Экзамен. Уголковый отражатель. Измерение расстояния от Земли до Луны (продолжение).

Для измерения расстояния от Земли до Луны уголковый отражатель забросили на Луну.

С Земли на Луну пускают короткий лазерный импульс света. После отражения уголковым отражателем свет меняет направление на обратное и возвращается к излучателю.

Время τ между излучением и приемом импульса связано с расстоянием L от Земли до Луны соотношением:

$$c\tau = 2L.$$

Измеряя на опыте время τ, находят расстояние до Луны $L = \frac{c\tau}{2}$. $\tau \approx 2$ секунды.

Аналогично с помощью уголковых отражателей проводят калибровку дальномеров радиолокаторов.

Металлический уголковый отражатель для радиоволн.

Экзамен. Плоская неоднородная световая волна при полном внутреннем отражении света.

При полном внутреннем отражении обычной преломленной волны нет, но свет под границей раздела сред все же есть. Только падающей и отраженной волнами нельзя одновременно удовлетворить условию отсутствия скачка тангенциальной составляющей

$$\begin{cases} \tilde{E}_{1\tau} = \tilde{E}_{2\tau} \\ \tilde{H}_{1\tau} = \tilde{H}_{2\tau} \end{cases}$$

на границе двух сред и для электрического и для магнитного поля.

В нашем распоряжении есть формулы Френеля для амплитудных коэффициентов отражения и преломления плоских волн, но в случае полного внутреннего отражения нет вещественного решения для угла преломления α_2

плоской волны. Комплексные числа придуманы как раз для того, чтобы математические операции над числами можно было выполнять всегда, даже когда нет вещественных результатов операций. Соответственно мы можем считать, что формулы Френеля для плоских волн

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)}$$

справедливы и при полном внутреннем отражении, только угол преломления α_2 и некоторые другие параметры плоских волн окажутся комплексными величинами.

Явление полного внутреннего отражения, как явление обычного преломления и отражения, описывается тремя волнами вида: $\vec{E} = E_0 \vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)}$. Только теперь будем считать, что волновой вектор $\vec{k}$ может быть комплексным. Функция $\vec{E} = E_0 \vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)}$ является решением волнового уравнения $\Delta\vec{E} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ и при комплексных значениях проекций вектора $\vec{k}$, если $V = \frac{\omega}{k}$, где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$.

Как и при обычном преломлении света, пространственная частота трех волн на границе раздела сред должна быть одинаковой, иначе не удовлетворить граничным условиям сразу во всех точках границы. Пусть ось z перпендикулярна границе. Направим ось y в плоскости границы раздела сред так, чтобы $k_y^{(i)} = 0$ => $k_y^{(i)} = k_y^{(r)} = k_y^{(t)} = 0$.

Для пространственной частоты по оси x получаем $k_x^{(i)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)} = k^{(i)}\sin\left(\alpha_1\right) = k\cdot\sin\left(\alpha\right)$, где введены обозначения: $k \equiv k^{(i)}$ — волновое число падающей и отраженной волн, $\alpha \equiv \alpha_1$ угол падения равный углу отражения света.

Длину волнового вектора под границей раздела можно найти из двух выражений для фазовой скорости света $V_\Phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$. Тогда $\frac{k}{n} = \frac{\omega}{c}$ =>

$$\frac{k^{(i)}}{n_1} = \frac{k^{(t)}}{n_2} \quad => \quad k^{(t)} = \frac{n_2}{n_1}k^{(i)} = \frac{n_2}{n_1}k.$$

Зная длину волнового вектора $k^{(t)}$ под границей сред и его проекцию $k_x{}^{(t)} = k\cdot\sin\left(\alpha\right)$, мы можем найти оставшуюся проекцию $k_z{}^{(t)}$:

$$k_z^{(t)} = \pm\sqrt{\left(k^{(t)}\right)^2 - \left(k_x^{(t)}\right)^2} = \pm\sqrt{\left(k\cdot\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(k\cdot\sin\left(\alpha\right)\right)^2} = \pm ik\sqrt{\sin^2\alpha - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

На первой лекции мы обсуждали возможность комплексного значения величины вектора $\vec{k}$ в решении волнового уравнения. Рассмотрим комплексное выражение для плоской волны под границей раздела сред и подставим в него полученные выражения для $k_x^{(t)} = k \cdot \sin(\alpha)$ и $k_z^{(t)} = \pm ik\sqrt{\sin^2\alpha - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$.

