<u>Экзамен. Спектр света. Разные определения спектра света. Спектр экспоненциально затухающего светового цуга</u> (продолжение)**.**

Если $\omega \approx \omega_0$, то с учетом $\omega_0 \gg \Gamma$, второе слагаемое оказывается гораздо больше первого

$$\left|\frac{1}{\Gamma - i\left(\omega + \omega_0\right)}\right| << \left|\frac{1}{\Gamma - i\left(\omega - \omega_0\right)}\right|,$$

так как знаменатель второго слагаемого — величина порядка Γ, а знаменатель первого слагаемого — величина порядка $2\omega_0$. Фурье образ представляет интерес, когда он достаточно велик. Тогда интерес представляет область частот $\omega \approx \omega_0$, и Фурье образ примерно равен

$$\tilde{E}_0(\omega) \approx \frac{E_0}{2\pi\left(\Gamma - i\left(\omega - \omega_0\right)\right)}.$$

Спектр света G_ω пропорционален квадрату модуля Фурье образа:

$$\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 = \frac{E_0^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\Gamma^2 + \left(\omega - \omega_0\right)^2} = \frac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma}\right)^2} = \frac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma}\right),$$

где $G_\omega \sim \mathscr{L}(x) \equiv \frac{1}{1 + x^2}$ — так называемый лоренцевский контур спектральной линии излучения одиночного атома, где $x \equiv \frac{\omega - \omega_0}{\Gamma}$ — безразмерная отстройка частоты ω от центра линии излучения ω_0, Γ — полуширина на полувысоте спектрального контура.

<u>Факультативная вставка.</u>

Если все-таки вводить определенный коэффициент пропорциональности между спектром G_ω и квадратом модуля Фурье образа $\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$, то это можно сделать следующим образом. Пусть $G = \frac{dW}{dS}$ — энергия электромагнитного поля, которая падает на единичную площадку перпендикулярную свету. Тогда

$$G = \int_0^{+\infty} G_\omega \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t)\, dt, \qquad (1)$$

где $G_\omega \equiv \frac{dG}{d\omega}$ — спектр света или энергия, которая падает на единичную площадку в единичном интервале частот; $I(t)$ — интенсивность света или энергия, которая падает на единичную площадку в единицу времени.

Интенсивность света связана с его амплитудой $I(t)=\frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2(t)$. Если теперь для светового цуга взять $E_0(t)=E_0e^{-\Gamma t}$ при $t>0$, в равенство (1) подставить $G_\omega=\alpha\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$ с неизвестным коэффициентом α и подставить $\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2=\frac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Gamma}\right)$, то можно найти величину коэффициента α. В результате окажется, что

$$G_\omega=2\pi\frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2.$$

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Если вместо светового импульса нужно анализировать изменение спектра света со временем, то рассматривают ряд Фурье. Для вычисления Фурье образа напряженности нужно рассматривать не один момент времени, а некоторый промежуток. Этот промежуток времени *T* усреднения спектра выбирают произвольно. Спектр будет существенно зависеть от этого выбора.

Сначала рассматривают первый промежуток времени *T* и на этом промежутке определяют спектр. С этой целью реальную зависимость светового поля от времени заменяют периодической зависимостью с периодом *T*. На этом периоде световое поле полагается равным реальному световому полю на первом промежутке времени *T*. Для полученного таким образом периодического светового поля находят разложение в ряд Фурье. Квадраты модулей коэффициентов этого разложения представляют собой гистограмму спектра света на первом промежутке времени *T*. Затем рассматривают второй промежуток времени *T* с реальной зависимостью светового поля от времени. Чтобы найти спектр для этого второго промежутка времени *T*, реальную зависимость светового поля от времени опять заменяют на периодическую зависимость с периодом *T*. Только теперь на этом периоде световое поле совпадает с реальным световым полем на втором промежутке времени *T*. Опять вычисляют ряд Фурье. Квадраты модулей коэффициентов ряда Фурье — гистограмма спектра на втором промежутке времени *T*. И так далее. Получается возможность рассмотрения зависимости спектра от времени.

Если квадрат модуля Фурье амплитуды умножить на некоторый коэффициент:

$$I_m=\frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2,$$

то I_m окажется интенсивностью света на частоте $\omega_m=m\frac{2\pi}{T}$. Можно доказать, что общая интенсивность света $I=\sum_{m=0}^{+\infty}I_m$. Набор интенсивностей I_m удобно называть и называют спектром света. В этом определении спектр света — это некоторая гистограмма.

Факультативная вставка.

Покажем, что $I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m$.

Выразим интенсивность света через среднее значение квадрата напряженности, а напряженность подставим в виде ряда Фурье.

