right) \xi \right).$$

Здесь зависимость  $N_{3V_z}$  от  $\xi$  квадратичная.

Интеграл, как и само распределение заселенности  $N_{3V_z}$ , будет иметь три слагаемых с подынтегральными выражениями соответственно пропорциональными:  $\sim 1$ ,  $\sim \xi$ ,  $\sim \xi^2$ . Обсудим каждое из этих трех слагаемых в отдельности.

Слагаемое пропорциональное единице  $\sim 1$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_{3V_z}^0 dV_z = N_3^0$$

дает заселенность уровня три в нулевом световом поле в результате баланса затухания и накачки, например, в случае разряда в газе или в результате тепловых столкновений молекул.

Слагаемое пропорциональное  $\sim \xi$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( N_{1V_z}^0 - N_{3V_z}^0 \right) \cdot \frac{\xi}{\gamma_3} \cdot dV_z$$

имеет под интегралом две дельта-функции относительно узких Лоренцев  $\mathcal{L}\left(\frac{\Omega_1}{\Gamma}\right)$  и  $\mathcal{L}\left(\frac{\Omega_2}{\Gamma}\right)$  внутри сомножителя  $\xi = J_1 \cdot \sigma_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_1}{\Gamma}\right) + J_2 \cdot \sigma_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_2}{\Gamma}\right)$ .

Интеграл от произведения некоторой функции  $f(x)$  на дельта-функцию Дирака  $\delta(x)$  равен значению первой функции в той точке, в которой аргумент дельта-функции обращается в ноль:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x - x_0) \cdot dx = f(x_0).$$

Подынтегральный сомножитель

$$N_{1V_z}^0 - N_{3V_z}^0 = \left( N_1^0 - N_3^0 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}U} \cdot e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$$

представляет собой распределение Максвелла по лучевой скорости молекул. Интеграл от произведения этого сомножителя на дельта-функцию в нашем

случае Лоренца равен этому сомножителю при таком значении  $V_z$ , при котором аргумент дельта-функции равен нулю:

$$\begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega - kV_z - \omega_{31} = 0 \\ \omega + kV_z - \omega_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_z = +\frac{\omega - \omega_{31}}{k} \\ V_z = -\frac{\omega - \omega_{31}}{k} \end{cases}.$$

В результате:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( N_{1V_z}^0 - N_{3V_z}^0 \right) \cdot \frac{\xi}{\gamma_3} \cdot dV_z = \sqrt{\pi} \left( N_1^0 - N_3^0 \right) \frac{\Gamma}{\gamma_3} \frac{\sigma_0}{kU} (J_1 + J_2) e^{-\left( \frac{\omega - \omega_{31}}{kU} \right)^2}.$$

Это изменение заселенности верхнего уровня за счет доплеровской линии поглощения.

Обсудим теперь интеграл, в котором подынтегральное выражение пропорционально  $\sim \xi^2$ . Соответствующий интеграл имеет вид:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_3} \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_3} \right) \left( N_{1V_z}^0 - N_{3V_z}^0 \right) \xi^2 dV_z$$

Сомножитель

$$\xi^2 = J_1^2 \cdot \sigma_0^2 \cdot \mathcal{L}^2 \left( \frac{\Omega_1}{\Gamma} \right) + 2J_1J_2 \cdot \sigma_0^2 \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega_1}{\Gamma} \right) \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega_2}{\Gamma} \right) + J_2^2 \cdot \sigma_0^2 \cdot \mathcal{L}^2 \left( \frac{\Omega_2}{\Gamma} \right)$$

содержит два квадрата Лоренцев, которые ведут себя, как дельта-функции, и произведение Лоренцев.

Интегралы от квадратов Лоренцев, как и интегралы просто от Лоренцев,

дают величину пропорциональную  $e^{-\left( \frac{\omega - \omega_{31}}{kU} \right)^2}$ . Причем в рассматриваемом нами случае малой интенсивности света  $\xi \ll \gamma_3$  интегралом от квадратов Лоренцев можно просто пренебречь по сравнению с интегралом от самих Лоренцев.

Интеграл от произведения двух Лоренцев — свертка Лоренцев

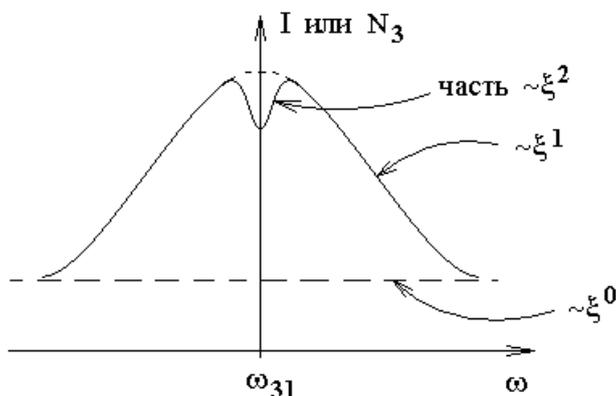
$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_3} \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_3} \right) \left( N_{1V_z}^0 - N_{3V_z}^0 \right) 2J_1J_2 \cdot \sigma_0^2 \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega_1}{\Gamma} \right) \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega_2}{\Gamma} \right) dV_z,$$

наезжающих друг на друга по лучевой скорости при изменении частоты лазера, равен Лоренцу той же ширины  $2\Gamma$  в шкале частот:

$$-\frac{\Gamma}{\sqrt{\pi}kU} J_1J_2\sigma_0^2 \frac{1}{\gamma_3} \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_3} \right) \left( N_1^0 - N_3^0 \right) e^{-\left( \frac{\omega - \omega_{31}}{kU} \right)^2} \mathcal{L} \left( \frac{\omega - \omega_{31}}{\Gamma} \right).$$

Этот провал лоренцевской формы и является резонансом плотности возбужденных частиц.

