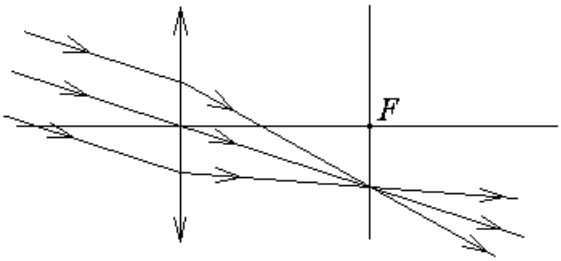
Экзамен. Фокальная плоскость линзы. Фокус. Фокусное расстояние (продолжение).

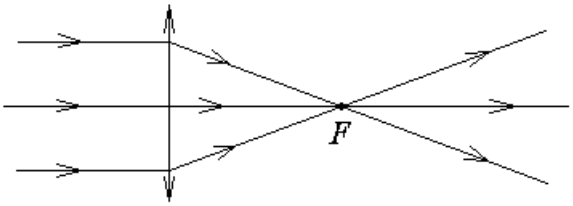
Если точечный источник света расположен очень далеко, то радиус фронта волны очень большой, и волна почти плоская. Плоской световой волне соответствует параллельный пучок лучей.

Рассмотрим падающий на линзу параллельный пучок лучей. Можно считать, что этот пучок лучей выходит из точечного источника, расположенного бесконечно далеко слева от линзы. Сопряженная бесконечно удаленному источнику плоскость совпадает с фокальной плоскостью линзы по определению фокальной плоскости.

Следовательно, параллельный пучок лучей линза собирает в одну точку в фокальной плоскости.



Пучок лучей параллельный оптической оси в соответствии с осевой симметрией задачи собирается в фокусе линзы.

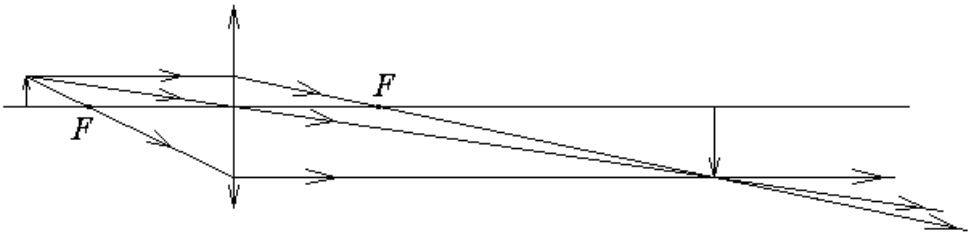


Экзамен. Построение изображений в тонкой линзе. Действительное и мнимое изображение.

Изображение действительное, если оно расположено за линзой. Изображение мнимое, если лучи за линзой не пересекаются, а пересекаются лишь их продолжения в область перед линзой.

В соответствии с этим если в плоскость действительного изображения поместить экран, то на экране будет видно изображение, если же экран поместить в плоскость мнимого изображения, то на экране изображения не будет.

Пример построения действительного изображения приведен на рисунке ниже:



.

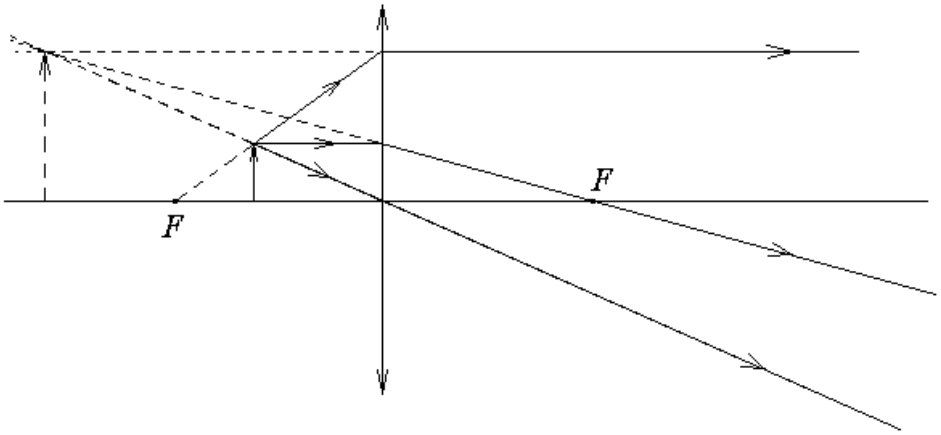
Для построения изображения точечного источника в тонкой линзе достаточно найти пересечение двух любых лучей, выходящих из точечного источника. Для этой цели есть три удобных луча.

1-ый луч — это луч, который до линзы идет параллельно оптической оси. После линзы этот луч проходит через задний фокус линзы.

2-ой луч до линзы проходит через передний фокус. После линзы этот луч проходит параллельно оптической оси.

3-ий луч проходит через центр тонкой линзы. После линзы этот луч проходит без изменения направления, если показатель преломления среды до и после линзы один и тот же. Дело в том, что центральная часть тонкой линзы похожа на плоскопараллельную пластинку, которая не изменяет направления проходящего через нее луча.