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle\left(\vec{E}(t),\vec{E}(t)\right)\right\rangle_t =$$

$$= \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle\left(\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_m e^{-i\omega_m t},\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_k e^{-i\omega_k t}\right)\right\rangle_t$$

Вынесем комплексные экспоненты за знак скалярного произведения и получим

$$I = \frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m,k=-\infty}^{+\infty}\left\langle e^{-i\omega_m t}\cdot\left(e^{-i\omega_k t}\right)^*\right\rangle_t\cdot\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_k\right) = \frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m,k=-\infty}^{+\infty}\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t\cdot\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_k\right)$$

Если частоты ω_k и ω_m не совпадают, то $\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t = 0$, так как $e^{i(\omega_k-\omega_m)t}$ — комплексное число единичной длины, которое вращается на комплексной плоскости с угловой скоростью $\omega_k - \omega_m$. Если же частоты совпадают $\omega_k = \omega_m$, то $\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t = 1$. Тогда

$\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t = \delta_{km}$ — дельта символ Кронекера. Тогда

$$I = \frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_m\right) = \frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{\vec{E}}_m\right|^2.$$

Учтем, что $\left|\tilde{\vec{E}}_{-m}\right| = \left|\tilde{\vec{E}}_m\right|$, так как $\tilde{\vec{E}}_{-m} = \tilde{\vec{E}}_m^*$ и получим

$$I = \frac{cn}{16\pi\mu}E_0^2 + \frac{cn}{8\pi\mu}\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\tilde{E}_m\right|^2.$$

Сравним это выражение с выражением интенсивности через вещественную амплитуду светового поля E_0:

$$I = \frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2.$$

Вещественная амплитуда равна модулю комплексной амплитуды, тогда

$I_m = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2$ — интенсивность светового поля на частоте $\omega_m = m\frac{2\pi}{T}$.

Введем для интенсивности на нулевой частоте определение: $I_0 \equiv \frac{cn}{16\pi\mu} E_0{}^2$, тогда интенсивность света $I = \frac{cn}{16\pi\mu} E_0^2 + \frac{cn}{8\pi\mu} \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \tilde{E}_m \right|^2$ можно выразить, как сумму интенсивностей по положительным частотам:

$$I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m .$$

Конец факультативной вставки.

Факультативная вставка.

Особняком при рассмотрении спектра стоит излучение абсолютно черного тела (формула Планка). Здесь под спектром обычно понимают спектральную плотность объемной плотности энергии электромагнитного поля

$$w_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} .$$

Конец факультативной вставки.

Факультативная вставка.

Есть еще один вариант определения спектра. Рассмотрим автокорреляционную функцию напряженности светового поля:

$$F(\tau) \equiv \left\langle E(t) E(t+\tau) \right\rangle_t ,$$

где угловые скобки — это усреднение по времени.

Эту функцию можно измерить в эксперименте, как сигнал с приемника света в интерферометре Майкельсона (обсудим его позднее) при движении одного из зеркал интерферометра с постоянной скоростью. Функция $F(\tau)$ — четная функция, поэтому ее можно разложить в интеграл Фурье по косинусам. Фурье-образ функции $F(\tau)$ будет вещественной положительной функцией частоты. Частота в Фурье разложении через скорость движения зеркала связана с оптической частотой света. Этот Фурье-образ, как функцию от оптической частоты, тоже можно по определению считать спектром света. Подробнее об этом может быть рассказано в вопросе о Фурье спектроскопии.

Конец факультативной вставки.

Факультативно. Теорема Парсеваля.

Если рассмотреть два выражения для поверхностной плотности энергии светового поля:

$$G = \int_0^{+\infty} G_\omega \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) \, dt ,$$

где G_ω — спектр света или энергия, которая падает на единичную площадку перпендикулярную направлению света в единичном интервале циклических частот, $I(t)$ — зависимость интенсивности света от времени. То из этого равенства можно получить теорему Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)\,dt,$$

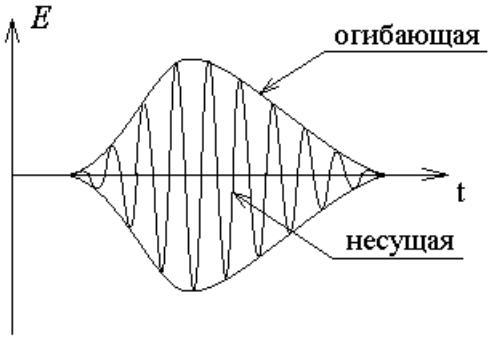
если вместо нашего определения $\tilde{\tilde{E}}_0(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt$ положить, что $\tilde{\tilde{E}}_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt$, то получим:

Заметим, что в математике теорема Парсеваля доказана для более общего случая унитарного преобразования. Преобразование Фурье — частный случай унитарного преобразования.

Экзамен. Спектр огибающей амплитудно-модулированного светового импульса и спектр самого импульса.

Рассмотрим световое поле в одной пространственной точке. Пусть для простоты свет линейно поляризован. Тогда можно не следить за направлением светового поля $\vec{E}(t)$, а рассматривать только его величину.

Рассмотрим световой импульс.



Огибающая светового импульса — медленно меняющаяся амплитуда поля.

Несущая — синусоида с частотой заполнения огибающей. Косинусоида — это та же синусоида только со сдвигом фазы на $\frac{\pi}{2}$, поэтому косинусоиды для благозвучия тоже будем называть синусоидами.

Световой импульс — произведение двух функций: медленной огибающей и синусоиды несущей частоты.

Огибающую можно представить, как сумму нескольких синусоид, то есть в виде Фурье разложения.

