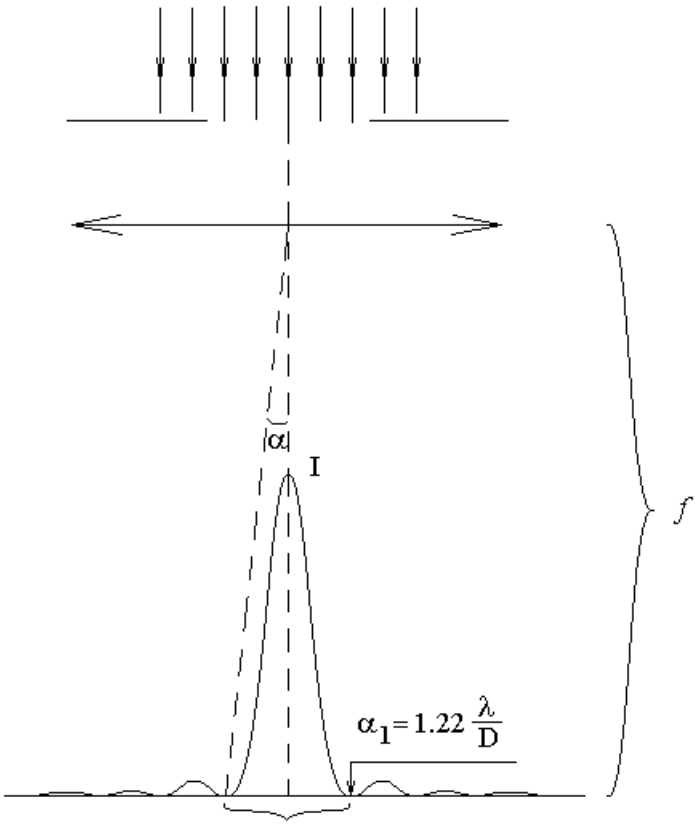
**<u>На втором часу — лекционные демонстрации.</u>**

**<u>Экзамен. Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии.</u>**

Дифракция Фраунгофера — это дифракция, наблюдаемая на бесконечно удаленном экране.

Дифракционную картину, локализованную на бесконечности, можно наблюдать в фокальной плоскости линзы. Диаметр линзы должен быть заметно больше диаметра отверстия, чтобы линза не диафрагмировала свет. Если диаметр линзы заметно больше диаметра отверстия, то расстояние от отверстия в экране до линзы не изменяет вида дифракционной картины.




Диск Эйри

Если длина волны света $\lambda$ гораздо меньше диаметра отверстия $D$, то угловой радиус первого темного кольца дифракционной картины равен $\alpha_1 = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$. Соответствующий диск внутри первого темного кольца дифракционной картины называют диском Эйри.

<u>Факультативная вставка.</u>

Если вычислить интеграл Френеля (интеграл Кирхгофа, но без коэффициента наклона) для амплитуды поля при дифракции Фраунгофера на круглом отверстии, то для интенсивности, которая пропорциональна квадрату амплитуды, в зависимости от угла дифракции получается следующее выражение

$$I(\alpha)=I_0\left(\frac{2J_1(U)}{U}\right)^2$$, где

$$U=\frac{1}{2}kD\cdot\sin(\alpha),$$

$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число,

$D$ — диаметр отверстия,

$\alpha$ — угол дифракции или угол между нормалью к экрану и направлением на точку наблюдения света,

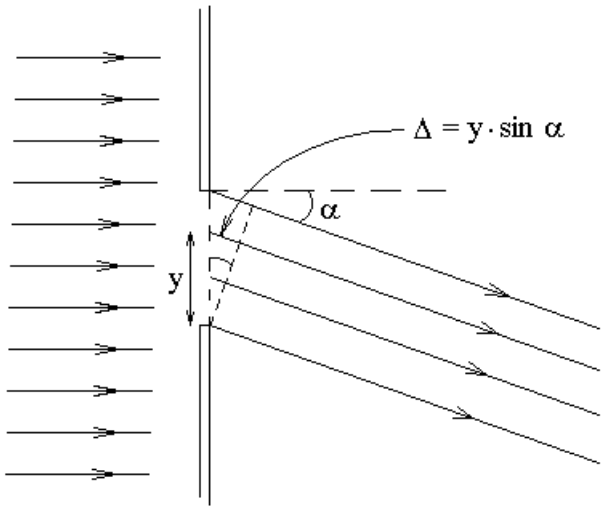
$I_0$ — интенсивность света в направлении нулевого угла дифракции $\alpha=0$,

$J_m(z)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos\left(mt-z\cdot\sin(t)\right)\cdot dt$ — функция Бесселя с целочисленным значком $m=0,1,2,\ldots$. Это одно из возможных эквивалентных определений функции Бесселя.

