Факультативно. Построения Гюйгенса в изотропной и анизотропной среде (продолжение).

Сначала излишне подробно проведем построения Гюйгенса в изотропной среде, чтобы затем аналогичные построения в кристалле были понятнее.

Рассмотрим границу вакуума и изотропной среды.

$V_1 = c$ — скорость света в вакууме.

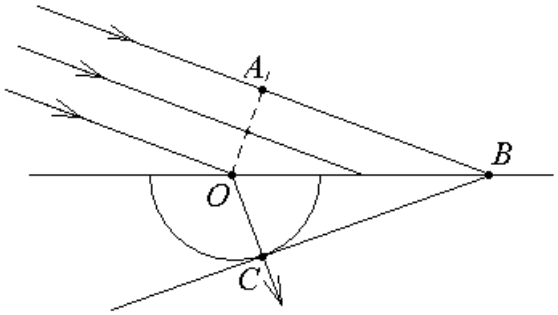
$V_2 = \dfrac{c}{n}$ — скорость света в изотропной среде.

Пусть на границу раздела падает плоская световая волна. Ей соответствует параллельный пучок лучей.

Алгоритм построения Гюйгенса схематически представим в виде следующей логической цепочки:

O => *A* => *B* => τ => сфера =>

=> новый фронт волны => направление преломленного луча.



1). Выберем точку *O* на границе двух сред.

2). Построим фронт падающей волны, проходящий через точку *O*, и выберем точку *A* на этом фронте и одновременно в плоскости падения волны (в плоскости рисунка).

3). Проведем луч падающей волны через точку *A* и найдем точку *B* — точку пересечения луча и границы среда-вакуум.

4). Найдем время τ распространения луча от *A* до *B*: $\tau = \dfrac{AB}{c}$.

5). Построим в среде под границей раздела полусферу с центром в точке *O* и радиусом $V_2\tau = \dfrac{c}{n}\tau$.

Предположим, что на границу среды падает не монохроматическая волна, а короткий световой импульс с фронтом *OA*.

В начальный момент времени промежутка времени τ свет находится на фронте *OA*.

Пока свет за время τ проходит путь из точки *A* в точку *B*, из точки *O* он может достичь любой точки на поверхности сферы радиусом $\dfrac{c}{n}\tau$.

Из симметрии задачи следует, что фронт волны в среде после преломления — плоский фронт. Эта новая плоскость фронта волны проходит через точку *B* и касается сферы с центром в точке *O*, потому что в соответствии с принципом Гюйгенса из точки *O* за время τ свет должен дойти до этой плоскости нового фронта волны и не может зайти за эту плоскость.

Через точку *B* можно по-разному провести плоскость касательную к сфере, поэтому уточним положение касательной плоскости.

При построении рисунка мы подразумевали, что волновой вектор $\vec{k}$ падающей волны лежит в плоскости рисунка. Тогда перпендикуляр к рисунку, проходящий, например, через точку *A*, целиком лежит на фронте волны, проходящем через эту точку *A*. Аналогично, перпендикуляр к рисунку, проходящий через точку *B*, лежит на фронте падающей волны, проходящем через точку *B*.

Если перпендикуляр к рисунку, проходящий через точку *B*, лежит на фронте волны падающей на границу, то все точки на этом перпендикуляре имеют одинаковую фазу колебаний. Следовательно, перпендикуляр лежит и на фронте волны под границей среды.

Таким образом, касающаяся сферы плоскость фронта волны в среде проходит не только через точку *B*, но и через перпендикуляр к рисунку, проходящий через точку *B*. Такая плоскость единственная.

6). Строим плоскость нового фронта преломленной волны через перпендикуляр к рисунку, проходящий через точку *B*, так чтобы плоскость фронта касалась сферы с центром в точке *O* и радиусом $\frac{c}{n}\tau$.

7). Свет из точки *O* должен был дойти до нового фронта волны, следовательно, из точки *O* свет идет в точку касания сферы с новым фронтом. Обозначим эту точку касания, как точку *C*.