В таком случае заселенность верхнего уровня  $N_3$ , как и пропорциональная заселенности интенсивность флуоресценции  $I$  с уровня 3 на частоте  $\omega_{32}$ , как функция частоты лазера, будет иметь следующий вид

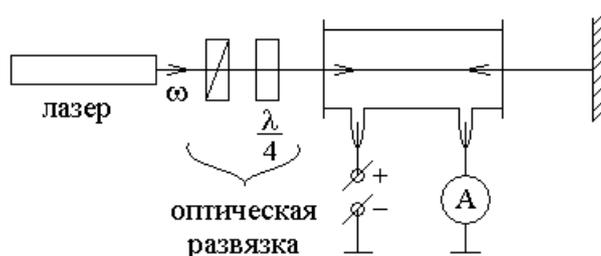


Здесь

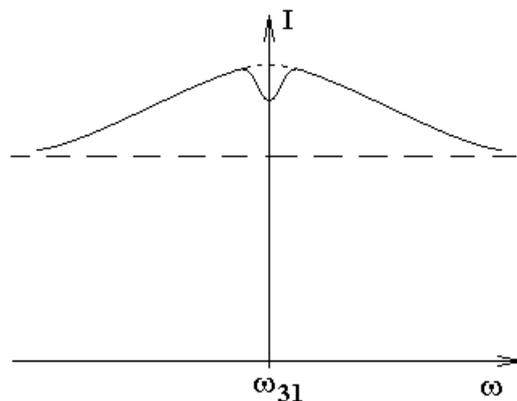
$$N_3 = N_3^0 + \sqrt{\pi} (N_1^0 - N_3^0) \frac{\Gamma}{\gamma_3} \frac{\sigma_0}{kU} e^{-\left(\frac{\omega - \omega_{31}}{kU}\right)^2} \left( J_1 + J_2 - J_1 J_2 \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_3} \right) \frac{\sigma_0}{\pi} \mathcal{L} \left( \frac{\omega - \omega_{31}}{\Gamma} \right) \right)$$

### Оптогальванический метод регистрации резонанса плотности возбужденных частиц.

Преимущество оптогальванического метода регистрации резонанса плотности возбужденных частиц состоит в том, что при такой регистрации не требуется приемник излучения. Схема опыта представлена на следующем рисунке:



Резонанс плотности возбужденных частиц наблюдается в зависимости тока разряда от частоты генерации лазера и имеет следующий вид:



Объяснение резонанса плотности возбужденных частиц в токе разряда состоит в следующем. Чем больше атомов или молекул в разрядной трубке находится на верхнем уровне энергии, тем эффективнее происходит ионизация газа электронным ударом. Чем эффективнее происходит ионизация, тем больше ионов и электронов в разряде, и тем меньше сопротивление разряда. Чем меньше сопротивление разрядной трубки, тем больше ток разряда.

В результате оказывается, что к току разряда есть добавка пропорциональная заселенности верхнего уровня энергии. Резонанс плотности частиц на верхнем уровне энергии наблюдается в токе разряда.

### Эталонны частоты и длины.

Первоначально секунда — промежуток времени между двумя ударами сердца.

С незапамятных времен 1 секунда равна  $\frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60}$  части суток.

Возможно, что первоначально роль метра играл британский ярд — расстояние от кончика носа до кончика среднего пальца вытянутой в сторону руки британского монарха 1 ярд  $\approx 0.91$  м (10-й век).

В 1668—1675 годах метр пытались привязать к длине маятника с полупериодом 1 секунда. Получился разный метр на разных широтах.