Конец факультативной вставки.

## Экзамен. Дифракция Фраунгофера на одной щели.

Напомним, что дифракция Фраунгофера наблюдается на бесконечно удаленном экране.




Пусть перпендикулярно на экран со щелью падает плоская монохроматическая световая волна.

Мысленно разобьем площадь щели на вторичные источники света в виде тонких полосок вдоль щели.

Факультативная вставка.

Выберем начало координат на нижней границе щели. Будем обозначать координатами $x$, $y$ и радиус вектором $\vec{r}$ положение вторичных источников света. Положение точки наблюдения будем обозначать радиус-вектором $\vec{r}\,'$.

От каждой полоски будет некоторое расстояние до точки наблюдения. Под интегралом Кирхгофа стоит сомножитель $e^{ikr'}$, где $r'$ — расстояние от

точечного вторичного источника до точки наблюдения. В нашем случае разные точки одной тонкой полоски будут находиться на разном расстоянии от точки наблюдения, но мы можем заменить всю тонкую полоску одним вторичным источником с одним значением $e^{i\frac{\pi}{4}}e^{ikr'}$. Почему так?

При графическом рассмотрении зон Френеля можно заметить, что излучение плоскости вторичных источников отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ относительно излучения ближайшего к точке наблюдения вторичного источника. Плоскость вторичных источников можно мысленно разбить по $y$ координате на тонкие полоски, а затем каждую полоску мысленно разбить по $x$ координате на почти точечные вторичные источники. Разбиения по $x$ и по $y$ координате очень похожи друг на друга, поэтому отставание по фазе $\frac{\pi}{2}$ для плоскости вторичных источников складывается из двух одинаковых отставаний по фазе по $\frac{\pi}{4}$. Первое — отставание излучения вторичных источников одной полоски от излучения одного точечного источника. Второе — отставание излучения вторичных источников всей плоскости от вторичных источников одной полоски. В результате излучение одной полоски вторичных источников отстает по фазе на $\frac{\pi}{4}$ от излучения одного точечного вторичного источника этой полоски расположенного ближе всего к точке наблюдения. Соответствующий отставанию фазовый множитель $e^{i\frac{\pi}{4}}$ для нас не будет существенным и будет отброшен в дальнейших рассуждениях, в которых каждую полоску будем рассматривать, как точечный вторичный источник света.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Рассмотрим вторичный источник света, находящийся на расстоянии $y$ от нижнего края щели. Рассмотрим излучение этого источника в направлении, которое составляет угол $\alpha$ с нормалью к экрану. Все лучи, идущие в направлении $\alpha$, пересекаются на бесконечно удаленном экране. Нас интересуют именно такие лучи, так как дифракционная картина при наблюдении дифракции Фраунгофера локализована на бесконечности.

На рисунке выше точки пунктирной линии, наклоненной вправо от вертикали на угол $\alpha$, находятся на одинаковом удалении от точки экрана наблюдения дифракционной картины, в которой пересекается параллельный пучок лучей, дифрагирующий на щели под углом $\alpha$. Тогда $\Delta = y \cdot \sin(\alpha)$ — разность хода между лучом, который проходит щель на высоте $y$, и лучом, который проходит через нижний край щели.

Для малых углов дифракции $\alpha$ не будем учитывать зависимость коэффициента наклона от $\alpha$:

$$-\frac{i}{2\lambda}\left(1+\cos(\alpha)\right)\approx-\frac{i}{\lambda}.$$

Для экрана, удаленного от щели на большое расстояние $r'>>D$, где $D$ — ширина щели, можно считать, что множитель $\frac{1}{r'}$ в интеграле Кирхгофа постоянен $\frac{1}{r'}\approx const$, не зависит от $y$-координаты полоски вторичного источника.

Найдем зависимость комплексной амплитуды поля $\tilde{E}$ от угла дифракции $\alpha$ только с точностью до коэффициента пропорциональности, поэтому постоянные сомножители в выражении для амплитуды нас интересовать не будут.