8). *OC* — направление преломленного луча.

9). Из построений Гюйгенса можно вывести закон преломления (закон Снеллиуса). И действительно.

С одной стороны $OB = \frac{AB}{\sin(\angle AOB)} = \frac{\frac{c}{n_1}\tau}{\sin(\alpha_1)} = \frac{c\tau}{n_1 \sin(\alpha_1)}$,

а с другой стороны $OB = \frac{OC}{\sin(\angle CBO)} = \frac{\frac{c}{n_2}\tau}{\sin(\alpha_2)} = \frac{c\tau}{n_2 \sin(\alpha_2)}$, тогда

$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$.

Теперь проведем аналогичные построения Гюйгенса для кристалла.

Алгоритм построения Гюйгенса для границы вакуум-кристалл:

O => A => B => τ => лучевая поверхность => новый фронт преломленной волны => новый преломленный луч => $\vec{V}_л$ => $\vec{V}_ф$.

Рассмотрим теперь этот алгоритм подробнее по пунктам.

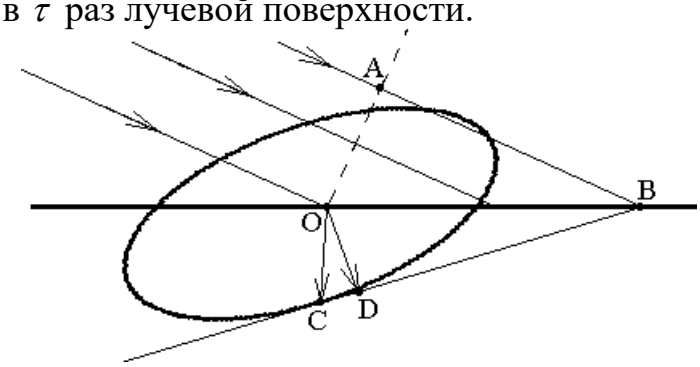
1). Выберем точку O на поверхности кристалла.

2). Построим фронт падающей волны, проходящей через точку O, и выберем точку A на этом фронте волны в плоскости падения.

3). Проведем луч падающей волны из точки A до поверхности кристалла и получим точку B.

4). Найдем время распространения волны от точки A до точки B: $\tau = \dfrac{AB}{c}$.

5). Построим лучевую поверхность с центром в точке O, растянутую в τ раз. Чтобы не загромождать рисунок построим только одну из двух лучевых поверхностей. Свет с лучевой скоростью $\vec{V}_л$ за время τ достигнет из точки O точек растянутой в τ раз лучевой поверхности.



Лучевая поверхность обладает симметрией. Плоскости ее симметрии проходят через любую пару главных диэлектрических осей кристалла.

6). Перпендикуляр к рисунку, проходящий через точку B, лежит на фронте волны, падающей на границу кристалла, и на фронте преломленной волны. Проведем плоскость нового фронта волны через перпендикуляр, проходящий через точку B, так, чтобы плоскость нового фронта касалась растянутой в τ раз лучевой поверхности, построенной вокруг точки O.

7). Построим преломленный луч из точки O в точку касания C. Заметим, что точка C не обязана лежать в плоскости рисунка.

8). $\vec{V}_л = \dfrac{\overrightarrow{OC}}{\tau}$ — лучевая скорость преломленной световой волны.

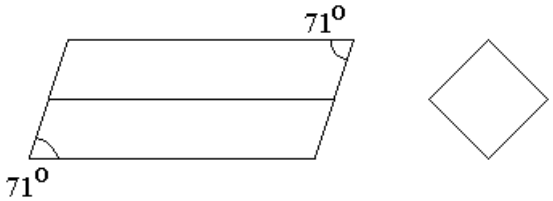
9). Опустим из точки O перпендикуляр на фронт преломленной волны, касающийся растянутой в τ раз лучевой поверхности с центром в точке O. Обозначим основание перпендикуляра, как точку D. Точка D обязана находиться в плоскости рисунка. Точка D не лежит на растянутой лучевой поверхности.