Пример построения мнимого изображения с теми же тремя лучами приведен на рисунке приведенном ниже:

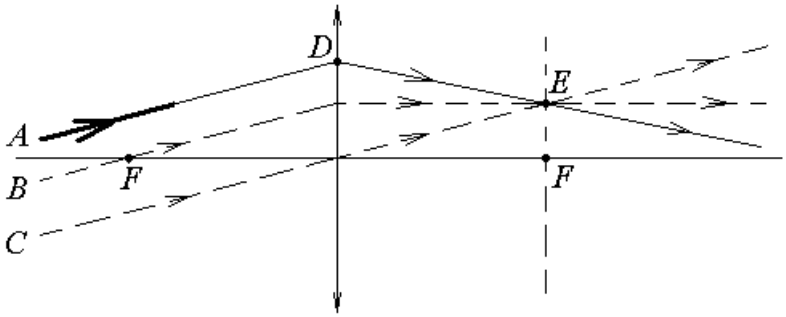


.

<u>Экзамен. Построение хода произвольного луча при прохождении тонкой линзы.</u>

При анализе оптической схемы часто возникает потребность понять ход конкретного луча, который не проходит ни через фокус линзы, ни через ее центр. Будем считать, что с обеих сторон тонкой линзы среда имеет одинаковый показатель преломления.

Пусть перед линзой произвольно задан луч *A*, и мы хотим построить ход именно этого луча после линзы.



Продлим луч *A* до линзы и получим на линзе точку *D*, через которую проходит луч *A*.

Для построения хода луча *A* за линзой достаточно найти еще хотя бы одну точку *E* за линзой, кроме точки *D*, через которую луч *A* обязан пройти. Через две точки *D* и *E* луч *A* пройдет за линзой единственным возможным образом.

Рассмотрим ход через линзу некоторых вспомогательных лучей, которые на самом деле могут отсутствовать.

Можно рассмотреть луч *B*, который проходит через передний фокус линзы и параллелен заданному лучу *A*, или рассмотреть луч *C* проходящий через центр линзы и тоже параллельный лучу *A*.

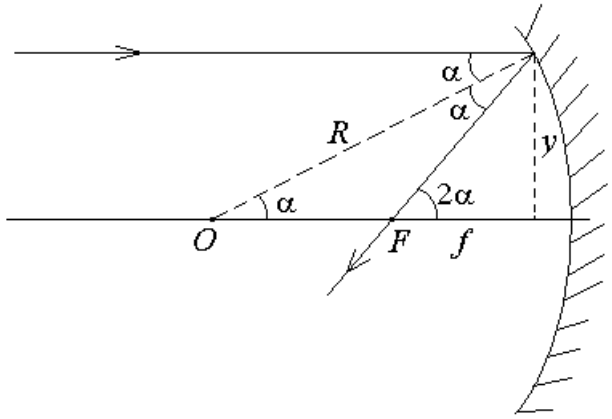
Луч *B*, проходящий через передний фокус линзы, после линзы пойдет параллельно оптической оси. Луч *C* проходит через центр линзы без изменения направления. Найдем точку пересечения *E* любого из этих двух лучей (*B* или *C*), прошедшего линзу, и задней фокальной плоскости линзы. Лучи *A*, *B*, *C* перед линзой параллельны друг другу, тогда после линзы они обязаны собраться в одной точке в фокальной плоскости. Следовательно, интересующий нас луч *A* обязан пройти точку *E* пересечения задней фокальной плоскости лучами *B* или *C*.

После линзы интересующий нас луч *A* проходит через точки *D* и *E*.

Экзамен. Сферическое зеркало.

Для сферического зеркала, как и для тонкой линзы, можно ввести в рассмотрение сопряженные плоскости, фокус и оптическую силу. Мы не будем подробно повторять для сферического зеркала рассуждения подобные рассуждениям, проведенным для тонкой линзы.

Рассмотрим вогнутое сферическое зеркало. Рассмотрим луч, падающий на зеркало параллельно оптической оси. Отраженный луч пересекает оптическую ось в фокусе зеркала (точка *F* на рисунке).



На рисунке обозначены буквой α три одинаковых угла, которые примыкают к отрезку, обозначенному на рисунке буквой R. Этот отрезок — перпендикуляр к поверхности зеркала в точке касания зеркала лучом. Два верхних угла равны друг другу, как угол падения и угол отражения от зеркальной поверхности.

Верхний и нижний из трех углов α равны друг другу, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых. Напомним, что по условию задачи луч падает на зеркало параллельно оптической оси.

Угол, обозначенный на рисунке как 2α, действительно равен сумме двух верхних углов α, так как два верхних угла вместе образуют угол, который является внутренним накрест лежащим углом по отношению к углу 2α при параллельных прямых.

Нормаль к сферической зеркальной поверхности пересекает оптическую ось в точке *O*, которая является центром сферической поверхности зеркала. Соответственно, расстояние от точки *O* до точки касания лучом зеркала равно радиусу зеркала R.