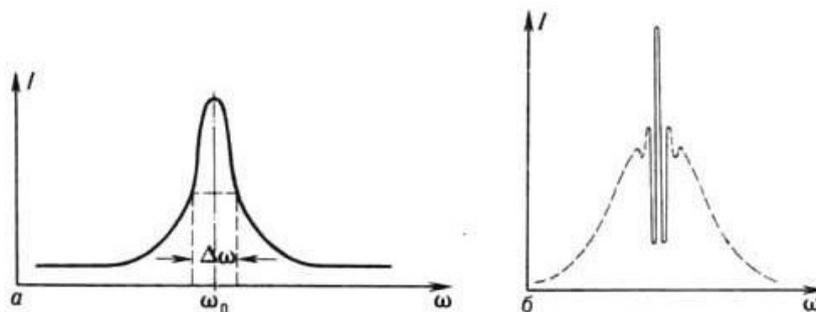
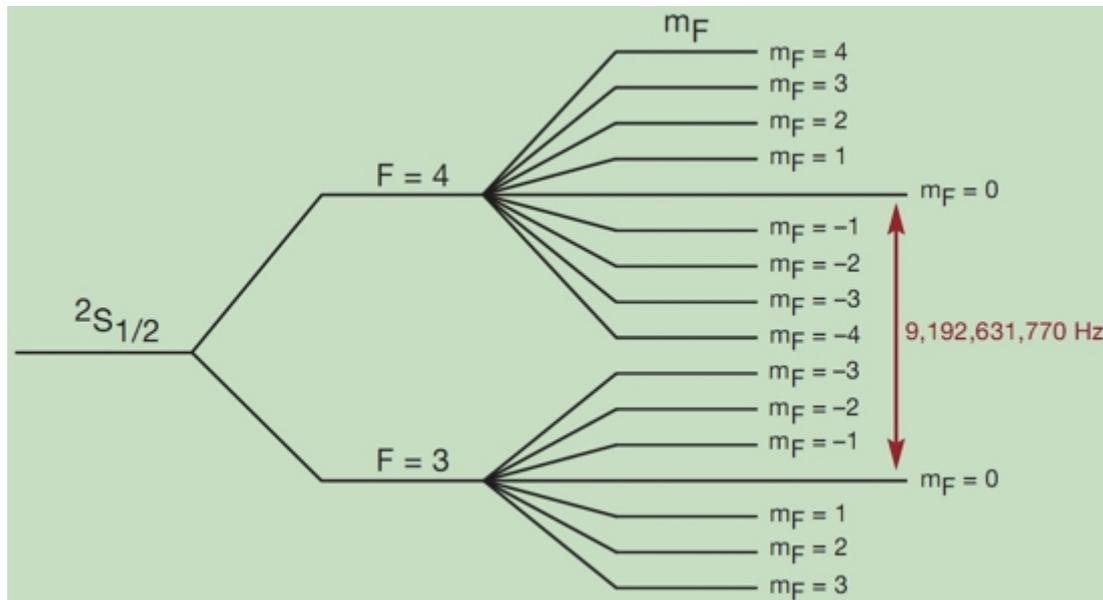
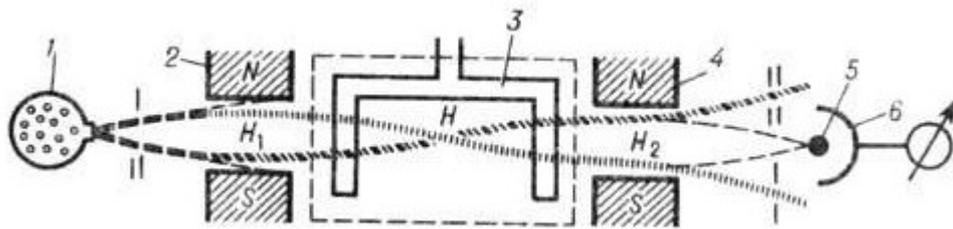
С 1792 года 1 метр равен  $\frac{1}{40\,000\,000}$  части парижского меридиана.

С 1889 года принят платиновый эталон метра.

С 1960 года 1 секунда равна определенной части 1900-го года.

С 1960 года 1 метр равен 1 650 763.73 длин волн в вакууме излучения между уровнями энергии  $2p_{10}$  и  $5d_5$  атома криптона  $\text{Kr}^{86}$ .

С 1967 года принят цезиевый стандарт частоты (и времени) на магнитных подуровнях цезия  $\text{Cs}^{133}$ :  $\nu_0 = 9\,192\,631\,770 \text{ Гц}$ . Воспроизводимость  $\frac{\delta\nu}{\nu} < 10^{-11}$ .



Форма спектральной линии: а-неискажённой; б-наблюдаемой в случае П-образного резонатора.

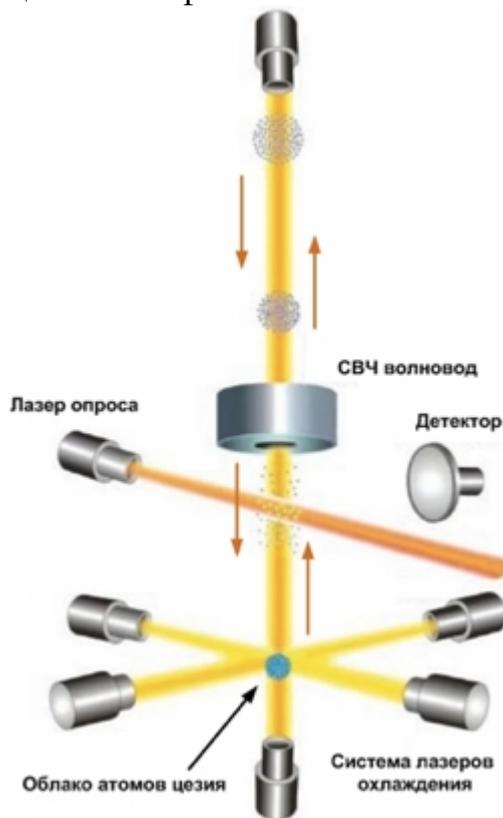
Первое неоднородное магнитное поле пролетают только атомы на подуровнях  $m_F = 0$ . На остальных подуровнях атомы слишком сильно отклоняются от первоначальной траектории и попадают на полюса магнита. Атомы на подуровнях  $m_F = 0$  тоже отклоняются в неоднородном поле, только мало. На нижнем уровне  $F = 3$  атомы летят по траектории I, а на верхнем уровне  $F = 4$  атомы летят по траектории II. На приемник попадают только те атомы, которые в первом магнитном поле были на одном уровне, а во втором — на другом, то есть атомы, которые испытали переход в СВЧ поле.