Тогда для световой волны под границей раздела сред получим:

$$\vec{E}^{(t)} = E_0^{(t)} \cdot \vec{e}_p^{(t)} \cdot e^{i\left(\left(\vec{k}^{(t)},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)} = E_0^{(t)} \cdot \vec{e}_p^{(t)} \cdot e^{i\left(k_z{}^{(t)}z+k_x{}^{(t)}x-\omega t+\varphi_0\right)} =$$

$$= E_0^{(t)} \cdot e^{-k\cdot|z|\cdot\sqrt{\sin^2\alpha-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} \cdot \vec{e}_p^{(t)} \cdot e^{i\left(kx\cdot\sin(\alpha)-\omega t+\varphi_0\right)},$$

здесь $E_0^{(t)} \cdot e^{-k\cdot|z|\cdot\sqrt{\sin^2\alpha-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$ — амплитуда неоднородной плоской волны. Знак в показателе экспоненты выбран из общих физических соображений так, чтобы амплитуда экспоненциально убывала, а не возрастала, при удалении от границы раздела сред.

<u>Факультативная вставка.</u>

Теперь можно вернуться к выражению $k_z^{(t)} = \pm ik\sqrt{\sin^2\alpha - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$ и выяснить, какой знак нужно оставить. Во-первых, для плоской неоднородной волны $-|z| = z$, так как в этой области $z < 0$. Тогда амплитуда плоской неоднородной волны:

$$E_0^{(t)} \cdot e^{-k\cdot|z|\cdot\sqrt{\sin^2\alpha-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = E_0^{(t)} \cdot e^{kz\cdot\sqrt{\sin^2\alpha-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = E_0^{(t)} \cdot e^{ik_z^{(t)}z}.$$

Из последнего равенства следует, что

$$k_z^{(t)} = -ik\sqrt{\sin^2\alpha - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}.$$

Запомним этот результат, он понадобится нам в одном из следующих вопросов о фазовом сдвиге при полном внутреннем отражении света.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Амплитуда волны под границей раздела убывает на длине порядка $\frac{\lambda}{2}$. Амплитуда волны не одинакова в разных точках пространства, поэтому волна называется неоднородной.

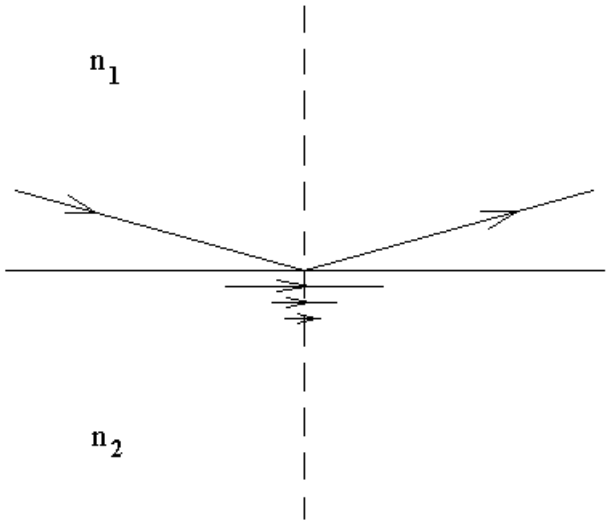
Если $E_0^{(t)} \cdot e^{-k\cdot|z|\cdot\sqrt{\sin^2\alpha-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$ — амплитуда волны

$$\vec{E}^{(t)} = E_0^{(t)} \cdot e^{-k\cdot|z|\cdot\sqrt{\sin^2\alpha-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} \cdot \vec{e}_p^{(t)} \cdot e^{i\left(kx\cdot\sin(\alpha)-\omega t+\varphi_0\right)}$$

под границей раздела сред, то $\left(xk\cdot\sin(\alpha)-\omega t+\varphi_0\right)$ — фаза этой волны. Тогда поверхность равных фаз удовлетворяет уравнению $\left(xk\cdot\sin(\alpha)-\omega t+\varphi_0\right)=const$ при $t=const$. Откуда поверхность равных фаз $x=const$. То есть поверхности равных фаз неоднородной волны — это плоскости перпендикулярные оси x. Поэтому неоднородная волна называется плоской.