Рассмотрим простейший вариант огибающей, которая состоит из одной синусоиды с частотой Ω_0:

$A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)$.

Пусть несущая имеет оптическую частоту ω_0:

$\cos(\omega_0 t)$, где $\Omega_0 << \omega_0$.

Тогда

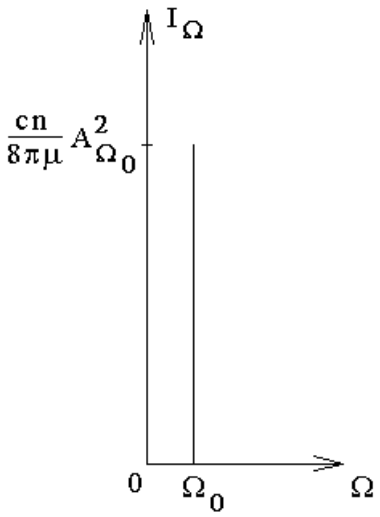
$$E(t) = A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)\cdot\cos(\omega_0 t) = \frac{A_{\Omega_0}}{2}\cos((\omega_0+\Omega_0)t) + \frac{A_{\Omega_0}}{2}\cos((\omega_0-\Omega_0)t).$$

Оказалось, что свет состоит из синусоид двух частот: $(\omega_0+\Omega_0)$ и $(\omega_0-\Omega_0)$. Амплитуда каждой из них $\frac{A_{\Omega_0}}{2}$ вдвое меньше амплитуды A_{Ω_0} огибающей $A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)$, а интенсивность вчетверо меньше, как квадрат амплитуды: $I = \frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2$.

Рассмотрим три спектра. Для простоты будем считать, что частоты Ω_0 и ω_0 кратны одной и той же малой частоте ω_1. Тогда световое поле является периодической функцией с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Периодическое световое поле можно разложить в ряд Фурье. Будем под спектром света понимать совокупность интенсивностей Фурье компонент I_m. Для светового поля отличными от нуля окажутся интенсивности только двух компонент ряда Фурье с положительными частотами $\omega_0-\Omega_0$ и $\omega_0+\Omega_0$. В спектре огибающей окажется отличной от нуля интенсивность только одной компоненты с положительной частотой Ω_0. Амплитуды Фурье компонент будут совпадать с амплитудами соответствующих синусоид, а интенсивности компонент будут связаны с амплитудами обычными соотношениями вида $I = \frac{cn}{8\pi\mu}A^2$.

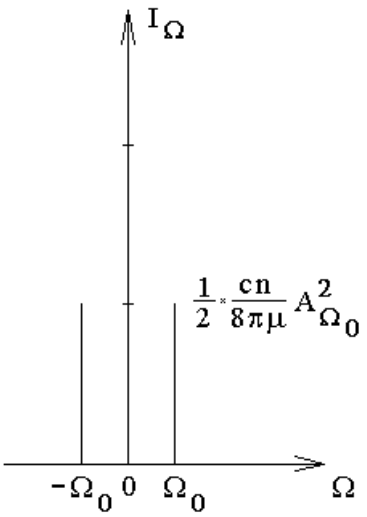
Рассмотрим гистограммы трех спектров.

1).



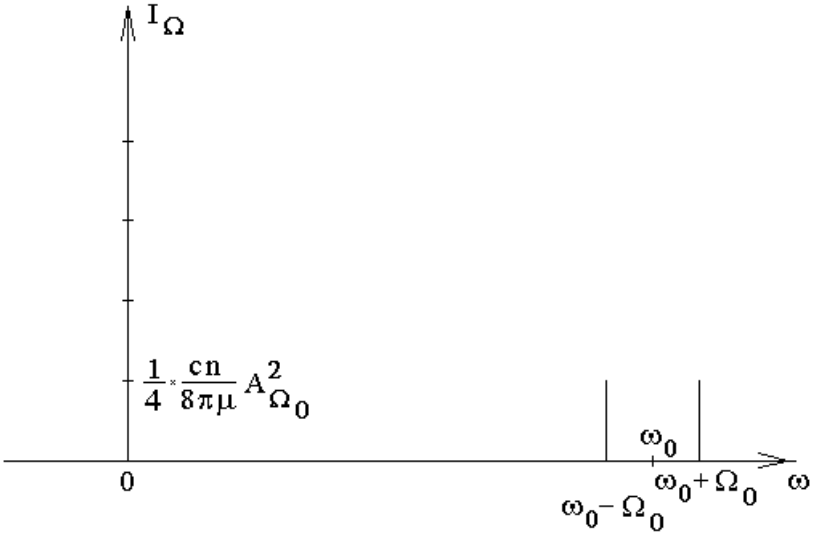
Спектр огибающей, который в рассматриваемом случае состоит из одной спектральной линии.

2).



Спектр огибающей в частотах обоих знаков. При этом чтобы суммарная интенсивность осталась без изменения, и интенсивность была бы равна сумме интенсивностей, нужно считать, что на каждую из этих двух частот приходится половина всей интенсивности.