10). $\vec{V}_ф = \dfrac{\overrightarrow{OD}}{\tau}$ — фазовая скорость преломленной световой волны, равная составляющей вектора $\vec{V}_л$ в направлении перпендикулярном фронту преломленной волны.

11). Аналогичные построения нужно провести и для второй лучевой поверхности, чтобы найти направление, лучевую и фазовую скорости второго преломленного луча.

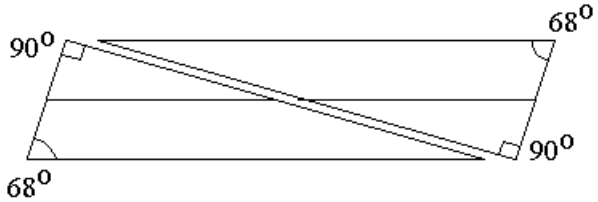
<u>Экзамен. Поляризаторы на основе призм Николя и Волластона.</u>

Николь изготавливают из естественного кристалла исландского шпата, который имеет форму ромбоэдра:



Боковые грани ромбоэдра стачивают так, чтобы превратить угол 71^0 в 68^0.

Кристалл разрезают вдоль диагональной плоскости, предварительно подобрав длину кристалла так, чтобы получить углы 90^0:

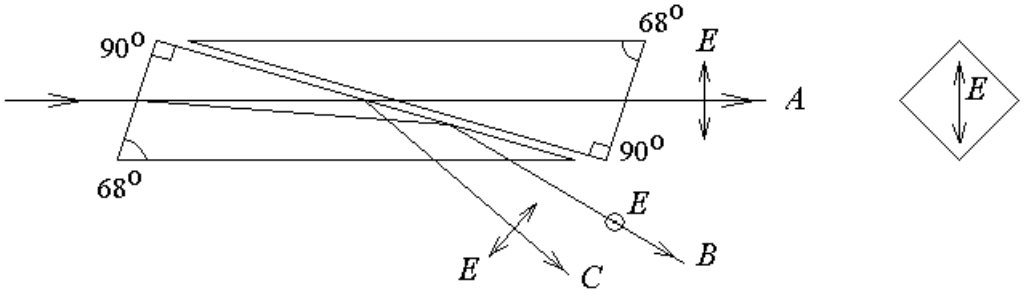


Исландский шпат — одноосный кристалл с показателями преломления

$n_o = 1.66 = \sqrt{\varepsilon_x} = \sqrt{\varepsilon_y}$ для обыкновенного луча и

$n_e = 1.49 = \sqrt{\varepsilon_z}$ для необыкновенного луча, когда он поляризован вдоль оптической оси z.

Две части склеивают канадским бальзамом, который имеет промежуточный показатель преломления $n = 1.53$.



Луч *B*, поляризованный перпендикулярно плоскости рисунка, испытывает полное внутреннее отражение, поэтому в прошедшем горизонтально луче *A* нет поляризации перпендикулярной плоскости рисунка. Прошедший луч *A* полностью поляризован. Так из неполяризованного света на входе призмы Николя на ее выходе получается линейно поляризованный свет.

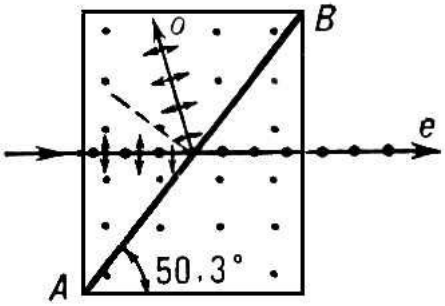
Лучи *B* и *C* после отражения от канадского бальзама попадают на зачерненные нижние грани призмы Николя и полностью поглощаются.

Слой канадского бальзама должен быть достаточно толстым, чтобы можно было пренебречь амплитудой плоской неоднородной волны при полном внутреннем отражении на дальней границе слоя канадского бальзама.