В соответствии с теорией дифракции Кирхгофа (как и с теорией дифракции Френеля):

$$\tilde{E}(\alpha)\sim\tilde{E}_0\int_0^D e^{ikr'}dy.$$

Вместо элемента площади $dS$ вторичного источника под интегралом стоит сомножитель $dy$, который надо было бы умножить на длину щели, если длина щели гораздо меньше расстояния от экрана до точки наблюдения. Постоянный множитель перед интегралом нам не важен, и мы его не учитываем. В показателе экспоненты $r'=r_0'+\Delta=r_0'+y\cdot\sin(\alpha)$, где $r_0'$ — расстояние от нижнего края щели до точки наблюдения, до точки на экране, где сходятся лучи дифрагирующие под углом $\alpha$.

$$\tilde{E}(\alpha)\sim\tilde{E}_0\int_0^D e^{ikr'}dy\sim\int_0^D e^{ik\left(r_0'+y\cdot\sin(\alpha)\right)}dy\sim\int_0^D e^{iky\cdot\sin(\alpha)}dy$$

Здесь постоянный сомножитель $\tilde{E}_0e^{ikr_0'}$ отброшен, как несущественный. Все отброшенные постоянные сомножители можно заменить сомножителем $\frac{\tilde{E}_0'}{D}$, где $D$ — ширина щели, введенная в выражение для согласования размерностей левой и правой частей равенства, $\tilde{E}_0'$ — некоторое значение амплитуды поля, но не в плоскости щели, а как потом выясниться, в максимуме дифракционной картины. Тогда

$$\tilde{E}(\alpha)=\frac{\tilde{E}_0'}{D}\cdot\int_0^D e^{iky\cdot\sin(\alpha)}\cdot dy=$$

$$=\frac{\tilde{E}_0'}{ikD\cdot\sin(\alpha)}\cdot\int_0^{ikD\cdot\sin(\alpha)} e^{iky\cdot\sin(\alpha)}\cdot d\left(iky\cdot\sin(\alpha)\right)=$$

$$= \frac{\tilde{E}_0^{'}}{ikD \cdot \sin(\alpha)} \left( e^{ikD \cdot \sin(\alpha)} - 1 \right)$$

Введем обозначение

$$U \equiv \frac{1}{2} kD \cdot \sin(\alpha).$$

Тогда

$$\tilde{E}(\alpha) = \frac{\tilde{E}_0^{'}}{2iU} \cdot \left( e^{2iU} - 1 \right).$$

Из этой формулы видно, что $\tilde{E}_0^{'} = \tilde{E}(0)$.

Перейдем от комплексной амплитуды к интенсивности света. Для этого возьмем равенство по модулю, возведем в квадрат и умножим на $\frac{cn}{8\pi\mu}$. С учетом $I(\alpha) = \frac{cn}{8\pi\mu} \left| \tilde{E}(\alpha) \right|^2$ получим

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \left| \frac{e^{2iU} - 1}{2iU} \right|^2 = I_0 \cdot \left| \frac{\cos(2U) + i \cdot \sin(2U) - 1}{2iU} \right|^2 =$$

$$= I_0 \cdot \frac{\left(1 - \cos(2U)\right)^2 + \sin^2(2U)}{4U^2} = I_0 \cdot \frac{1 - 2\cos(2U) + \cos^2(2U) + \sin^2(2U)}{4U^2} =$$

$$= I_0 \cdot \frac{2 - 2 \cdot \cos(2U)}{4U^2} = I_0 \cdot \frac{2 - 2\cos^2(U) + 2\sin^2(U)}{4U^2} =$$

$$= I_0 \cdot \frac{2\sin^2(U) + 2\sin^2(U)}{4U^2} = I_0 \cdot \left( \frac{\sin(U)}{U} \right)^2$$

Окончательно для дифракции Фраунгофера на одной щели получаем зависимость интенсивности света $I$ от угла дифракции $\alpha$:

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \left( \frac{\sin(U)}{U} \right)^2,$$

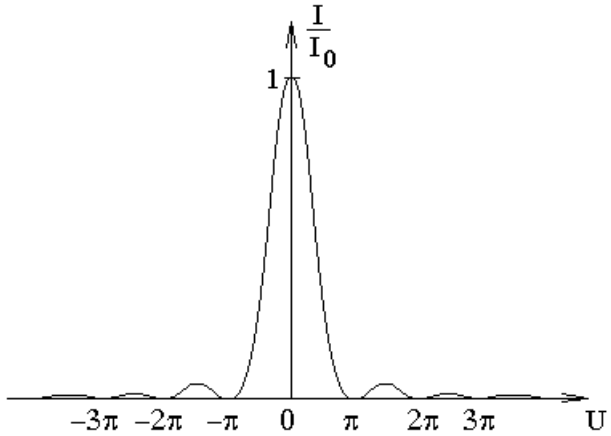
где $I_0$ — интенсивность света в направлении нулевого угла дифракции $\alpha = 0$,

$\alpha$ — угол дифракции или угол между нормалью к экрану и направлением на точку наблюдения света,

$U \equiv \frac{1}{2} kD \cdot \sin(\alpha)$,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число,

$D$ — ширина щели.