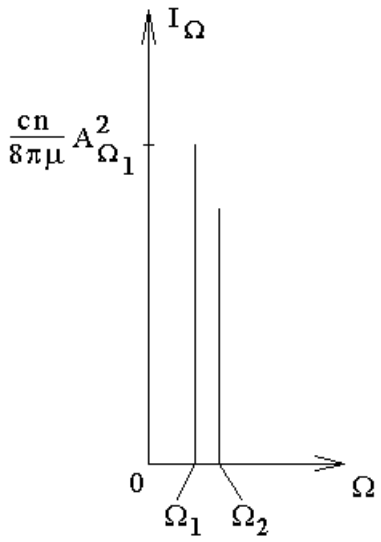
3).



Спектр светового импульса представляет собой спектр огибающей обоих знаков, сдвинутый на частоту несущей ω_0. Интенсивности линий спектра становятся еще вдвое меньше.

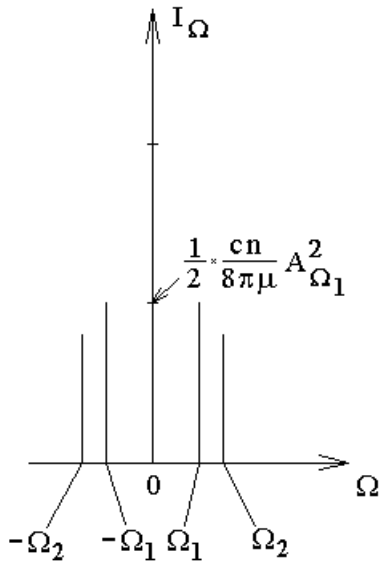
Причина еще одного коэффициента $\frac{1}{2}$ вызвана тем, что световой импульс в сравнении с огибающей имеет сомножитель $\cos(\omega_0 t)$, а интенсивность при этом имеет сомножитель $\left\langle \cos^2(\omega_0 t)\right\rangle_t = \frac{1}{2}$.

Обсудим теперь огибающую светового импульса, в спектре которой содержится несколько частот, например две:



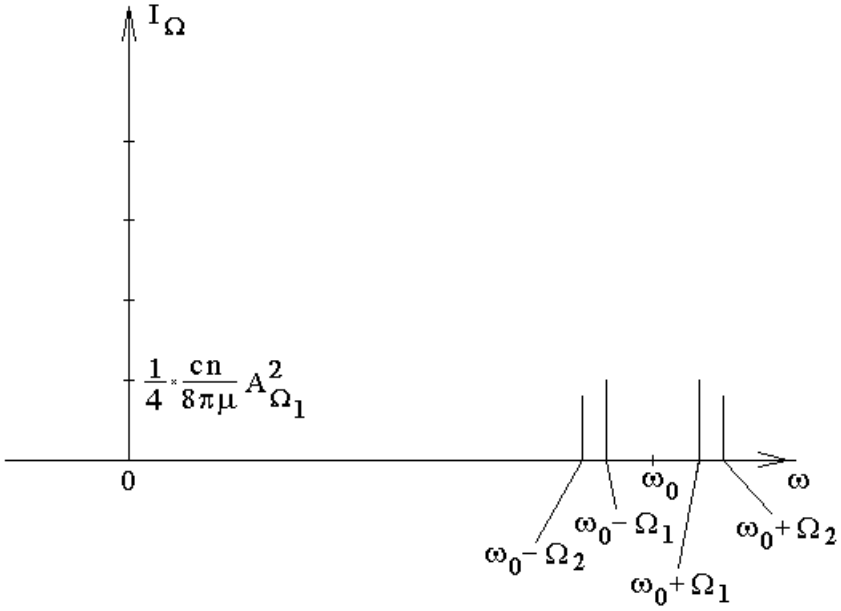
.

Спектр огибающей в частотах обоих знаков будет иметь вдвое меньшие интенсивности:



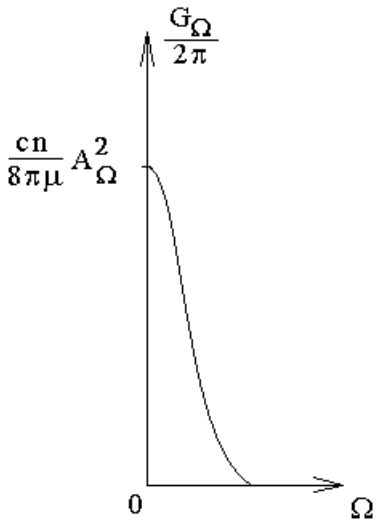
.

Спектр светового импульса будет подобен спектру огибающей, но еще вдвое ниже и сдвинут на частоту несущей:



.