С 1983 года эталоны частоты и длины совмещены. В качестве скорости света в пустоте принято неподлежащее уточнению значение:  $c = 299\,792\,458 \frac{M}{c}$ .

При этом в оптическом диапазоне частотный репер получается с помощью радиооптического частотного моста. В оптическом диапазоне репером частоты служила частота генерации гелий-неонового лазера стабилизированного по

резонансу насыщения поглощения в ячейке с метаном: He-Ne / CH<sub>4</sub>. Длина волны генерации примерно  $\lambda \approx 3.39 \text{ мкм}$ . Частота:  $\nu = 88\,376\,181\,603\,000 \text{ Гц}$ .

В настоящее время эталоном частоты служит цезиевый эталон частоты на основе так называемого цезиевого фонтана.



Принципиальная схема фонтанных часов, разработанных в Национальной лаборатории стандартов США. Шесть инфракрасных лазеров охлаждают небольшое цезиевое облако до миллионных долей Кельвина. Лазеры выключают примерно на секунду, но нижний лазер отключают чуть позже других лазеров. В результате облако атомов цезия подбрасывают вверх и направляют его к микроволновой камере. Облако пролетает камеру дважды. Если частота электромагнитных колебаний в камере становится резонансной, то максимальное число атомов цезия в облаке переходят в возбужденное состояние. Излучение лазера опроса поглощается только из возбужденного состояния атома. В случае максимального поглощения света лазера опроса и флуоресценция вбок облака при выходе из камеры будет максимальной. Точность таких часов оценивается в 1 секунду на 20 млн лет. Иллюстрация: NIST

Подробнее смотрите нобелевскую лекцию по физике 2005 года:

Дж.Л.Холл. Определение и измерение оптических частот: перспективы оптических частот - и не только. // УФН, 2006, Т.176, N12, С.1353-1367.

Там же смотрите вопросы, связанные с режимом синхронизации лазерных мод, световой пулей, спектром оптической гребенки фемтосекундных стабилизированных лазеров на кристалле титаната сапфира. Лазер активно стабилизируется в режиме целочисленного отношения несущей частоты и частоты следования импульсов.

Подробнее о цезиевом фонтане смотрите работу:

### **Стабильность и воспроизводимость частоты генерации лазера.**

И стабильность, и воспроизводимость частоты генерации — это величины вида  $\frac{\delta\nu}{\nu}$ .

В случае определения стабильности частоты величина  $\delta\nu$  — это так называемая вариация Аллана. Она вычисляется следующим образом. Пусть  $\nu_1$  — среднее значение частоты генерации лазера за некоторый промежуток времени  $\tau$ , а  $\nu_2$  — среднее значение частоты генерации за следующий соседний промежуток времени той же самой длительности  $\tau$ . Тогда

$$\delta\nu \equiv \sqrt{\frac{\langle (\nu_1 - \nu_2)^2 \rangle}{2}}.$$

Для определения воспроизводимости частоты генерации лазера  $\delta\nu$  не связана с приведенной выше формулой. В этом случае  $\delta\nu$  — это среднеквадратичная разность частот двух максимально одинаково изготовленных в разное время и в разных местах стабилизированных лазеров.

Лучшие параметры стабильности и воспроизводимости частоты генерации достигнуты на 2003 год на основе He-Ne лазера с ячейкой CH<sub>4</sub> ( $\lambda \approx 3.39$  мкм) и Nd:YAG (лазер на алюмо-иттриевом гранате Y<sub>3</sub>Al<sub>5</sub>O<sub>12</sub> с добавками неодима Nd<sup>3+</sup> и удвоением частоты на нелинейном кристалле) с ячейкой <sup>127</sup>I<sub>2</sub> ( $\lambda \approx 532$  нм). Воспроизводимость около  $2 \cdot 10^{-13}$ , стабильность  $5 \cdot 10^{-15}$  при времени усреднения  $\tau \approx 10$ –100 с. Подробнее смотрите в обзоре:

Е. В. Бакланов, П. В. Покасов. Оптические стандарты частоты и фемтосекундные лазеры. // Квантовая электроника. 2003. Т.33. N.5. С.383-400.

### **Активная стабилизация частоты генерации лазера.**

Частота генерации лазера связана с длиной волны его излучения соотношением  $\lambda\nu = \frac{c}{n}$ . Длина волны излучения определяется тем, что на длине

резонатора  $L$  укладывается целое число полуволн  $L = m \frac{\lambda}{2}$ . Таким образом, шумы длины резонатора превращаются в шумы частоты его генерации.

Медленные шумы или дрейфы длины резонатора возникают в результате температурных изменений из-за теплового расширения тел. Быстрые шумы могут быть связаны с акустическими колебаниями зеркал резонатора. Кроме того, электрические шумы системы накачки или создания инверсии заселенностей создают шумы оптической длины резонатора и на низких и на высоких частотах.

Устранение этих и других типов шумов частоты генерации лазера важно для любых точных измерений с использованием лазера.