При полном внутреннем отражении под границей раздела сред присутствует плоская неоднородная световая волна.

Схематически полное внутреннее отражение можно отобразить на следующем рисунке.



Под границей раздела сред в тонком слое толщиной порядка λ свет идет параллельно границе раздела.

Факультативно заметим, что вектор Пойнтинга $\vec{S}$ неоднородной волны только в среднем направлен параллельно границе раздела. В зависимости от поляризации света либо вектор $\vec{E}$, либо вектор $\vec{B}$ не лежат в плоскости равных фаз, при этом вектор $\vec{S}$ осциллирует по направлению вверх-вниз с удвоенной оптической частотой.

<u>Экзамен. Экспериментальное наблюдение плоской неоднородной волны.</u>

Кварцевую призму опускают длинной гранью в люминесцирующий раствор с показателем преломления меньше, чем у кварца.

Поясним термин люминесценции.

Люминесценция — любое нетепловое свечение.

Фотолюминесценция — свечение после освещения внешним источником света, часто свечение происходит на другой частоте.

Флюоресценция (или флуоресценция) — кратковременная фотолюминесценция $\tau < 10^{-3}$ сек.

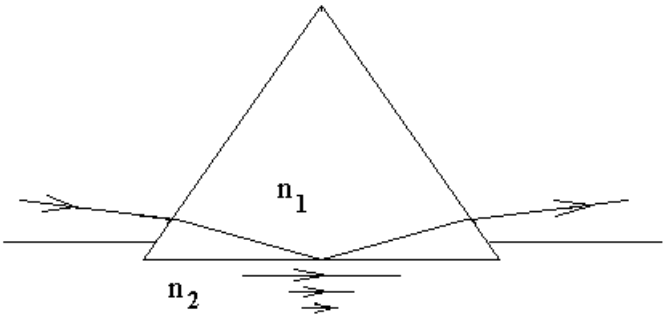
Фосфоресценция — долговременная фотолюминесценция $\tau > 10^{-3}$ сек.

Электролюминесценция — свечение под действием электрического тока, например — свечение разряда в газе.

Хемилюминесценция — свечение в результате химической реакции.

Сонолюминесценция — свечение в фокусе ультразвуковой волны.

Кварцевую призму опускают длинной гранью в люминесцирующий раствор с показателем преломления меньше, чем у кварца. Ультрафиолетовый свет направляют на призму почти параллельно поверхности раствора.

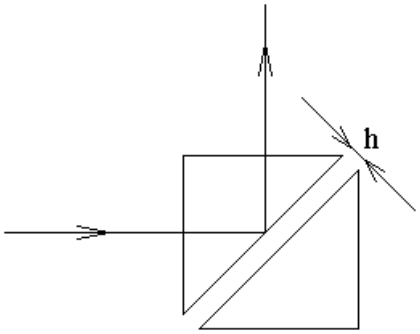


Особая эффектность опыта состоит в том, что ультрафиолетовый свет невидим, а видна только люминесценция под нижней гранью призмы — люминесценция раствора в видимой области спектра. Люминесцирует тонкий слой жидкости толщиной порядка λ.

Экзамен. Светоделительный куб. Оптический контакт.

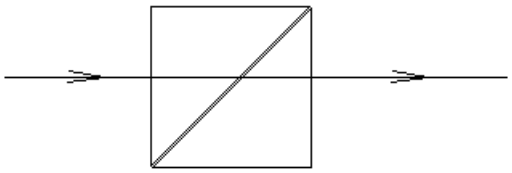
Рассмотрим две стеклянные призмы на малом расстоянии h друг от друга.