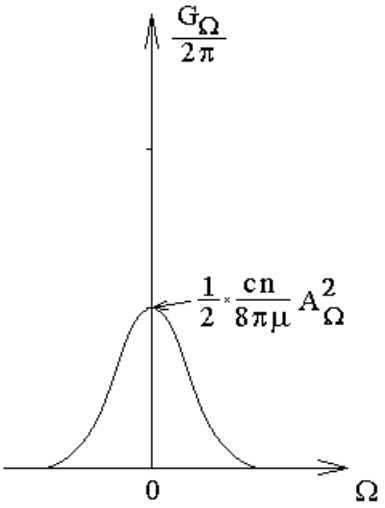
Обычно огибающую светового импульса можно разложить только в непрерывный спектр:



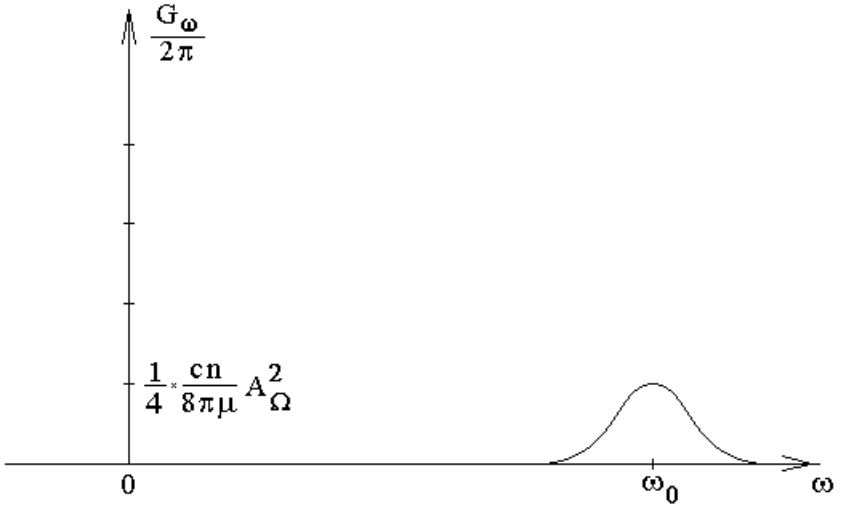
.

Здесь $G_\omega = 2\pi\frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$ — спектр света или спектральная плотность поверхностной плотности энергии, $\left|\tilde{E}_0(\Omega)\right| = A_\Omega$ — модуль Фурье образа огибающей.

Спектру положительных частот можно сопоставить уполовиненный по высоте спектр частот обоих знаков:



При этом спектр светового импульса по форме совпадает со спектром огибающей, но оказывается еще вдвое ниже и сдвинут по оси абсцисс на величину равную несущей частоте:



Для краткости говорят, что спектр светового импульса — это спектр огибающей импульса, сдвинутый на частоту несущей. То, что спектр огибающей рассматривается в частотах обоих знаков, и то, что сдвинутый спектр вдвое уменьшается по высоте, подразумевается, но не озвучивается.

<u>Экзамен. Соотношение неопределенности частоты и времени (без доказательства).</u>

Опираясь только на свойства преобразования Фурье можно доказать, что спектральная ширина светового импульса $\Delta\omega$ и его длительность Δt связаны приблизительным соотношением:

$\Delta\omega\Delta t > 1$.

Обычно под спектральной шириной импульса понимают ширину его спектрального контура G_ω на половине высоты (на половине максимального

значения G_ω). Аналогично под длительностью импульса можно понимать ширину контура $I(t)$ на половине его высоты.

Это неравенство означает, что короткий световой импульс обязан иметь широкий спектр, а почти монохроматическое световое поле не может быть кратковременным.

Если короткий световой импульс пропустить через узкополосный светофильтр, спектральная ширина пропускания которого $\Delta\omega$ мала, то свет на выходе светофильтра будет иметь малую амплитуду и большую длительность, Δt — велико. Если свет с постоянной амплитудой пропустить через затвор, который открывается на короткий промежуток времени, то после затвора спектр света становится широким.

<u>Факультативная вставка.</u>

Приблизительное неравенство $\Delta\omega\Delta t > 1$ можно заменить неравенством с точной границей:

$$\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}.$$

Для точного неравенства $\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}$ нужно несколько по-другому определить величины $\Delta\omega$ и Δt. Заметим, что для того чтобы величина $\frac{1}{2}$ была точной границей неравенства необходимо, чтобы у светового импульса была несущая частота. То есть спектр частот импульса должен быть сдвинут далеко от нулевой частоты.

Пусть $\Delta\omega = \sqrt{\left\langle \left(\omega - \langle\omega\rangle\right)^2 \right\rangle}$ — среднеквадратичное отклонение частоты ω в распределении светового импульса по частотам от средней частоты $\langle\omega\rangle$ светового импульса.

Аналогично, $\Delta t = \sqrt{\left\langle \left(t - \langle t\rangle\right)^2 \right\rangle}$ — среднеквадратичное отклонение времени t прохождения частей импульса через фиксированную точку пространства от среднего времени $\langle t\rangle$ или времени прохождения центра тяжести импульса.

$$\Delta\omega = \sqrt{\left\langle \left(\omega - \langle\omega\rangle\right)^2 \right\rangle} = \sqrt{\left\langle \omega^2 - 2\omega\langle\omega\rangle + \langle\omega\rangle^2 \right\rangle} =$$

$$= \sqrt{\left\langle \omega^2 \right\rangle - 2\langle\omega\rangle\langle\omega\rangle + \langle\omega\rangle^2} = \sqrt{\left\langle \omega^2 \right\rangle - \langle\omega\rangle^2}$$