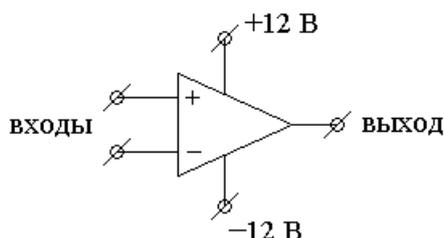
Активная стабилизация частоты генерации лазера позволяет значительно уменьшить шумы частоты.

-----  
Операционный усилитель (ОУ).

Активная стабилизация любого параметра системы имеет много общих моментов. Стабилизация достигается путем введения отрицательной обратной связи, которая при случайном шумовом изменении параметра посылает на вход системы сигнал, частично компенсирующий шумовое изменение.

Рассмотрим основные принципы активной стабилизации на примере работы операционного усилителя. Операционный усилитель обычно работает с отрицательной обратной связью.

Операционный усилитель — это микросхема с двумя входами и одним выходом, если не считать контактов, по которым подводится электрическое питание усилителя.



Хороший и дешевый (дежурный) операционный усилитель TL071, две штуки за один доллар.

Напряжение на выходе операционного усилителя равно усиленной в миллионы раз разности напряжений на его входах:

$$U_{\text{вых}} = \alpha(U_+ - U_-), \text{ где } \alpha \approx 10^6 \gg 1 \text{ — коэффициент усиления.}$$

-----  
Анализ основных принципов работы ОУ с отрицательной обратной связью.

Анализ работы любой схемы с операционным усилителем возможен на основе двух соображений.

1). Напряжения на двух входах ОУ практически равны друг другу:

$$U_- = U_+,$$

так как если входные напряжения заметно неравны, то в миллион раз усиленная их разность окажется за пределами динамического диапазона выходного напряжения ОУ. Динамический диапазон ограничен двумя напряжениями питания ОУ.

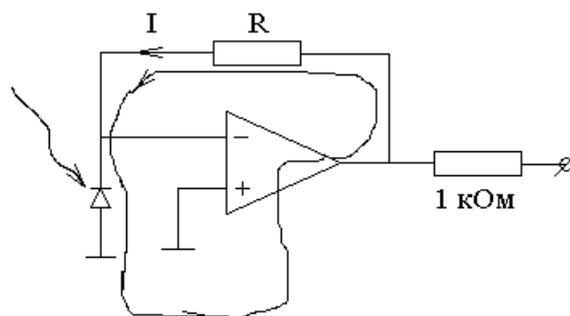
2). Входные токи ОУ пренебрежимо малы:

$$I_{\text{вх}_-} = I_{\text{вх}_+} = 0.$$

ОУ разрабатываются так, чтобы минимизировать входные токи. Тем не менее, обычно входной ток ОУ отличен от нуля даже при нулевом напряжении на входе, поэтому каждый вход ОУ обязательно должен быть связан с общим проводом схемы хотя бы через большое сопротивление.

Преобразователь фототок — напряжение на основе ОУ.

Проанализируем работу типовой схемы включения фотодиода:



Под действием света в фотодиоде возникает фототок пропорциональный мощности света. Этот ток не может протекать через "-" вход операционного усилителя. Следовательно, весь фототок протекает через резистор обратной связи сопротивлением  $R$ . Типовое значение сопротивления  $R = 1 \text{ МОм}$ .

Плюс-вход ОУ соединен с общим проводом схемы, поэтому  $U_+ = 0$ . Из условия  $U_- = U_+$  следует, что и на минус-входе ОУ напряжение тоже близко к нулю  $U_- = 0$ .

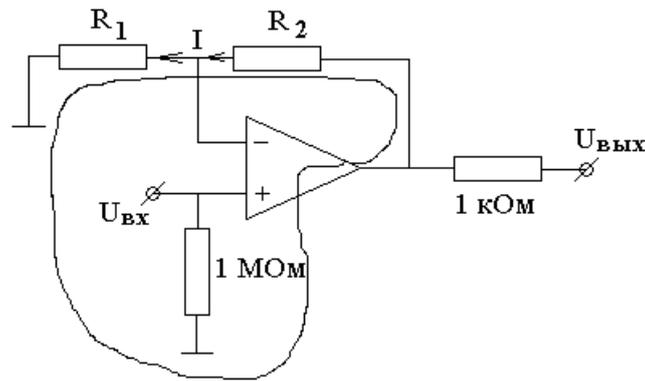
В таком случае напряжение на фотодиоде близко к нулю. То есть фотодиод работает в так называемом режиме короткого замыкания. В этом режиме фотодиод обладает высокой линейностью преобразования мощности света в фототок и малыми шумами.

На левом краю резистора с сопротивлением  $R$  нулевое напряжение  $U_- = 0$  относительно общего провода схемы. В таком случае на правом краю этого резистора напряжение равно  $RI$ , так как через резистор протекает фототок  $I$ .

Напряжение на правом краю резистора  $R$  совпадает с напряжением на выходе ОУ и практически совпадает с напряжением на выходе схемы. Резистор сопротивлением  $1 \text{ кОм}$  включен между выходом ОУ и выходом всей схемы для подавления возбуждения генерации в петле обратной связи ОУ. Дело в том, что к выходу ОУ обычно нельзя подключать емкость больше  $20 \text{ нФ} = 20 \cdot 10^{-12} \text{ Фарад}$ . Иначе поворот фазы на  $RC$ -цепочке, где  $R$  — выходное сопротивление ОУ, может сделать на высоких частотах отрицательную обратную связь положительной. Включение в схему резистора  $1 \text{ кОм}$  позволяет подключать к выходу схемы коаксиальный кабель осциллографа без нарушения работы схемы. Емкость коаксиального кабеля имеет величину порядка  $100 \text{ пф}$ .