Если расстояние $h >> \lambda$, то наблюдается полное внутреннее отражение света, и весь свет отражается.



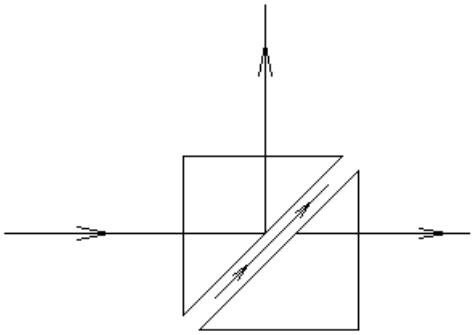
Если же расстояние h нулевое, то нет границы раздела сред, и весь свет проходит насквозь. Если расстояние h между двумя кусками одного и того же

материала значительно меньше $\frac{\lambda}{2}$, то эта граница не отражает свет. Это и есть оптический контакт.

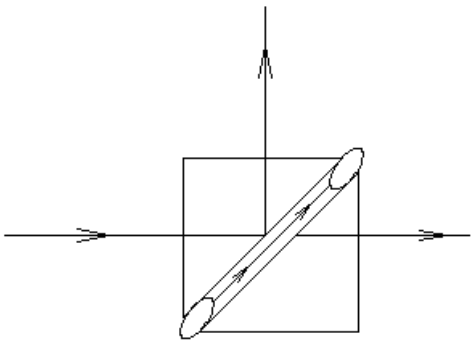


В светоделительном кубе расстояние между двумя стеклянными призмами подбирают так, чтобы половина света отражалась от границы двух призм и половина проходила сквозь границу.

Между двумя призмами параллельно их почти соприкасающимся граням идет плоская неоднородная волна.



Чтобы фиксировать нужное расстояние между призмами светоделительного куба на одну из соприкасающихся поверхностей можно положить кольцо прозрачного эпоксидного клея.



Во время полимеризации клея расстояние между призмами постоянно контролируется по разности интенсивностей отраженной и прошедшей световых волн.

Экзамен. Фазовый сдвиг поляризаций при полном внутреннем отражении света.

При полном внутреннем отражении нет вещественного решения уравнения Снеллиуса $n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$ относительно угла преломления α_2, так как $\sin(\alpha_2) = \frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha_1) > 1$, но комплексное решение есть. Этому комплексному α_2 соответствует чисто мнимый косинус

$$\cos(\alpha_2) = \sqrt{1-\sin^2(\alpha_2)} = \sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\alpha_1)} = \pm i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\alpha_1) - 1}.$$

Можно доказать (в факультативной вставке), что в последнем выражении нужно оставить знак "+"

$$\cos(\alpha_2) = i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\alpha) - 1}.$$

Через косинус α_2 выражаются комплексные амплитудные коэффициенты отражения и пропускания для каждой из двух поляризаций света. Коэффициент пропускания позволяет найти комплексную амплитуду плоской неоднородной световой волны, но нас она сейчас интересовать не будет. Рассмотрим амплитудные коэффициенты отражения:

$$\begin{cases} r_{\parallel} = \dfrac{n_2\cos(\alpha_1) - n_1\cos(\alpha_2)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)} \\ r_{\perp} = \dfrac{n_1\cos(\alpha_1) - n_2\cos(\alpha_2)}{n_1\cos(\alpha_1) + n_2\cos(\alpha_2)} \end{cases}$$

При чисто мнимом значении $\cos(\alpha_2)$ числитель и знаменатель каждой дроби — комплексно сопряженные величины. То есть при полном внутреннем отражении $|r| = 1$, и отражается вся энергия: $R = |r|^2 = 1$.

Фазовый сдвиг между двумя поляризациями отраженного света равен

$$\delta\varphi = \arg(r_{\perp}) - \arg(r_{\parallel}).$$

При полном внутреннем отражении света поляризация света перпендикулярная плоскости падения отстает по фазе на величину $\delta\varphi > 0$ от поляризации в плоскости падения.