Точка касания лучом зеркала имеет y-координату, величину которой можно выразить двумя способами. С одной стороны $y = R \cdot \sin(\alpha) \approx R\alpha$, с другой стороны $y \approx f \cdot tg(2\alpha) \approx f\,2\alpha$. Приравнивая два выражения для одной и той же величины y, находим, что $f = \dfrac{R}{2}$ — фокусное расстояние сферического зеркала, где R — радиус кривизны зеркала. Для вогнутого зеркала по принятому нами правилу знаков обе величины отрицательные, так как и центр сферической поверхности зеркала, и фокус зеркала имеют отрицательную x-координату относительно зеркала.

<u>Экзамен. Матрица толстой линзы.</u>

Рассмотрим линзу, толщиной которой нельзя пренебречь по сравнению с радиусами кривизны линзы.

При получении матрицы толстой линзы кроме матриц двух сферических границ линзы нужно учитывать матрицу трансляции луча между сферическими

границами. Тогда матрицу толстой линзы можно найти, как произведение трех соответствующих матриц в обратном порядке:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица второй сферической границы, $\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица трансляции, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица первой сферической границы.

Дважды перемножая матрицы по правилу "строка на столбец" получим

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{n}\Phi_1 & \frac{L}{n} \\ \frac{L}{n}\Phi_1\Phi_2 - \Phi_1 - \Phi_2 & 1 - \frac{L}{n}\Phi_2 \end{pmatrix},$$

где $\Phi_1 = \frac{n-1}{R_1}$, $\Phi_2 = \frac{1-n}{R_2}$ — оптические силы двух сферических поверхностей в соответствии с определением оптической силы сферической границы $\Phi \equiv \frac{n_2 - n_1}{R}$, L — толщина линзы, n — показатель преломления линзы.

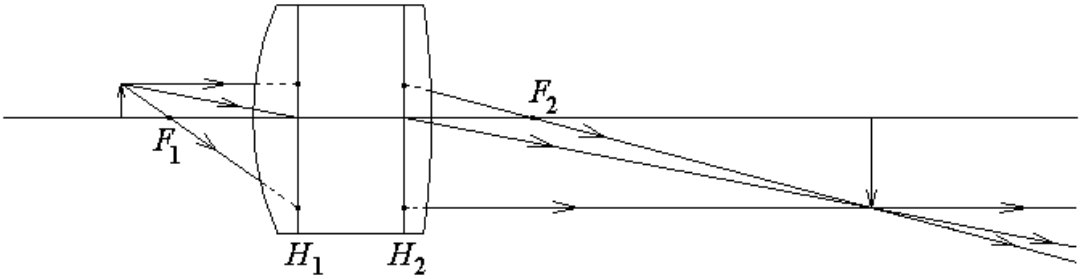
<u>Экзамен. Главные плоскости центрированной оптической системы.</u>

Главные плоскости оптической системы — это по определению сопряженные плоскости с единичным коэффициентом увеличения $\frac{y_2}{y_1} = 1$.

Для тонкой линзы обе главные плоскости находятся в месте расположения тонкой линзы.

Главные плоскости позволяют построить ход лучей, не рассматривая преломления лучей на реальных сферических границах оптической системы. Для построения хода лучей достаточно знать так называемые кардинальные точки оптической системы — это четыре точки пересечения оптической оси с двумя фокальными плоскостями (фокусы) и двумя главными плоскостями (главные точки).

Оптическая система ведет себя так, как будто пространство между главными плоскостями отсутствует, а в месте разрыва установлена тонкая линза, фокусные расстояния которой совпадают с фокусными расстояниями рассматриваемой оптической системы (с расстояниями от главных оптических плоскостей до фокусов). При этом подразумевается, что до первой главной плоскости луч идет, как бы не преломляясь на сферических границах. Аналогичное поведение луча подразумевается и после второй главной плоскости.



На рисунке приведен пример построения изображения предмета оптической системой с заданными главными плоскостями H_1 и H_2, и заданными положениями фокусов F_1 и F_2. Для построения изображения достаточно рассмотреть любые два луча из трех приведенных на рисунке.

Первый луч идет параллельно оптической оси системы до первой главной плоскости. Здесь он исчезает и появляется вновь на той же высоте, но во второй главной плоскости. Пространство между двумя главными плоскостями как бы отсутствует. Из точки на второй главной плоскости первый луч дальше по прямой линии проходит через задний фокус оптической системы, как это происходит после обычной тонкой линзы. То, что луч пройдет через фокус следует из определения фокальной плоскости, как плоскости сопряженной к бесконечно удаленной плоскости.

Второй луч из точки предмета идет в центр отсутствующей тонкой линзы, в точку пересечения первой главной плоскости и оптической оси системы. Считая, что пространства между главными плоскостями нет, продолжаем луч из точки пересечения второй главной плоскости и оптической оси параллельно ходу луча до первой главной плоскости, так как тонкая линза не изменяет направление луча, проходящего через центр тонкой линзы.

Третий луч проходит через передний фокус до первой главной плоскости и от второй главной плоскости идет параллельно оптической оси.