#### Усилитель напряжения на ОУ.

Проанализируем работу простейшего усилителя напряжения на ОУ:



Плюс-вход ОУ соединен с общим проводом схемы через большое сопротивление 1 МОм, чтобы входные токи плюс-входа гарантированно могли достигнуть общего провода схемы.

Напряжение на входе схемы равно напряжению на плюс-входе ОУ  $U_+ = U_{вх}$ . С учетом равенства  $U_- = U_+$  получаем  $U_- = U_{вх}$ .

Напряжение минус-входа ОУ приложено к резистору сопротивлением  $R_1$ . Тогда сила тока через этот резистор

$$I = \frac{U_-}{R_1} = \frac{U_{вх}}{R_1}.$$

Ток минус входа ОУ пренебрежимо мал. Тогда весь ток  $I = \frac{U_{вх}}{R_1}$

протекает через резистор сопротивлением  $R_2$ . При этом падение напряжения на обоих резисторах равно напряжению на выходе ОУ:

$$U_{вых} = (R_1 + R_2)I = (R_1 + R_2) \frac{U_{вх}}{R_1} \quad \Rightarrow$$

$$U_{вых} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot U_{вх}.$$

Отношение напряжений на выходе и на входе схемы по определению равно коэффициенту передачи схемы по напряжению:

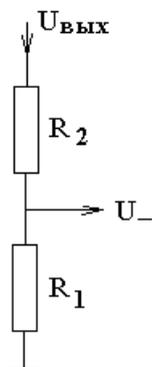
$$K_U \equiv \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

Основные параметры системы стабилизации на примере стабилизации напряжения  $U_-$  на уровне напряжения  $U_+$  в схеме усилителя напряжения на ОУ.

ОУ многократно усиливает разность напряжений на плюс и минус входах:

$U_{вых} = \alpha(U_+ - U_-)$ , где  $\alpha \approx 10^6$  — коэффициент передачи ОУ со входа на выход.

Часть напряжения с выхода ОУ с делителя напряжения, собранного на сопротивлениях  $R_2$  и  $R_1$ , поступает на минус-вход ОУ в качестве сигнала отрицательной обратной связи:



С выхода на минус-вход поступает часть напряжения  $\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ . Тогда

$U_- = \beta U_{\text{вых}}$ . Величину  $\beta$  называют коэффициентом передачи с выхода на минус-вход.

Произведение коэффициентов передачи со входа на выход и с выхода на минус-вход называют коэффициентом передачи петли обратной связи:

$$K_0 \equiv \alpha\beta,$$

где индекс 0 — это намек на петлю.

Величину  $U_+ - U_-$  называют сигналом ошибки. Это величина, которую система стабилизации стремится уменьшить до нуля.

Подставим в формулу  $U_- = \beta U_{\text{вых}}$  выражение  $U_{\text{вых}} = \alpha(U_+ - U_-)$  и получим:

$$U_- = \alpha\beta(U_+ - U_-) = K_0(U_+ - U_-) \quad \Rightarrow \quad U_- = K_0(U_+ - U_-) \quad \Rightarrow$$

$$U_- = \frac{K_0}{1 + K_0} U_+ \quad \Rightarrow \quad U_+ - U_- = \frac{1}{1 + K_0} U_+ \quad \Rightarrow$$

$$U_+ - U_- = \frac{1}{1 + K_0} U_{\text{вх}}.$$

Здесь  $U_+ - U_-$  — неотслеженная часть входного возмущения  $U_{\text{вх}}$  системы стабилизации.

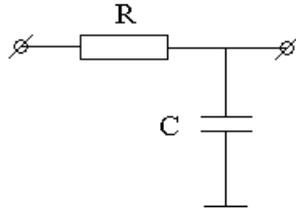
Относительная часть неотслеженного напряжения:

$$\varepsilon \equiv \frac{U_+ - U_-}{U_{\text{вх}}} = \frac{1}{1 + K_0}.$$

Тогда

$1 + K_0$  — коэффициент стабилизации системы с обратной связью.

-----  
Коэффициент передачи  $K_0$  может быть комплексной величиной. Так, например, коэффициент передачи  $RC$ -цепочки:



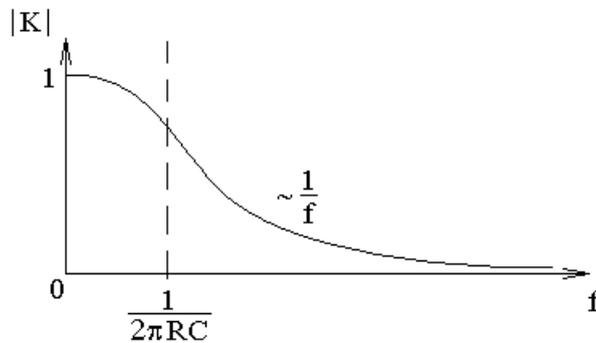
$$K = \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

Здесь  $\omega = 2\pi f$ , где  $f$  — частота изменения напряжения.