На экзамене достаточно сказать, что Николь делают из одноосного кристалла, который разрезают и склеивают прозрачным клеем с показателем преломления промежуточным между показателями преломления обыкновенного n_o и необыкновенного n_e лучей кристалла. Одна из двух линейных поляризаций испытывает полное внутреннее отражение в месте склейки, а вторая поляризация частично проходит и дает линейно поляризованный свет на выходе из призмы Николя.

Факультативная вставка.

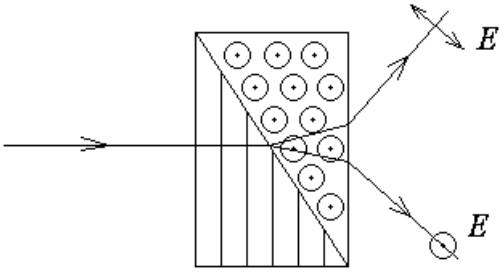
В последнее время вместо призмы Николя обычно используется поляризационная призма Глана — Тейлора. В этой призме две призмы из исландского шпата разделены воздушным зазором вместо зазора с канадским бальзамом.



Угол 50.3^0 треугольной кристаллической призмы рассчитан таким образом, что при нормальном падении света на одну из граней призмы Глана — Тейлора происходит полное внутреннее отражение для одной из двух линейных поляризаций света.

Конец факультативной вставки.

Призма Волластона.



Одноосный кристалл разрезают, одну половину поворачивают на 90^0 и две половины склеивают так, чтобы ось кристалла в двух половинах образца была направлена взаимно ортогонально. На рисунке это вертикальное направление для левой части кристалла и направление перпендикулярное плоскости рисунка для правой части кристалла.

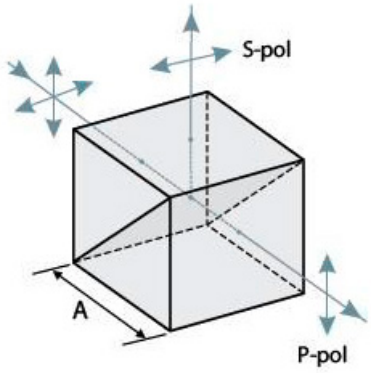
Если толщина клея мала (оптический контакт), то величина его показателя преломления не важна.

На склеенной границе луч одной поляризации переходит в среду с большим показателем преломления, а луч другой поляризации переходит в среду с меньшим показателем преломления. Один луч при этом поворачивает вверх в сторону нормали к границе, а другой — вниз.

Два луча расходятся на склеенной границе. При выходе из кристалла лучи расходятся еще больше.

Факультативная вставка.

Поляризационный куб — устройство, которое свет одной линейной поляризации пропускает, а свет ортогональной поляризации отражает. Куб состоит из двух склеенных призм, между которыми нанесено многослойное диэлектрическое покрытие. Свет взаимодействует с диэлектрическим покрытием как со стопой стеклянных платин расположенных под углом Брюстера.



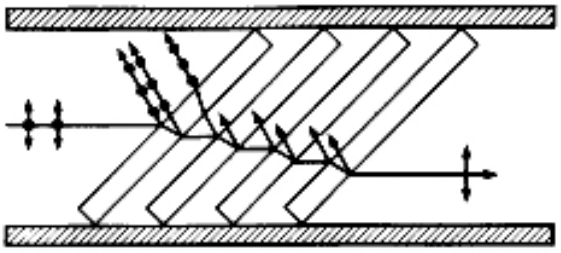


Рис.3 Стопа стеклянных пластин расположенных под углом Брюстера.

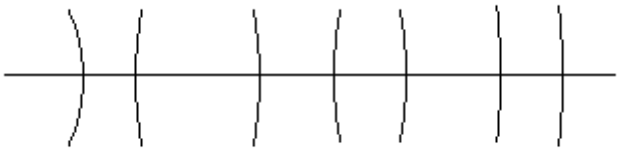
http://www.holographypro.com/ru/spravochnik/elementy-opticheskikh-skhem/polyarizatsionnyj-svetodelitel

Конец факультативной вставки.