Аналогично:

$$\Delta t = \sqrt{\left\langle \left(t - \langle t\rangle\right)^2 \right\rangle} = \sqrt{\left\langle t^2 \right\rangle - \langle t\rangle^2}.$$

Средняя частота светового импульса — это частота, усредненная с весом пропорциональным спектральной плотности поверхностной плотности энергии

светового импульса $G_\omega = 2\pi \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$, где $\tilde{E}_0(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} E(t)\cdot e^{i\omega t}dt$ — Фурье образ светового поля $E(t)$. При таком усреднении величина $\frac{G_\omega d\omega}{G}$ играет роль вероятности того, что частота лежит в интервале от ω до $\omega + d\omega$. Сумма этих вероятностей равна единице, так как $G = \int\limits_0^{+\infty} G_\omega d\omega$. Среднее значение любой величины равно сумме или интегралу по всем вариантам состояний от произведения усредняемой величины на вероятность состояния. Тогда

$$\langle\omega\rangle = \int\limits_0^{+\infty} \omega \frac{G_\omega d\omega}{G} = \frac{\int\limits_0^{+\infty} \omega G_\omega d\omega}{G} = \frac{\int\limits_0^{+\infty} \omega G_\omega d\omega}{\int\limits_0^{+\infty} G_\omega d\omega}.$$

Аналогично можно найти средний квадрат частоты:

$$\left\langle\omega^2\right\rangle = \int\limits_0^{+\infty} \omega^2 \frac{G_\omega d\omega}{G} = \frac{\int\limits_0^{+\infty} \omega^2 G_\omega d\omega}{G} = \frac{\int\limits_0^{+\infty} \omega^2 G_\omega d\omega}{\int\limits_0^{+\infty} G_\omega d\omega}.$$

Через эти два средних значения и выражается спектральная ширина светового импульса $\Delta\omega = \sqrt{\left\langle\omega^2\right\rangle - \langle\omega\rangle^2}$.

При вычислении среднего времени прохода светового импульса через фиксированную точку пространства нужно время усреднить с весом пропорциональным мгновенному значению интенсивности света $I(t)$ внутри светового импульса. Роль вероятности того, что время (импульса) лежит в интервале от t до $t + dt$ играет величина $\frac{I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t')\,dt'}$.

Тогда

$$\langle t\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \frac{I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t')\,dt'} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t)\,dt}.$$

Аналогично можно найти средний квадрат времени:

$$\left\langle t^2 \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t')\,dt'} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t)\,dt}.$$

Через эти две средние величины выражается длительность светового импульса:

$$\Delta t = \sqrt{\left\langle t^2 \right\rangle - \left\langle t \right\rangle^2}.$$

Повторим, что среднеквадратичные отклонения $\Delta\omega$ и Δt связаны соотношением $\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}$. Равенство $\Delta\omega\Delta t = \frac{1}{2}$ достигается только в том случае, когда спектр импульса представляет собой гауссову функцию частоты $\sim e^{-2\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}\right)^2}$, а огибающая импульса — гауссова функция времени $\sim e^{-\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)^2}$ (интенсивность — гауссова функция $\sim e^{-2\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)^2}$).

В оптике часто оказывается, что среднеквадратичное отклонение частоты от средней частоты бесконечно $\Delta\omega = \infty$, например, для лоренцевского контура спектральной линии. В таком случае неравенство в форме $\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}$ становится неинформативным. Но неравенство $\Delta\omega\Delta t > 1$, где $\Delta\omega$ и Δt ширина на половине высоты соответствующих контуров, по-прежнему имеет смысл.

Конец факультативной вставки.

Факультативно. Соотношение неопределенности Гейзенберга.

Рассмотрим соотношение неопределенности частоты и времени в сочетании с выражением для энергии фотона:

$$\begin{cases} \Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2} \\ E = h\nu = \hbar\omega \end{cases}.$$

Умножим первое равенство на $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ и с учетом второго равенства получим:

$\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ — соотношение неопределенности Гейзенберга для энергии и времени, справедливое как для фотона, так и любой другой частицы.

Это соотношение означает, что нельзя одновременно и точно знать и время возможной регистрации фотона, и ожидаемую энергию фотона при его регистрации.

Чем точнее будет известно время регистрации фотона, тем больше неопределенность в энергии фотона. Это следует из того, что для точного определения момента необходимо, чтобы световой импульс был коротким. При этом спектр импульса автоматически, на основе свойств преобразования Фурье, оказывается широким. Энергия фотона пропорциональна частоте, поэтому и энергия регистрируемого фотона оказывается в состоянии с большой неопределенностью.

Заметим, что аналогичное соотношение неопределенности можно написать для координаты и импульса. При этом нужно рассмотреть свет не в одной пространственной точке во все моменты времени, а во всем пространстве в один момент времени.

Любую ограниченную в пространстве и времени волну без особых точек можно представить, как суперпозицию плоских монохроматических волн.