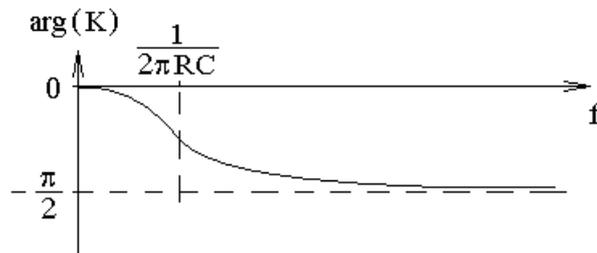
Комплексный коэффициент передачи можно записать, как комплексное число в экспоненциальной форме:

$$K = |K| \cdot e^{i \cdot \arg(K)}$$

Зависимость комплексного коэффициента передачи от частоты обычно представляют двумя соответствующими зависимостями: амплитудно-частотной характеристикой или зависимостью  $|K|$  от  $f$  и фазо-частотной характеристикой или зависимостью  $\arg(K)$  от  $f$ . Для  $RC$ -цепочки эти зависимости имеют следующий вид:



и



Здесь  $|\arg(K)|$  — это запаздывание по фазе напряжения на выходе схемы относительно напряжения на входе. Запаздывание, так как  $\arg(K) < 0$ .

Напряжение на выходе любой схемы не может появиться раньше, чем появится напряжение на ее входе. Это условие накладывает некоторое

интегральное соотношение между амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристиками любой системы. Интегральное соотношение приводит к тому, что любой спад амплитудно-частотной характеристики вида  $\sim \frac{1}{f}$  неизбежно приводит к отставанию по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ . Каждый спад вида  $\sim \frac{1}{f}$  приводит к дополнительному отставанию по фазе  $\frac{\pi}{2}$ .

Возбуждение или генерация системы с обратной связью.

В любой системе с отрицательной обратной связью на высоких частотах образуется неконтролируемый спад амплитудно-частотной характеристики. На каких-то частотах начинается спад вида  $\sim \frac{1}{f}$ , на более высоких частотах спад  $\sim \frac{1}{f^2}$ , затем  $\sim \frac{1}{f^3}$  и так далее. Соответственно за этими частотами происходит отставание по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ ,  $2\frac{\pi}{2}$ ,  $3\frac{\pi}{2}$  и так далее.

Фазовый сдвиг равный  $\pi$  означает, что отрицательная обратная связь на этой частоте оказывается положительной.

Если в выражении для относительной неотслеженной части напряжения

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + K_0}$$

положительный коэффициент передачи петли обратной связи  $K_0$  заменить на отрицательный, что и соответствует фазовому сдвигу на  $\pi$ , то окажется, что относительная неотслеженная часть больше единицы  $\varepsilon > 1$  при условии, что  $|K_0| < 1$ . Если же на этой частоте модуль коэффициента передачи петли обратной связи  $|K_0|$  меньше единицы и стремится к единице, то  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Бесконечная неотслеженная часть означает возбуждение или генерацию в петле обратной связи.

Возбуждение в петле обратной связи происходит в том и только в том случае, если на частоте фазового сдвига петли равного  $\pi$  модуль коэффициента передачи петли больше или равен единице.

Частоту, на которой фазовый сдвиг равен  $\pi$ , будем называть частотой генерации  $f_2$ . Если  $|K_0| > 1$  на так называемой частоте генерации  $f = f_2$ , то амплитуда синусоиды на частоте генерации  $f_2$  возрастает во времени от случайного шумового значения до тех пор, пока синусоида не начнет ограничиваться напряжениями питания схемы. Ограничение приведет к уменьшению модуля коэффициента передачи, и амплитуда стабилизируется по величине при условии  $|K_0| = 1$  на частоте генерации  $f_2$ .

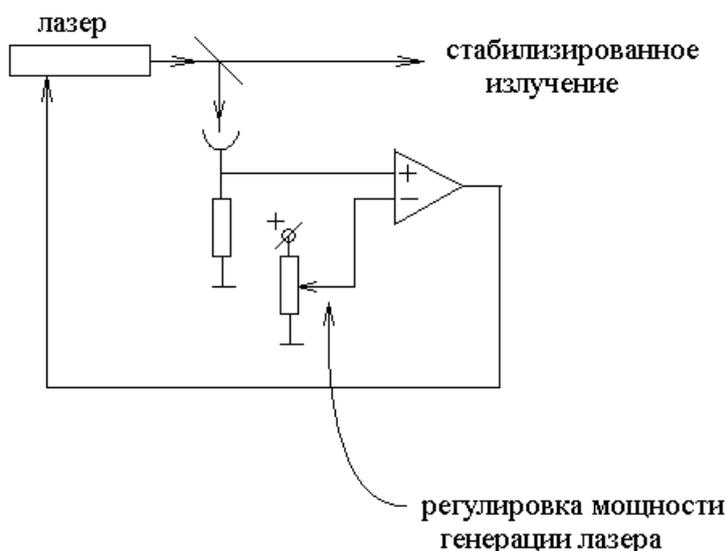
Чтобы избежать возбуждения системы стабилизации нужно обеспечить неравенство  $|K_0| < 1$  на частоте  $f = f_2$ , на которой фазовый сдвиг в петле обратной связи равен  $\pi$ .