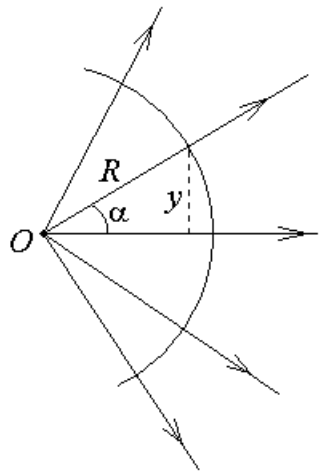
Положение главных плоскостей системы, как и положение фокусов, можно найти через элементы матрицы всей оптической системы, но мы этим заниматься не будем.

Экзамен. Гомоцентрический пучок лучей. Приведенный радиус кривизны. Правило ABCD.

Гомоцентрический пучок лучей — это пучок, образованный лучами, выходящими из одной точки на оптической оси, или лучами, идущими в одну точку на оптической оси.

В изотропной среде лучи перпендикулярны поверхности равных фаз. Гомоцентрическому пучку лучей соответствует сферический фронт волны.

По определению $\frac{R}{n}$ — приведенный радиус гомоцентрического пучка лучей, где R — радиус соответствующего сферического фронта волны, n — показатель преломления среды.



Для любой точки гомоцентрического пучка лучей выполняется соотношение $y = \alpha R$ с учетом малости угла α в приближении параксиальной оптики. Здесь y — расстояние от точки на фронте волны до оптической оси, α — угол между лучом, проходящем через рассматриваемую точку, и оптической осью. С учетом равенства $y = \alpha R$ получим $\frac{R}{n} = \frac{y}{n\alpha}$ — приведенный радиус равен отношению двух координат луча в формализме матричной оптики.

Пусть гомоцентрический пучок лучей проходит через оптическую систему с заданной матрицей $\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Тогда

$$\frac{R_2}{n_2} = \frac{y_2}{n_2\alpha_2} = \frac{Ay_1 + Bn_1\alpha_1}{Cy_1 + Dn_1\alpha_1} = \frac{A \cdot \frac{y_1}{n_1\alpha_1} + B}{C \cdot \frac{y_1}{n_1\alpha_1} + D} = \frac{A \cdot \frac{R_1}{n_1} + B}{C \cdot \frac{R_1}{n_1} + D}.$$

Откуда

$\frac{R_2}{n_2} = \frac{A\frac{R_1}{n_1} + B}{C\frac{R_1}{n_1} + D}$ — это и есть правило ABCD, или правило преобразования приведенного радиуса гомоцентрического пучка лучей.

<u>Факультативно. Гауссов пучок — хорошее приближение для описания лазерного пучка лучей.</u>

На первой лекции мы рассматривали частные решения волнового уравнения $\Delta E - \frac{1}{V_\phi^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$, которые получали методом разделения переменных. Сначала, разделяя временную и пространственные переменные, мы получили уравнение гармонических колебаний для зависимости от времени и уравнение Гельмгольца $\Delta R + k^2 R = 0$ для координатной зависимости. Далее, разделяя переменные в декартовых координатах, мы получили решения уравнения Гельмгольца в виде плоских монохроматических волн.

Если при поиске частных решений уравнения Гельмгольца разделять переменные в других системах координат, то получаться решения с другой симметрией.

При разделении переменных в цилиндрической системе координат получается, в частности, волна со спиральной поверхностью равных фаз. Эта волна имеет так называемый орбитальный момент импульса:

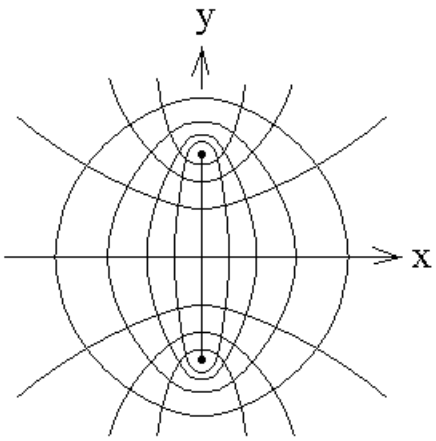
http://igorivanov.blogspot.com/2011/04/oam.html

Можно рассмотреть разделение переменных в эллиптической системе координат. В двумерном случае эллиптические координаты $\xi \geq 0$ и $0 \leq \eta \leq 2\pi$ вводится через декартовы координаты x, y, гиперболический синус sh и гиперболический косинус ch следующим образом:

$$\begin{cases} x = a \cdot sh(\xi) \cdot \sin(\eta) \\ y = a \cdot ch(\xi) \cdot \cos(\eta) \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} sh(\xi) \equiv \dfrac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2} \\ ch(\xi) \equiv \dfrac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2} \end{cases}.$$

В таком случае линии постоянного значения ξ являются эллипсами, а линии постоянного значения η — гиперболами.