Геометрическая оптика.

Экзамен. Центрированные оптические системы. Оптическая ось.

Центрированная оптическая система — это такая система, в которой все преломляющие границы сферические, и центры всех сфер лежат на одной прямой, называемой оптической осью системы.



Экзамен. Приближение параксиальной оптики.

Будем рассматривать только меридиональные лучи, то есть лучи, которые лежат в одной плоскости с оптической осью системы.

Приближение параксиальной оптики состоит в выполнении двух условий.

1). Все рассматриваемые лучи имеют малый угол с оптической осью.

2). Каждый луч, проходя преломляющую границу, находится на малом расстоянии от оптической оси. Расстояние мало по сравнению с радиусом кривизны преломляющей границы.

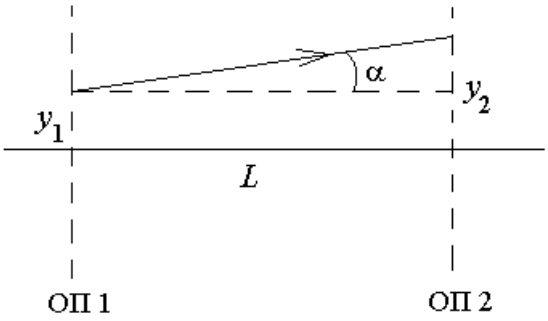
Следующие вопросы будем рассматривать в приближении параксиальной оптики, если не оговорено обратное условие.

Экзамен. Опорная плоскость. Трансляция луча.

Опорная плоскость — любая плоскость перпендикулярная оптической оси.

Трансляция луча — распространение луча в однородной среде.

Рассмотрим трансляцию луча между двумя опорными плоскостями.



Меридиональный луч не может выйти из плоскости первоначального направления луча и оптической оси. Будем считать, что плоскость рисунка совпадает с этой плоскостью. Будем считать, что ось x направлена вдоль оптической оси, а ось y направлена в плоскости рисунка перпендикулярно оптической оси.

Чтобы описать поведение меридионального луча достаточно рассмотреть два параметра луча:

1). y — y-координата луча в плоскости рисунка, модуль которой равен расстоянию от луча до оптической оси.

2). α — угол между лучом и оптической осью, который будем считать положительным, если в направлении луча y-координата луча возрастает.

В приближении параксиальной оптики тангенс малого угла α равен его синусу и равен самому углу:

$tg(\alpha) \approx \sin(\alpha) \approx \alpha$.

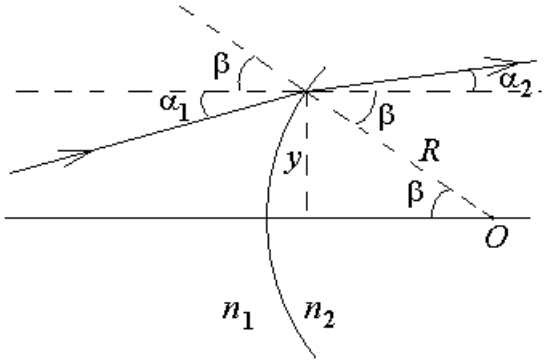
Из рисунка видно, как изменяется параметр y при переходе от одной опорной плоскости к другой:

$y_2 = y_1 + \alpha L$, где L — расстояние между опорными плоскостями, α — угол между лучом и оптической осью.

$y_2 = y_1 + \alpha L$ — уравнение трансляции луча.

Экзамен. Преломление света на сферической границе.

Рассмотрим преломление на сферической границе двух сред.



Здесь $(\alpha_1+\beta)$ — угол падения света на сферическую границу раздела двух сред, $(\alpha_2+\beta)$ — угол преломления.