С этой целью внутри микросхемы ОУ организуют принудительный спад амплитудно-частотной характеристики, начиная с очень низких частот. Создают спад вида  $\sim \frac{1}{f}$ , которому соответствует фазовый сдвиг  $\frac{\pi}{2}$ . На частотах, на которых появляется неконтролируемый фазовый сдвиг еще  $\frac{\pi}{2}$ , коэффициент передачи петли обратной связи оказывается уже достаточно мал, чтобы система обратной связи не возбуждалась.

Так если неконтролируемые повороты фазы появляются на частоте 1 МГц, и на нулевой частоте модуль коэффициента передачи петли обратной связи равен  $10^6$ , то спад амплитудно-частотной характеристики вида  $\sim \frac{1}{f}$  должен начинаться с частоты примерно 1 Гц.

#### Стабилизация частоты генерации лазера по его мощности.

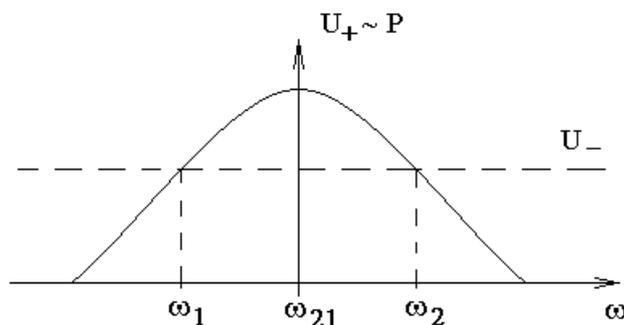
Рассмотрим следующую принципиальную схему стабилизации частоты генерации лазера:



Здесь напряжение с выхода дифференциального усилителя подается на пьезокерамику, на которой укреплено одно из зеркал лазера, для управления частотой генерации лазера. Разность напряжений  $U_+ - U_-$  на двух входах дифференциального усилителя является сигналом ошибки системы стабилизации. То есть система стабилизации удерживает мощность генерации лазера на таком уровне, чтобы  $U_+ - U_- = 0$ .

Напряжение на плюс-входе усилителя  $U_+$  пропорционально мощности генерации лазера  $P$ . Пусть лазер работает в одночастотном режиме генерации, тогда зависимость мощности генерации от частоты примерно повторяет

зависимость коэффициента усиления лазерной среды от частоты. Только ось абсцисс этой зависимости приподнята до уровня потерь резонатора лазера. Мощность генерации, как функция частоты, имеет следующий вид:



Здесь  $\omega_{21}$  — частота центра линии усиления лазерной среды, горизонтальная пунктирная линия на уровне  $U_-$  соответствует величине напряжения, которое с потенциометра подается на минус-вход дифференциального усилителя.

Нулевой сигнал ошибки системы стабилизации  $U_+ - U_- = 0$  соответствует двум частотам генерации лазера, обозначенным на рисунке, как  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Одна из этих частот является частотой устойчивого равновесия системы стабилизации, а другая — частотой неустойчивого равновесия.

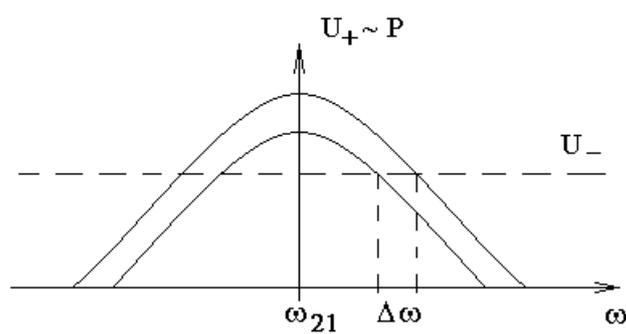
Будем для определенности считать, что крепление зеркала на пьезокерамике устроено таким образом, что при увеличении напряжения на пьезокерамике частота генерации лазера возрастает.

Тогда  $\omega_2$  — частота устойчивого равновесия системы стабилизации. И действительно. Пусть в начальный момент времени система стабилизации находится в состоянии равновесия  $U_+ - U_- = 0$ . И пусть частота генерации лазера по случайным причинам испытала небольшое шумовое изменение в сторону увеличения частоты вправо по оси частот. Тогда в соответствии с зависимостью мощности от частоты мощность генерации лазера уменьшилась. Уменьшение мощности привело к уменьшению напряжения с приемника излучения и уменьшению напряжения  $U_+$  на плюс-входе дифференциального усилителя. Уменьшение значения  $U_+$  привело к уменьшению напряжения на выходе усилителя и к уменьшению напряжения на пьезокерамике. В соответствии с нашим предположением уменьшение напряжения на пьезокерамике приводит к уменьшению частоты генерации лазера.

Итак, шумовое увеличение частоты генерации приводит к тому, что система стабилизации вырабатывает сигнал, который уменьшает частоту генерации. Это и означает, что  $\omega_2$  — частота устойчивого равновесия системы стабилизации.

Преимущество предложенного метода стабилизации состоит в том, что стабилизированную частоту генерации можно перестраивать, изменяя величину напряжения  $U_-$ , подаваемого на минус вход дифференциального усилителя.

Недостаток такого метода — изменение частоты генерации при изменении усиления лазерной среды, что видно из нижеследующего рисунка:



Здесь  $\Delta\omega$  — изменение стабилизированной частоты генерации лазера при изменении усиления среды.