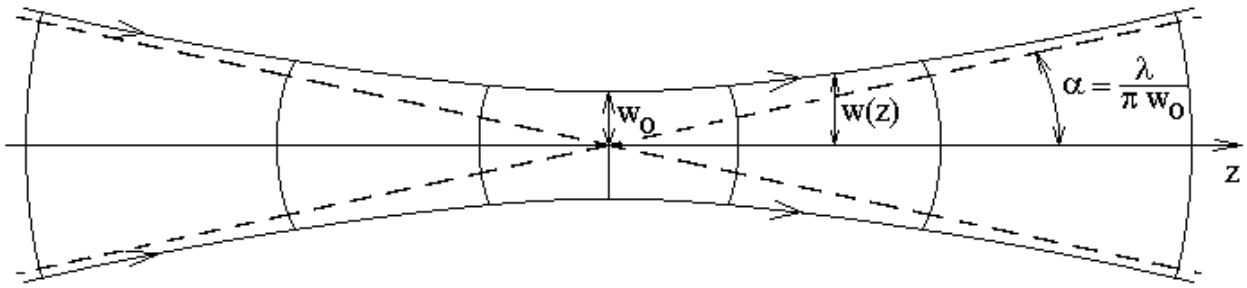
Все рассматриваемые эллипсы и гиперболы имеют два общих фокуса с декартовыми координатами $(0, a)$ и $(0, -a)$.



В трехмерном случае добавим в качестве третьей координаты угол поворота вокруг оси x.

Если при решении уравнения Гельмгольца $\Delta R + k^2 R = 0$ переменные разделять в эллиптической системе координат, то получатся решения, в которых лучи распространяются по гиперболам $\eta = const$. Если рассмотреть только лучи, составляющие малые углы с оптической осью, то получатся так называемые Гауссовы пучки. Гауссовы пучки являются хорошим приближением для описания излучения лазеров.

Изменим обозначение горизонтальной оси с x на z. Пусть световая волна распространяется вдоль оптической оси z и образует параксиальный пучок лучей. Примерный ход лучей и поверхности равных фаз изображены на ниже следующем рисунке.



Будем называть пучок лучей гауссовым, если комплексное поле $\tilde{E}$ световой волны можно найти по следующей формуле:

$$\tilde{E}(t,\vec{r}) = \tilde{E}_0 \cdot \frac{w_0}{w(z)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right) \cdot \exp\left(ik\left(z - \frac{x^2+y^2}{2R(z)}\right) + i\varphi(z)\right) \cdot \exp(-i\omega t) \tag{10.1}$$

где
$$\begin{cases} w^2(z) = w_0^2 \cdot \left[1 + \left(\dfrac{2z}{kw_0^2}\right)^2\right] \\ R(z) = -z \cdot \left[1 + \left(\dfrac{kw_0^2}{2z}\right)^2\right] \\ tg(\varphi(z)) = \dfrac{kw_0^2}{2z} \end{cases} \tag{10.2}$$

В приближении параксиальной оптики справедливо неравенство $w_0 >> \lambda$.

Пунктирными линиями показаны асимптоты лучей при большом удалении от начала координат.

В формулах (10.1) и (10.2) величина $w(z)$ представляет собой зависимость радиуса пучка лучей от координаты z вдоль оптической оси, w_0 — радиус пучка лучей в самом узком месте, в так называемой шейке каустики при $z = 0$. Каустическая поверхность (каустика) в оптике — это поверхность,

являющаяся огибающей семейства световых лучей, испущенных светящейся точкой и прошедших через оптическую систему. В приближении геометрической оптики эту поверхность имеет смысл рассматривать только с учетом сферической аберрации, которая будет рассмотрена позднее. В нашем случае каустическая поверхность — это поверхность, которая получается при вращении траектории одного луча на краю пучка лучей вокруг оптической оси. Величина $R(z)$ представляет собой зависимость радиуса кривизны гомоцентрического пучка лучей от координаты z вдоль оптической оси. $\varphi(z)$ — фазовый сдвиг относительно фазы плоской волны, если бы она распространялась вдоль оси z.

В формуле (10.1) для электрического поля E световой волны само поле E умышленно указано без значка вектора, так как направление вектора E различно в разных точках гауссова пучка. В каждой пространственной точке вектор E перпендикулярен лучу в этой точке.

<u>Свойства гауссовых пучков.</u>

1). Лучи распространяются по гиперболам, а не по прямым линиям, как того требует принцип Ферма (мы рассмотрим принцип Ферма чуть позднее).

2). Фазовая скорость волн в пустоте не равна универсальной константе c, так как сдвиг фаз $\varphi(z)$ в выражении (10.1) является функцией координаты z, что видно из третьей формулы системы (10.2). Фазовую скорость можно найти из уравнения поверхности равных фаз, которая получается, если приравнять фазу уравнения (10.1) константе:

$$kz - k\frac{x^2+y^2}{2R(z)} + \varphi(z) - \omega t = const,$$

Для простоты рассмотрим фазовую скорость только вдоль оптической оси, когда $x=0$ и $y=0$, и получим

$$kz + \varphi(z) - \omega t = const.$$

Продифференцируем это уравнение по времени, считая z и φ функциями времени, и получим:

$$k\frac{dz}{dt} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} - \omega = 0 \quad => \quad V_{\phi} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k + \frac{d\varphi}{dz}} > \frac{\omega}{k} = c.$$

Здесь неравенство получено с учетом производной от равенства $tg(\varphi) = \frac{kw_0^2}{2z}$ по z:

$$\frac{1}{\cos^2(\varphi)}\cdot\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{kw_0^2}{2z^2}, \text{ откуда } \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{kw_0^2}{2z^2}\cdot\cos^2(\varphi) < 0.$$

То есть фазовая скорость отличается от универсальной константы c.