Рассмотрим выражение для фазы плоской монохроматической волны любой природы:

$$\varphi = \left(\vec{k}, \vec{r}\right) - \omega t + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0 .$$

В это выражение произведение $-\omega t$ входит, точно также как произведение $k_x x$. Если свойства преобразования Фурье по временной координате t приводят к соотношению

$\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}$, то

свойства преобразования Фурье по пространственной координате x обязаны приводить к соотношению

$$\Delta k_x \Delta x \geq \frac{1}{2}.$$

Умножим это соотношение на $\hbar$ и получим

$$\Delta\left(\hbar k_x\right)\Delta x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Рассмотрим импульс фотона

$$p = mV = mc = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar\frac{\omega}{c} = \hbar k \qquad => \qquad p = \hbar k \qquad =>$$

$$p_x = \hbar k_x .$$

Тогда соотношение неопределенности для x координаты примет вид:

$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ — это тоже соотношение неопределенности Гейзенберга только для координаты и проекции импульса.

Эти соотношения неопределенности $\begin{cases} \Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \end{cases}$ справедливы не только для фотона, но и для любой другой частицы, так как согласно предположению

де Бройля (в квантовой механике) каждая частица одновременно является волной, для которой частота и длина волны связаны с энергией и импульсом частицы соотношениями:

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k = \dfrac{h}{2\pi}\dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{h}{\lambda} \end{cases}.$$

Любопытно, что согласно теории вторичного квантования (подробнее в последней лекции за 2010г.) фаза светового поля и число фотонов тоже не могут быть одновременно строго определены, то есть подчиняются некоторому соотношению неопределенности.

Интерференция.

Экзамен. Явление интерференции. Ширина полос. Видность.

Говорят, что волны интерферируют, если интенсивность суммарной волны не равна сумме интенсивностей:

$$I \neq \sum_m I_m .$$

Световые волны разных частот не интерферируют.

Факультативная вставка.

Поясним это.

Световое поле известно только на ограниченном интервале времени T. Всегда с достаточной точностью можно заменить реальную зависимость напряженности светового поля от времени периодической функцией времени с периодом T. Тогда все частоты в ее Фурье разложении кратны некоторой малой частоте $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, а свет разных частот можно рассматривать, как разные компоненты этого ряда Фурье.

Мы уже обсуждали, что для ряда Фурье $\vec{E}(t) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t}$ справедливо равенство $I = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} I_m$, где $I_m = \dfrac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2$ — интенсивность светового поля на частоте $\omega_m = m\dfrac{2\pi}{T}$, коэффициенты разложения ряда Фурье — $\tilde{\vec{E}}_m = \dfrac{2}{T}\cdot\int\limits_0^T \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega_m t}dt$. То есть при усреднении за бесконечное время $I = \dfrac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t$ световые волны разных частот не интерферируют $I = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} I_m$.

Конец факультативной вставки.

При наблюдении интерференции подразумевается, что складываются почти однонаправленные световые волны. Только для таких волн определено понятие интенсивности.

Интерференцию наблюдают на экране, который ставят почти перпендикулярно лучам.

На экране образуются светлые и темные полосы.

Ширина интерференционных полос — расстояние между центрами соседних светлых полос.

$V \equiv \dfrac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ — определение видности интерференционной картины. Здесь $I_{\max}$ — интенсивность в максимуме интенсивности светлой полосы (в середине светлой полосы), $I_{\min}$ — интенсивность в минимуме интенсивности (в середине темной полосы).

$0 \le I_{\min} \le I_{\max}$ =>

$0 \le V \le 1$.

$V = 0$ <=> $I_{\max} = I_{\min}$ — отсутствие интерференционных полос.

$V = 1$ <=> $I_{\min} = 0$ — максимальный контраст интерференционных полос.

<u>Экзамен. Интенсивность света при сложении двух световых волн ортогональных поляризаций.</u>

На примере двух линейно поляризованных волн докажем, что свет ортогональных поляризаций не интерферирует в том смысле, что

$I = I_1 + I_2$.

В каждый момент времени для двух ортогональных поляризаций

$E^2(t) = E_1^2(t) + E_2^2(t)$

по теореме Пифагора.

Если равенство справедливо в каждый момент времени, то оно справедливо и для средних по времени значений:

$\left\langle E^2(t) \right\rangle_t = \left\langle E_1^2(t) \right\rangle_t + \left\langle E_2^2(t) \right\rangle_t$.

Умножим это равенство на $\dfrac{cn}{4\pi\mu}$ и с учетом соотношения $I = \dfrac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t) \right\rangle_t$ получим

$I = I_1 + I_2$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Две поляризации света будем называть ортогональными, если единичные векторы поляризаций ортогональны:

$\left(\vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p2}\right) = 0$.