Факультативная вставка.

Остается только выяснить какой знак (плюс или минус) нужно выбрать в выражении для косинуса α_2.

Пусть свет падает на границу раздела сред сверху вниз, пусть ось z направлена вертикально вверх. Тогда в случае вещественной величины угла α_2 и наличия преломленной волны получим:

$$k_z^{(t)} = -k^{(t)}\cos\left(\alpha_2\right) \qquad => \qquad \cos\left(\alpha_2\right) = -\frac{k_z^{(t)}}{k^{(t)}}.$$

Здесь знак минус определяется тем, что свет идет вниз, а ось z направлена вверх. Это же соотношение остается в силе и в случае комплексного решения для угла преломления α_2.

Величину $k_z^{(t)}$ мы нашли в вопросе плоская неоднородная световая волна при полном внутреннем отражении света:

$$k_z^{(t)} = -ik\sqrt{\sin^2\alpha - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}.$$

В том же вопросе было получено, что $k^{(t)} = \frac{n_2}{n_1}k$.

Тогда

$$\cos\left(\alpha_2\right) = -\frac{k_z^{(t)}}{k^{(t)}} = -\left\{\frac{-ik\sqrt{\sin^2\left(\alpha\right) - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\frac{n_2}{n_1}k}\right\} = i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\left(\alpha\right) - 1}.$$

Значение косинуса угла преломления можно подставить в формулы Френеля и получить комплексные выражения для амплитудных коэффициентов отражения двух поляризаций света:

$$r_{\parallel} = \frac{n_2\cos\left(\alpha_1\right) - n_1\cos\left(\alpha_2\right)}{n_2\cos\left(\alpha_1\right) + n_1\cos\left(\alpha_2\right)} = \frac{n_2\cos\left(\alpha\right) - in_1\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\left(\alpha\right)\right)^2 - 1}}{n_2\cos\left(\alpha\right) + in_1\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\left(\alpha\right)\right)^2 - 1}},$$

$$r_{\perp} = \frac{n_1\cos\left(\alpha_1\right) - n_2\cos\left(\alpha_2\right)}{n_1\cos\left(\alpha_1\right) + n_2\cos\left(\alpha_2\right)} = \frac{n_1\cos\left(\alpha\right) - in_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\left(\alpha\right)\right)^2 - 1}}{n_1\cos\left(\alpha\right) + in_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\left(\alpha\right)\right)^2 - 1}}.$$

Световое поле в комплексной форме пропорционально $e^{-i\omega t}$, то есть вращается на комплексной плоскости в сторону отрицательных углов (по

часовой стрелке). Аргумент комплексного амплитудного коэффициента отражения отрицателен для каждой поляризации, так как тангенс аргумента равен отношению мнимой и вещественной частей комплексного числа. Отрицательный аргумент означает, что отраженные волны опережают по фазе падающую волну. Фазовый сдвиг для величины $r_{||}$ по модулю больше, чем фазовый сдвиг для величины $r_{\perp}$, так как $n_1 > n_2$. Следовательно, параллельная плоскости падения поляризация света в отраженной волне сильнее опережает по фазе падающую волну.

В следующем вопросе нам понадобится величина запаздывания по фазе $\delta\varphi > 0$ поляризации света перпендикулярной плоскости падения относительно поляризации параллельной плоскости падения при полном внутреннем отражении. Величину $\delta\varphi$ можно найти, как разность фаз отраженных волн двух поляризаций

$$\delta\varphi = arctg\frac{\mathrm{Im}\left(r_{\perp}\right)}{\mathrm{Re}\left(r_{\perp}\right)} - arctg\frac{\mathrm{Im}\left(r_{||}\right)}{\mathrm{Re}\left(r_{||}\right)} > 0 .$$

Сюда можно подставить полученные выражения для величин $r_{\perp}$ и $r_{||}$, а затем упростить выражение для разности фаз и получить:

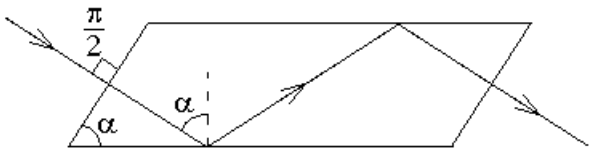
$$\delta\varphi = 2\cdot arctg\left\{\frac{n_1}{n_2}\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}tg\left(\alpha_1\right)\right)^2 - tg^2\left(\alpha_1\right) - 1}\right\} -$$

$$-2\cdot arctg\left\{\frac{n_2}{n_1}\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}tg\left(\alpha_1\right)\right)^2 - tg^2\left(\alpha_1\right) - 1}\right\}.$$

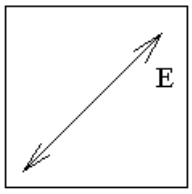
<u>Конец факультативной вставки.</u>

<u>**Экзамен. Параллелепипед Френеля.**</u>

За одно полное внутреннее отражение не удается получить разность фаз $\frac{\pi}{2}$ для двух линейных поляризаций. За два полных внутренних отражения можно набрать сдвиг фаз $2\cdot\delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ между двумя линейными поляризациями, что позволяет получить циркулярно поляризованный свет из света линейной поляризации.

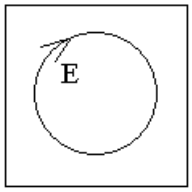


Свет нормально падает на переднюю грань параллелепипеда Френеля. Угол α при вершине параллелепипеда подобран так, чтобы выполнить условие $2\cdot\delta\varphi=\frac{\pi}{2}$, где $\delta\varphi=arctg\frac{\mathrm{Im}(r_\perp)}{\mathrm{Re}(r_\perp)}-arctg\frac{\mathrm{Im}(r_{||})}{\mathrm{Re}(r_{||})}$. При этом, если на вход параллелепипеда Френеля пустить свет линейной поляризации, направленной, как показано на рисунке



,

то на выходе получится свет круговой поляризации



.

Правильное направление круговой поляризации получается при взгляде по ходу луча на обоих рисунках либо при взгляде навстречу лучу на обоих рисунках.

Кристаллооптика.
Экзамен. Направление векторов $\vec{D},\vec{E},\vec{B},\vec{H},\vec{k},\vec{S}$ для плоской монохроматической световой волны в кристалле.

В однородной среде для электрического и для магнитного поля получаются аналогичные волновые уравнения:

$$\Delta\vec{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \qquad \text{и} \qquad \Delta\vec{B}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0\,.$$

В анизотропной кристаллической среде диэлектрическая проницаемость ε становится симметричной матрицей, которую поворотом системы координат можно привести к диагональному виду

$$\hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_x & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{pmatrix}.$$

Такие оси координат, в которых $\hat{\varepsilon}$ — симметричная матрица, называют главными диэлектрическими осями кристалла.

В главных диэлектрических осях уравнение для каждой проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ останется волновым уравнением, только со своим значением коэффициента $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

Мы знаем, что волновые уравнения имеют решения в виде плоских монохроматических волн. В комплексном представлении эти волны имеют вид: $\tilde{\vec{E}} = \tilde{E}_0 \vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$ и $\tilde{\vec{B}} = \tilde{B}_0 \vec{e}'_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$. Формально для разных проекций векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на разные главные диэлектрические оси значения вектора $\vec{k}$ могут различаться, но мне такие решения неизвестны, и вряд ли они существуют. Будем считать, что значения вектора $\vec{k}$ одинаковые. Этих решений окажется достаточно много, чтобы можно было считать, что любое световое поле может быть представлено с достаточной точностью в виде суммы таких решений.

Вещественные поля представляют собой вещественную часть этих комплексных выражений. Подставим эти вещественные поля в уравнения Максвелла и посмотрим, при каких условиях поля могут быть решениями уравнений. Далее будем рассматривать вещественные плоские волны. Это рассмотрение полностью повторяет собой доказательство поперечности световых волн в прозрачной изотропной среде, только теперь придется различать направления векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$.