3). Чем более узкой оказывается шейка каустики, тем больше расходимость пучка лучей.

Угловой радиус расходимости равен $\alpha = \dfrac{\lambda}{\pi w_0} \approx \dfrac{\lambda}{2w_0}$. Такая величина углов дифракции характерна для дифракции на препятствии размером $2w_0$, например для дифракции на отверстии диаметром $2w_0$.

4). Шейка каустики не отображается линзой по законам геометрической оптики. Это необходимо учитывать при попытке сфокусировать лазерное излучение.

Гауссов пучок после линзы снова становится гауссовым пучком, только с другими параметрами. Это позволяет найти, как линза изменяет положение шейки каустики.

На практике при попытке сфокусировать лазерное излучение возникает следующая задача. Известен радиус шейки каустики w_{01} и z_1 — координата линзы относительно шейки каустики. Требуется найти радиус шейки каустики w_{02} после линзы и координату линзы z_2 относительно новой шейки каустики. Для решения этой задачи нужно сделать следующее:

а). Сначала найдем R_1 — радиус кривизны фронта волны в точке с координатой $z = z_1$ непосредственно перед линзой по второй формуле системы (10.2)

$$R_1(z) = -z_1 \cdot \left[1 + \left(\frac{k{w_{01}}^2}{2z_1} \right)^2 \right]$$

по известным параметрам w_{01}, z_1 пучка лучей до линзы.

б). Найдем радиус w_1 пучка лучей на линзе по формуле 1 системы (10.2) также по известным величинам w_{01}, z_1 пучка лучей до линзы:

$$w_1^2(z) = {w_{01}}^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{2z_1}{k{w_{01}}^2} \right)^2 \right].$$

Теперь будем искать параметры пучка лучей после линзы.

в). По правилу ABCD из величины радиуса кривизны фронта непосредственно перед линзой можно найти радиус кривизны сразу за линзой:

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D},$$

где для тонкой линзы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}$, где $\Phi = \dfrac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} \right)$.

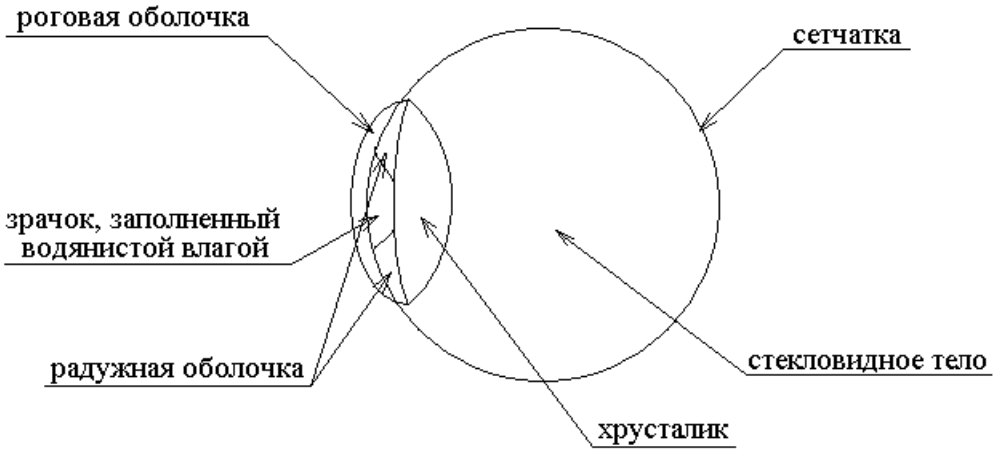
Радиус пучка лучей при прохождении через тонкую линзу не изменяется, поэтому $w_2 = w_1$.

г). Решим теперь систему из первых двух уравнений системы (10.2)

$$\begin{cases} w_2^2(z_2) = w_{02}^2 \cdot \left[1 + \left(\dfrac{2z_2}{kw_{02}^2}\right)^2\right] \\ R_2(z_2) = -z_2 \cdot \left[1 + \left(\dfrac{kw_{02}^2}{2z_2}\right)^2\right] \end{cases}$$

относительно неизвестных величин w_{02} и z_2 для пучка лучей после линзы при уже известных величинах w_2 — радиуса пучка лучей на линзе, и R_2 — радиуса кривизны фронта волны сразу за линзой. Решение этой системы позволяет найти положение $-z_2$ новой шейки каустики относительно линзы и новый радиус шейки каустики w_{02}.

Экзамен. Глаз.



Рассмотрим устройство глаза, мысленно двигаясь по ходу луча.