По закону Снеллиуса: $n_1\sin(\alpha_1+\beta)=n_2\sin(\alpha_2+\beta)$.

В приближении параксиальной оптики все углы малы, тогда:

$n_1(\alpha_1+\beta)=n_2(\alpha_2+\beta)$ =>

$n_2\alpha_2=n_1\alpha_1-(n_2-n_1)\beta$.

Из рисунка видно, что $\beta=\dfrac{y}{R}$, где R — радиус кривизны сферической границы двух сред, тогда

$n_2\alpha_2=n_1\alpha_1-\dfrac{n_2-n_1}{R}y$ — уравнение преломления луча на сферической границе.

<u>Экзамен. Координаты луча. Матрица трансляции. Матрица преломления на сферической границе.</u>

Уравнение трансляции луча и уравнение преломления луча на сферической границе могут быть выражены через такие параметры луча, как y и $n\alpha$. Эти параметры будем называть координатами луча.

Сформируем из двух координат луча вектор $\begin{pmatrix} y \\ n\alpha \end{pmatrix}$ в некотором абстрактном двумерном пространстве.

Рассмотрим, как новые координаты луча выражаются через его старые координаты при трансляции луча и при преломлении на сферической границе.

При трансляции луча:

$$\begin{cases} y_2=y_1+\dfrac{L}{n}n_1\alpha_1 \\ n_2\alpha_2=n_1\alpha_1 \end{cases}.$$

Индекс 1 относится к параметрам луча в первой опорной плоскости, а индекс 2 — во второй.

Уравнения для трансляции луча можно переписать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Назовем матрицу $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицей трансляции.

Заметим, что коэффициенты матрицы не зависят от координат луча y и $n\alpha$. То есть матрица одинакова для всех лучей связывающих две опорные плоскости.

Теперь обсудим изменение координат луча при преломлении на сферической границе.

Будем считать, что две опорные плоскости для преломления луча на сферической границе расположены вплотную с двух сторон сферической границы. Тогда y координата луча почти не изменяется при переходе от одной опорной плоскости к другой.

Преломление на сферической границе следующим образом изменяет координаты луча

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ n_2\alpha_2 = -\frac{n_2 - n_1}{R} y_1 + n_1\alpha_1 \end{cases}.$$

Уравнения преломления луча на сферической границе тоже можно переписать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Назовем матрицу $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$ матрицей преломления на сферической границе.

Заметим, что, как и для матрицы трансляции, все коэффициенты матрицы преломления на сферической границе не зависят от координат луча y и $n\alpha$. То есть матрица преломления на сферической границе также одинакова для всех лучей связывающих две опорные плоскости.

<u>Экзамен. Матричная оптика.</u>

Одна и та же матрица преобразует координаты любого луча при переходе от одной опорной плоскости к другой. Будем называть эту матрицу матрицей перехода от первой опорной плоскости ко второй.

В центрированной оптической системе с лучом могут происходить только две вещи: трансляция и преломление на сферической границе. Любая оптическая схема может быть представлена, как несколько последовательно

включенных элементов, каждый из которых либо трансляция, либо преломление на сферической границе.

Рассмотрим два последовательных элемента оптической схемы и три соответствующие им опорные плоскости. Пусть $\hat{M}_1$ — матрица перехода от первой опорной плоскости ко второй, $\hat{M}_2$ — матрица перехода от второй опорной плоскости к третьей. Тогда

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \hat{M}_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_3 \\ n_3\alpha_3 \end{pmatrix} = \hat{M}_2 \begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad => \quad \begin{pmatrix} y_3 \\ n_3\alpha_3 \end{pmatrix} = \hat{M}_2 \cdot \hat{M}_1 \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix} \quad =>$$

$\hat{M} = \hat{M}_2\hat{M}_1$ — матрица перехода от первой опорной плоскости к третьей. Следовательно, матрицы последовательных элементов оптической системы перемножаются. Причем сомножители матриц элементов оптической схемы расположены в обратном порядке по отношению к расположению элементов оптической схемы вдоль луча.