И электрическое и магнитное поле зависят от координат и времени только через величину $\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)$. Обозначим эту величину буквой $\varphi = \left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t$.

φ — это фаза волны без учета начальной фазы, которая может оказаться различной для различных проекций векторов $\vec{E}(\varphi)$, $\vec{D}(\varphi)$ и $\vec{B}(\varphi)$.

Рассмотрим производную по времени, например, от вектора $\vec{E}(\varphi)$, как производную от сложной функции:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial t} = -\omega \cdot \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}.$$

Что в операторном виде можно записать, как:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial t} = -\omega \frac{d \cdot}{d\varphi}.$$

Аналогично рассмотрим производную от вектора $\vec{E}(\varphi)$ по x координате:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial x} =$$

$$= \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)}{\partial x} = k_x \cdot \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}$$

Тогда для вещественной плоской монохроматической волны:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x} = k_x \frac{d \cdot}{d\varphi}.$$

Тогда

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}_x k_x \frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_y k_y \frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_z k_z \frac{d}{d\varphi} = \vec{k} \frac{d}{d\varphi}.$$

Подставим эти соотношения в 4-е уравнения Максвелла $\begin{cases} \left(\vec{\nabla}, \vec{D}\right) = 0 \\ \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right] = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \left(\vec{\nabla}, \vec{B}\right) = 0 \\ \left[\vec{\nabla}, \vec{H}\right] = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$, где для прозрачной среды учтено $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = 0 \end{cases}$.

В анизотропной среде диэлектрическая проницаемость ε — это тензор второго ранга, поэтому в отличие от изотропной среды теперь нужно различать направление векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$.

$$\begin{cases} \left(\vec{k} \frac{d}{d\varphi}, \vec{D}\right) = 0 \\ \left[\vec{k} \frac{d}{d\varphi}, \vec{E}\right] = \frac{\omega}{c} \frac{d}{d\varphi} \vec{B} \\ \left(\vec{k} \frac{d}{d\varphi}, \vec{B}\right) = 0 \\ \left[\vec{k} \frac{d}{d\varphi}, \vec{H}\right] = -\frac{\omega}{c} \frac{d}{d\varphi} \vec{D} \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} \frac{d}{d\varphi}\left(\vec{k}, \vec{D}\right) = 0 \\ \frac{d}{d\varphi}\left[\vec{k}, \vec{E}\right] = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\omega}{c} \vec{B}\right) \\ \frac{d}{d\varphi}\left(\vec{k}, \vec{B}\right) = 0 \\ \frac{d}{d\varphi}\left[\vec{k}, \vec{H}\right] = -\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\omega}{c} \vec{D}\right) \end{cases} \quad =>$$

$$\begin{cases} \left(\vec{k}, \vec{D}\right) = const \\ \left[\vec{k}, \vec{E}\right] = \frac{\omega}{c} \vec{B} + const \\ \left(\vec{k}, \vec{B}\right) = const \\ \left[\vec{k}, \vec{H}\right] = -\frac{\omega}{c} \vec{D} + const \end{cases},$$

где $const$ — константы, независящие от φ. То есть константа не зависит ни от времени, ни от координат, так как вся зависимость электрического и магнитного полей от времени и координат происходит только через зависимость от $\varphi = \left(\vec{k}, \vec{r}\right) - \omega t$.

Нас интересуют только переменные, а не постоянные, электромагнитные поля, поэтому константы в правых частях равенств равны нулю. И

действительно. Перенесем все слагаемые кроме константы в левую часть каждого равенства. Через половину периода световой волны левая часть равенства поменяет знак, а правая часть останется той же константой. Это возможно только в том случае, если константа равна нулю.