Сначала свет проходит роговую оболочку, которая защищает глаз от механических повреждений. Под роговой оболочкой свет проходит через зрачок глаза, заполненный водянистой влагой. Зрачок по периметру ограничен радужной оболочкой. Радужная оболочка не пропускает свет и представляет собой диафрагму, которая защищает глаз от избыточной засветки. Диаметр диафрагмы, той ее части, которая открыта для света, изменяется рефлекторно в зависимости от освещенности глаза. Если смотреть человеку в глаза, то центральная часть глаза выглядит, как черный кружок. Это и есть зрачок глаза. Зрачок глаза выглядит черным, так как свет проходит через зрачок в глаз и почти не отражается назад.

После зрачка свет попадает в хрусталик глаза. Хрусталик глаза представляет собой линзу, которая отображает рассматриваемый глазом предмет на заднюю стенку глаза. После линзы хрусталика свет проходит стекловидное тело, которое представляет собой основной объем глаза. На задней стенке стекловидного тела расположена сетчатка глаза, состоящая из

светочувствительных клеток. В случае отслоения сетчатки ее пытаются приварить лазерным лучом.

Глазные мышцы позволяют сделать линзу хрусталика глаза более или менее выпуклой. При этом изменяется оптическая сила хрусталика. Способность глазных мышц подстраивать оптическую силу хрусталика так, чтобы изображение рассматриваемого предмета попадало на сетчатку глаза, называется аккомодацией глаза.

Обычно, обсуждая согласование какого-либо оптического прибора с глазом человека, считают, что глаз аккомодирован на бесконечность.

В случае помутнения хрусталика (катаракта) его заменяют кварцевой линзой.

Экзамен. Три цвета радуги. Свет и цвет.

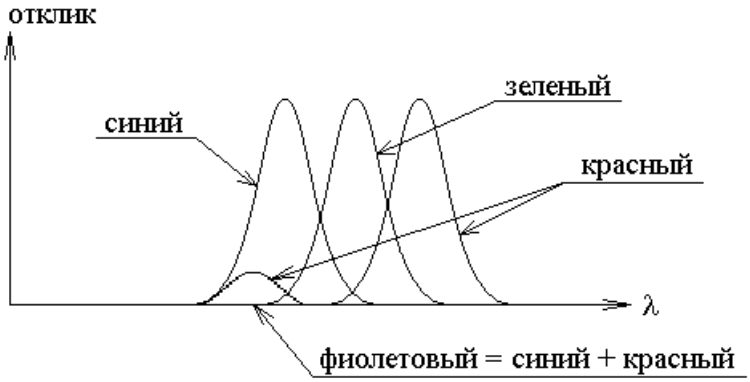
Свет имеет цвет.

Сетчатка глаза состоит из светочувствительных клеток двух типов.

Клетки одного типа (палочки) реагируют только на интенсивность света и позволяют видеть в полутьме. В экваториальных широтах, где день быстро сменяется ночью, границей дня и ночи считается момент, когда пропадают цвета.

Другие клетки чувствительные к цвету (колбочки) бывают трех типов. Они по-разному реагируют на свет разных длин волн. К коротким волнам (синий свет) чувствительны колбочки типа 'S' (short), к средним волнам (зеленый свет) — типа 'M' (medium), к длинным (красный свет) — 'L' (long).

Очень грубо (не в масштабе) зависимость чувствительности колбочек от длины волны света представлены на ниже следующем рисунке.



Поскольку глаз имеет только три разных отклика на свет, то и цветов радуги только три, а не семь. Так одна точка цветного изображения монитора содержит три светодиода трех разных цветов: синего, зеленого и красного. Эти три светодиода позволяют создавать любые оттенки цвета.

Несколько иначе обстоит дело с красками. Краски бывают двух типов: рассеивающие нужный свет или пропускающие его насквозь. Например, краски цветного струйного принтера пропускают нужный свет.

1). Желтая краска поглощает синий свет, а остальные цвета пропускает.

2). Лиловая краска поглощает зеленый свет.

3). Бирюзовая — красный.

Белый свет — это суперпозиция красного, зеленого и синего света. Белый свет, проходя через принтерную краску, окрашивается, достигает белой бумаги, рассеивается и проходит обратно через краску, окрашиваясь еще сильнее.

Поглощая в нужных пропорциях разные цвета из белого света, можно добиться любого оттенка рассеянного белой бумагой света.

Факультативно. Фотометрический парадокс Ольберса.

Все небо должно светиться от звезд при любой средней концентрации звезд в бесконечной Вселенной.

И действительно, пусть n — средняя концентрация звезд, σ — площадь поперечного сечения одной звезды, r — расстояние от Земли до звезды. Тогда $\Omega = \dfrac{\sigma}{r^2}$ — телесный угол, под которым с Земли видна звезда. Рассмотрим вокруг Земли сферический слой с радиусами r и $r+dr$. Объем слоя $dV = 4\pi r^2 dr$, количество звезд в этом слое $dN = n\,dV = 4\pi r^2 n\,dr$. Суммарный телесный угол, под которым видны звезды сферического слоя:

$$d\Omega = \frac{\sigma}{r^2} dN = \frac{\sigma}{r^2} 4\pi r^2 n dr = 4\pi\sigma n\,dr.$$

Если просуммировать телесные углы по всем r от нуля до бесконечности, то интеграл расходится на бесконечности. То есть, все небо должно светиться от звезд. Почему же оно не светится? Этому парадоксу может быть несколько объяснений.