Перемножая матрицы оптических элементов, можно найти матрицу перехода между двумя любыми опорными плоскостями. Таким образом, любой оптической схеме можно сопоставить матрицу.

<u>Экзамен. Оптическая сила сферической границы. Оптическая сила тонкой линзы.</u>

Будем обозначать оптическую силу буквой Φ.

Для сферической границы двух сред по определению:

$$\Phi \equiv \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Тогда матрицу сферической границы можно переписать в новом виде:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим две близко расположенные друг к другу сферические границы:

$$\hat{M} = \hat{M}_2\hat{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 - \Phi_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из правой части равенства видно, что две близко расположенных границы имеют такую же матрицу, как и одна сферическая граница с суммарной оптической силой. В этом смысле оптические силы близко расположенных сферических границ складываются $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

Рассмотрим тонкую линзу в вакууме.

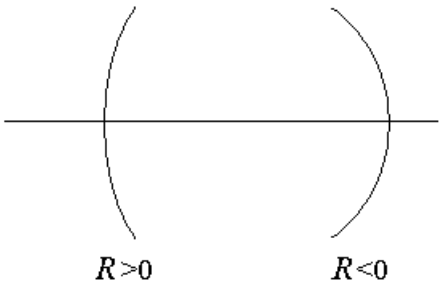
Линза — это две сферические границы. Для одной сферической границы оптическая сила $\Phi = \dfrac{n_2 - n_1}{R}$.

Для тонкой линзы в вакууме:

$\Phi = \dfrac{n-1}{R_1} + \dfrac{1-n}{R_2} = (n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$, тогда

$\Phi = (n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$ — оптическая сила тонкой линзы в вакууме, где для двояковыпуклой линзы $\begin{cases} R_1 > 0 \\ R_2 < 0 \end{cases}$.

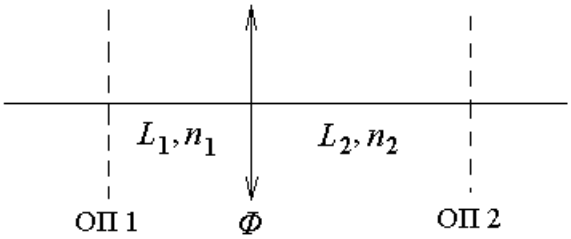
Введем правило знаков для радиуса кривизны сферической границы.



Будем считать, что $R > 0$, если центр сферы находится справа от сферической границы, то есть имеет положительную координату вдоль оптической оси, если начало координат принять в месте расположения сферической границы.

Экзамен. Изображение точечного источника света. Сопряженные плоскости. Формула тонкой линзы.

Рассмотрим линзу с оптической силой Φ и опорные плоскости с двух сторон линзы на расстоянии L_1 и L_2 от линзы. Пусть n_1, n_2 — показатели преломления сред с двух сторон линзы.



Найдем матрицу перехода от опорной плоскости 1 к опорной плоскости 2, как произведение трех матриц: матрицы перехода от линзы ко второй опорной плоскости, матрицы тонкой линзы и матрицы перехода от первой опорной плоскости к тонкой линзе.

$$\hat{M}=\begin{pmatrix}1 & \frac{L_2}{n_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\Phi & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{L_1}{n_1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{L_2}{n_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{L_1}{n_1}\\ -\Phi & 1-\frac{L_1}{n_1}\Phi\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-\frac{L_2}{n_2}\Phi & \frac{L_1}{n_1}+\frac{L_2}{n_2}-\frac{L_1}{n_1}\cdot\frac{L_2}{n_2}\cdot\Phi\\ -\Phi & 1-\frac{L_1}{n_1}\Phi\end{pmatrix}.$$

Из равенства $\begin{pmatrix}y_2\\ n_2\alpha_2\end{pmatrix}=\hat{M}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ n_1\alpha_1\end{pmatrix}$ найдем y_2 через y_1 и $n_1\alpha_1$:

$$y_2=\left(1-\frac{L_2}{n_2}\cdot\Phi\right)\cdot y_1+\left(\frac{L_1}{n_1}+\frac{L_2}{n_2}-\frac{L_1}{n_1}\cdot\frac{L_2}{n_2}\cdot\Phi\right)\cdot n_1\alpha_1.$$

Изображение точечного источника в линзе — точка пересечения всех лучей, выходящих из источника и прошедших линзу.