Например, для света, направленного вдоль оси z, ортогональны поляризации по декартовым осям

$$\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y\right) = 0,$$

ортогональны и две круговые поляризации

$$\left(\vec{e}_+, \vec{e}_-\right) = 0,$$

где $\vec{e}_+$ — единичный вектор левой круговой поляризации, $\vec{e}_-$ — единичный вектор правой круговой поляризации. Если свет направлен вдоль оси z, то $\begin{cases} \vec{e}_+ = \dfrac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \\ \vec{e}_- = \dfrac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

Выразим интенсивность света через комплексную амплитуду света $\tilde{\vec{E}}_0$:

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2 = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0\right|^2 = \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\tilde{\vec{E}}_0, \tilde{\vec{E}}_0\right).$$

Рассмотрим две световые волны одинаковой частоты, распространяющиеся в одном направлении $\vec{k}$:

$$\tilde{\vec{E}}(t) = \tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1}e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} =$$

$$= \left(\tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}\right)\cdot e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = \tilde{E}_0\vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}.$$

Подставим в выражение $I = \dfrac{cn}{8\pi\mu}\left(\tilde{\vec{E}}_0, \tilde{\vec{E}}_0\right)$ для интенсивности комплексную амплитуду в виде $\tilde{\vec{E}}_0 = \tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}$ и получим:

$$I = \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\tilde{\vec{E}}_0, \tilde{\vec{E}}_0\right) = \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}, \tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}\right) = \frac{cn}{8\pi\mu}\cdot$$

$$\cdot\left\{\tilde{E}_{01}\tilde{E}_{01}^*\left(\vec{e}_{p1},\vec{e}_{p1}\right) + \tilde{E}_{01}\tilde{E}_{02}^*\left(\vec{e}_{p1},\vec{e}_{p2}\right) + \tilde{E}_{02}\tilde{E}_{01}^*\left(\vec{e}_{p2},\vec{e}_{p1}\right) + \tilde{E}_{02}\tilde{E}_{02}^*\left(\vec{e}_{p2},\vec{e}_{p2}\right)\right\}.$$

Учтем, что поляризации ортогональны $\left(\vec{e}_{p1},\vec{e}_{p2}\right) = 0$ и получим:

$$I = \frac{cn}{8\pi\mu}\left\{\tilde{E}_{01}\tilde{E}_{01}^*\left(\vec{e}_{p1},\vec{e}_{p1}\right) + \tilde{E}_{02}\tilde{E}_{02}^*\left(\vec{e}_{p2},\vec{e}_{p2}\right)\right\} = \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\left|\tilde{E}_{01}\right|^2 + \left|\tilde{E}_{02}\right|^2\right) = I_1 + I_2$$

=> $I = I_1 + I_2$ =>

Ортогональные поляризации не интерферируют.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Интенсивность света при сложении двух световых волн одинаковой поляризации, как функция разности фаз.

Рассмотрим линейную поляризацию двух световых волн.

Напряженность суммарного светового поля равна сумме напряженностей двух световых полей. В вещественном представлении полей получаем:

$$E(t)=E_1(t)+E_2(t)=E_{01}\cos(\omega t+\varphi_1)+E_{02}\cos(\omega t+\varphi_2).$$

Интенсивность в выражении через вещественное поле имеет вид

$$I=\frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t=\frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle\left(E_1(t)+E_2(t)\right)^2\right\rangle_t=$$

$$=\frac{cn}{4\pi\mu}\left(\left\langle E_1^2(t)\right\rangle_t+2\left\langle E_1(t)E_2(t)\right\rangle_t+\left\langle E_2^2(t)\right\rangle_t\right)=$$

и получим

$$=\frac{cn}{4\pi\mu}\cdot\left\{E_{01}^2\left\langle\cos^2(\omega t+\varphi_1)\right\rangle_t+2E_{01}E_{02}\left\langle\cos(\omega t+\varphi_1)\cdot\cos(\omega t+\varphi_2)\right\rangle_t+\right.$$

$$\left.+E_{02}^2\left\langle\cos^2(\omega t+\varphi_2)\right\rangle_t\right\}=$$

$$=\frac{cn}{4\pi\mu}\left\{E_{01}^2\frac{1}{2}+E_{01}E_{02}\left\langle\cos(2\omega t+\varphi_1+\varphi_2)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right\rangle_t+E_{02}^2\frac{1}{2}\right\}=$$

$$=\frac{cn}{4\pi\mu}\left\{E_{01}^2\frac{1}{2}+E_{01}E_{02}\cos(\varphi_1-\varphi_2)+E_{02}^2\frac{1}{2}\right\}=$$

$$=\frac{cn}{8\pi\mu}\left(E_{01}^2+E_{02}^2+2E_{01}E_{02}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right)=$$

$$=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2).$$

Окончательно получаем:

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\Delta\varphi),$$

где $\Delta\varphi$ — разность фаз интерферирующих волн с одинаковой поляризацией и с интенсивностями I_1 и I_2.

Факультативная вставка.

Это выражение для интенсивности будет справедливо не только для линейной поляризации двух волн, но и для любой одинаковой эллиптической поляризации двух складываемых волн. И действительно. Если свет эллиптической поляризации пропустить через пластинку $\frac{\lambda}{4}$, то поворотом пластинки вокруг луча на выходе пластинки можно получить свет линейной поляризации. Если на пути двух световых волн одинаковой эллиптической поляризации поставить пластинку $\frac{\lambda}{4}$, которая превратит поляризацию волн в линейную, то для линейной поляризации получим $I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\Delta\varphi)$. Фазовая пластинка не изменяет интенсивности I, I_1, I_2, следовательно, соотношение для интенсивностей будет справедливо и для эллиптически поляризованных волн.

Конец факультативной вставки.