Тогда

$$\begin{cases} \left(\vec{k},\vec{D}\right)=0 \\ \left[\vec{k},\vec{E}\right]=\dfrac{\omega}{c}\vec{B} \\ \left(\vec{k},\vec{B}\right)=0 \\ \left[\vec{k},\vec{H}\right]=-\dfrac{\omega}{c}\vec{D} \end{cases}.$$

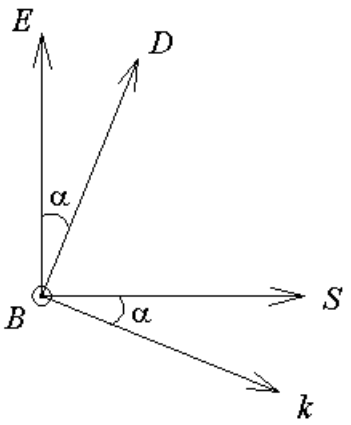
Добавим сюда уравнение $\vec{S}=\dfrac{c}{4\pi}\cdot\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ и заменим везде вектор $\vec{H}$ на вектор $\vec{B}$, так как $\vec{B}=\mu\vec{H}$, а в оптике $\mu=1$. В результате получим пять соотношений:

$$\begin{cases} \left(\vec{k},\vec{D}\right)=0 \\ \left[\vec{k},\vec{E}\right]=\dfrac{\omega}{c}\vec{B} \\ \left(\vec{k},\vec{B}\right)=0 \\ \left[\vec{k},\vec{B}\right]=-\dfrac{\omega}{c}\vec{D} \\ \vec{S}=\dfrac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{B}\right] \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} \vec{k}\perp\vec{D} \\ \vec{B}\perp\vec{E} \\ \vec{B}\perp\vec{k} \\ \vec{B}\perp\vec{D} \\ \vec{S}\perp\vec{E} \\ \vec{S}\perp\vec{B} \end{cases}.$$

Заметим, что из ортогональности векторов с вещественными координатами следует ортогональность тех же векторов с комплексными координатами.

Из полученных соотношений ортогональности видно, что вектор $\vec{B}$ перпендикулярен 4-м остальным векторам $\vec{k},\vec{D},\vec{E},\vec{S}$. Следовательно, эти 4-е вектора лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$.

Рассмотрим рисунок, на котором вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рисунка, тогда остальные 4-е вектора окажутся в плоскости рисунка:



Из $\begin{cases} \vec{E} \perp \vec{S} \\ \vec{D} \perp \vec{k} \end{cases}$ следует, что углы между векторами $\vec{E}$ и $\vec{D}$ и углы между векторами $\vec{S}$ и $\vec{k}$ равны, как углы со взаимно ортогональными сторонами. Обозначим соответствующий угол за α:

$$\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{D},\vec{E}}\right) = \left(\widehat{\vec{S},\vec{k}}\right) \qquad (7.1)$$

$\begin{cases} \vec{k} \perp \vec{D} \\ \vec{k} \perp \vec{B} \\ \vec{B} \perp \vec{D} \end{cases}$ => векторы $\vec{k}, \vec{D}, \vec{B}$ взаимно ортогональны,

$\begin{cases} \vec{S} \perp \vec{E} \\ \vec{S} \perp \vec{B} \\ \vec{E} \perp \vec{B} \end{cases}$ => векторы $\vec{S}, \vec{E}, \vec{B}$ взаимно ортогональны.

Напомним, почему в кристалле векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ различаются по направлению.

В кристалле $\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}$, где $\hat{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости. $\hat{\varepsilon}$ — симметричный тензор второго ранга. В тензорной алгебре есть теорема о том, что симметричный тензор второго ранга поворотом системы координат можно привести к диагональному виду:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \cdot \vec{E}.$$

Если тензор диэлектрической проницаемости диагонален, то оси координат x, y, z — совпадают с главными диэлектрическими осями кристалла по определению главных диэлектрических осей.

Умножение вектора $\vec{E}$ слева на диагональный тензор $\hat{\varepsilon}$ означает разное растяжение по осям x, y, z, растяжение в $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ раз соответственно. Растяжение по осям различно, поэтому вектор произведения $\vec{D}$ и отличается по направлению от вектора $\vec{E}$ на некоторый угол $\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{E}, \vec{D}}\right)$, что можно рассматривать, как некоторый поворот (и растяжение) от вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{D}$ при умножении на матрицу $\hat{\varepsilon}$.