Сопряженные плоскости — это плоскость предмета и плоскость изображения. Подразумевается, что обе плоскости перпендикулярны оптической оси.

Пусть опорные плоскости 1 и 2 являются сопряженными плоскостями тонкой линзы.

Если в опорной плоскости 1 находится точечный источник света, то из этой точки в предметной плоскости ОП 1 под любыми углами α_1 к оптической оси выходят лучи. Если плоскость ОП 2 — плоскость изображения, то лучи после прохождения линзы соберутся в одной точке y_2 плоскости ОП 2. В этом случае y_2 не зависит от α_1. Для того чтобы y_2 не зависело от α_1 необходимо и достаточно чтобы коэффициент при α_1 в выражении для y_2 был бы равен нулю:

$$\frac{L_1}{n_1}+\frac{L_2}{n_2}-\frac{L_1}{n_1}\cdot\frac{L_2}{n_2}\cdot\Phi=0.$$

Выразим из этого равенства оптическую силу линзы Φ и получим

$$\Phi=\frac{n_2}{L_2}+\frac{n_1}{L_1}.$$

Вместо расстояний L_1 и L_2 введем координаты сопряженных плоскостей линзы относительно самой линзы: a — координата предметной плоскости, b — координата плоскости изображения. Тогда

$$\begin{cases}a=-L_1\\ b=L_2\end{cases}\qquad =>$$

$\Phi = -\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b}$ — формула тонкой линзы, где a, b — координаты предметной плоскости и плоскости изображения, n_1, n_2 — показатели преломления среды с двух сторон линзы, Φ — оптическая сила линзы.

Обычно $\begin{cases} n_1 = n_2 = 1 \\ a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$, тогда $\Phi = \frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|}$.

Заметим, что b (x-координата изображения) не зависит от y-координаты источника. Это означает, что для предметной опорной плоскости, перпендикулярной оптической оси, изображение будет тоже в некоторой плоскости перпендикулярной оптической оси (в плоскости изображения). То есть исходное предположение о сопряженных опорных плоскостях было правильным предположением.

<u>Экзамен. Фокальная плоскость линзы. Фокус. Фокусное расстояние.</u>

Фокальная плоскость линзы — плоскость, сопряженная к бесконечно удаленной плоскости.

Фокус — точка пересечения фокальной плоскости с оптической осью.

Фокусное расстояние — координата фокуса относительно линзы.

Передняя фокальная плоскость — это плоскость, сопряженная к бесконечно удаленной плоскости изображения. Пусть переднее фокусное расстояние равно f_1. Тогда

$$\Phi = -\frac{n_1}{f_1} + \frac{n_2}{+\infty} \quad => \quad \Phi = -\frac{n_1}{f_1}.$$

Рассмотрим теперь фокусное расстояние за линзой или заднее фокусное расстояние f_2. Задняя фокальная плоскость — это плоскость, сопряженная к бесконечно удаленной предметной плоскости. Тогда

$$\Phi = -\frac{n_1}{-\infty} + \frac{n_2}{f_2} \quad => \quad \Phi = \frac{n_2}{f_2}.$$

Объединяя формулу тонкой линзы и две формулы для фокусных расстояний, получим:

$$\Phi = -\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = -\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} \quad =>$$

$-\frac{n_1}{f_1} = -\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2}{f_2}$ — это тоже формулы тонкой линзы.

В простейшем случае $\frac{1}{|f|} = \frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|}$, когда $n_1 = n_2 = 1$.