Первое объяснение состоит в том, что средняя концентрация звезд во Вселенной равна нулю. И в этом нет ничего удивительного.

И действительно. Средняя плотность вещества в атомном ядре очень велика, но ядра атомов, например в твердой или жидкой фазе вещества, из которых состоит планета, расположены далеко друг от друга по сравнению с размерами одного атомного ядра. Поэтому средняя плотность вещества на планете гораздо ниже средней плотности вещества в атомном ядре.

Планеты Солнечной системы расположены далеко друг от друга по сравнению с размерами планет, поэтому средняя плотность вещества в Солнечной системе гораздо ниже средней плотности вещества одной планеты.

Звезды нашей галактики расположены далеко друг от друга по сравнению с размерами Солнечной системы, поэтому средняя плотность вещества в нашей галактике гораздо меньше средней плотности вещества в Солнечной системе.

Звездные галактики расположены далеко друг от друга по сравнению с размерами одной галактики, поэтому средняя плотность вещества в видимой части Вселенной гораздо меньше средней плотности вещества в нашей галактике.

Если предположить, что эта тенденция продолжается и в более крупных масштабах, то средняя плотность вещества во Вселенной может оказаться меньше любой наперед заданной величины, то есть может оказаться нулевой величиной.

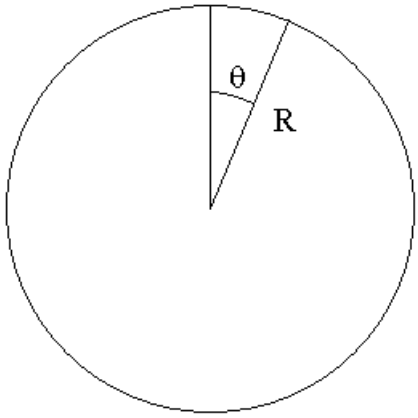
Второе объяснение парадокса состоит в том, что Вселенная родилась в результате Большого взрыва, который был примерно 15 миллиардов лет назад. В таком случае мы не можем видеть свет звезд, которые расположены от нас на расстоянии дальше 15 миллиардов световых лет. Не можем, так как для нашего наблюдения сейчас эти звезды должны были бы излучить свет больше, чем 15 миллиардов лет назад, то есть тогда, когда этих звезд еще не было. Следовательно, складывать телесные углы звезд от сферических слоев нужно не до бесконечного радиуса, а только до радиуса 15 миллиардов световых лет. В результате интеграл сходится к конечной величине, и большая часть неба остается свободной от светящихся звезд.

Здесь полезно сделать замечание, основанное на представлениях о кривом пространстве-времени теории относительности. Представьте себе, что наше пространство искривлено.

А как это представить? Можно рассмотреть кривое пространство в более простом двумерном случае вместо реального трехмерного кривого пространства. Простейшее кривое двумерное пространство — это поверхность сферы. Радиус кривизны этого пространства — это радиус сферы. Любой малый участок этой сферы почти не искривлен, если размеры рассматриваемого участка гораздо меньше радиуса кривизны. Аналогично наше трехмерное пространство, если рассмотреть малый его участок по сравнению с радиусом кривизны пространства, то окажется, что пространство почти не искривлено.

Вернемся к двумерному пространству поверхности сферы. Большой взрыв, в результате которого все звезды разлетаются, можно рассматривать, как увеличение со временем радиуса сферы. Расстояния между двумя любыми точками на сфере при этом увеличиваются во времени пропорционально радиусу сферы. Может оказаться так, что даже со скоростью света нельзя добраться от одной точки сферы до другой. Для этого необходимо, чтобы радиус сферы увеличивался с ускорением. При этом одна часть пространства оказывается принципиально недоступной для другой части пространства. Для каждой точки в таком случае есть некоторый горизонт, за которым находится недоступная для изучения реальность. Некоторые объекты со временем могут уходить за этот горизонт и становиться недоступными.

За малый промежуток времени dt угловое перемещение по сфере со скоростью света c равно $d\theta = \frac{c\,dt}{R}$, где R — радиус сферы.



Если, например $R(t) = R_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$, то интеграл $\theta = \int_{t_0}^{\infty} d\theta = \int_{t_0}^{\infty} \frac{c\,dt}{R(t)}$ сходится. То есть за бесконечное время можно переместиться по сфере только на конечный угол. Если этот угол меньше начального угла между двумя точками, то эти точки недоступны друг для друга.

Согласно современным данным вселенная расширяется с ускорением, хотя предполагают, что даже на ранних стадиях расширения радиус кривизны пространства возрастал быстрее скорости света (теория инфляции).

Если часть пространства недоступна, то и свет звезд от этой части пространства отсутствует. Может быть, не все небо светится именно поэтому?