Найдем величину угла дифракции $\alpha$, соответствующую первой темной полосе.

$$I(\alpha)=0 \quad => \quad \sin(U)=0 \quad => \quad U=\pi \quad => \quad \frac{1}{2}kD\cdot\sin(\alpha)=\pi \quad =>$$

$$\alpha \approx \sin(\alpha)=\frac{2\pi}{kD}=\frac{\lambda}{D}.$$

Большая часть света при дифракции на щели идет в угол $2\frac{\lambda}{D}$, где $D$ — ширина щели. При дифракции света на любом препятствии характерный угол дифракции равен $\frac{\lambda}{D}$, где $D$ — размер препятствия. Так напомним, что при дифракции Фраунгофера на круглом отверстии угловой радиус первого темного кольца $\alpha=1.22\cdot\frac{\lambda}{D}$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Рассмотрим теперь задачу дифракции Фраунгофера на одной щели графически в виде векторных диаграмм на комплексной плоскости амплитуд.

Разобьем щель на тонкие полоски вторичных источников.

Пусть $y$ — высота расположения полоски относительно нижнего края щели. Если полоски имеют равную ширину $\delta y$, то разность хода от соседних полосок $\delta\Delta$

$$\delta\Delta=\delta y\cdot\sin(\alpha),$$

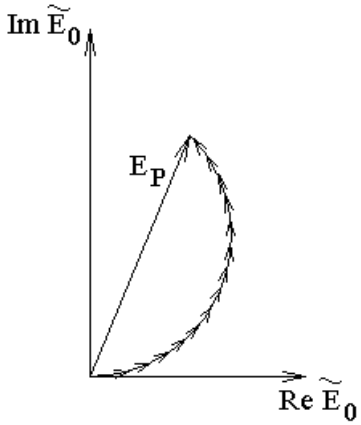
что следует из выражения $\Delta=y\cdot\sin(\alpha)$ для разности хода между лучом, который проходит щель на высоте $y$, и лучом, который проходит через нижний край щели.

Разность фаз связана с разностью хода соотношением $\Delta\varphi=2\pi\frac{\Delta}{\lambda}$, тогда

$$\delta(\Delta\varphi)=2\pi\frac{\delta\Delta}{\lambda}.$$

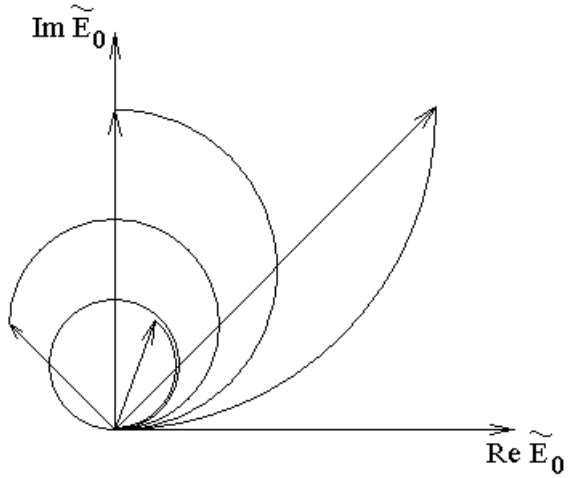
Подставим сюда $\delta\Delta=\delta y\cdot\sin(\alpha)$ и получим

$\delta(\Delta\varphi) = 2\pi \dfrac{\delta y \cdot \sin(\alpha)}{\lambda}$ — одинаковый фазовый сдвиг вкладов соседних полосок в комплексную амплитуду в точке наблюдения. Фазовый сдвиг равен углу поворота вектора на комплексной плоскости сложения амплитуд. С учетом этого картина сложения амплитуд на комплексной плоскости — дуга окружности:




При изменении угла дифракции $\alpha$ (изменении направления, в котором мы регистрируем свет) вклад в суммарную амплитуду $\tilde{E}_P$ каждой из полосок щели не изменяется по величине, но поворачивается из-за изменения фазы вклада в точке наблюдения. При этом дуга на комплексной плоскости несколько сворачивается без изменения своей длины.

На следующем рисунке приведены картины сложения амплитуд на комплексной плоскости для разных направлений дифракции $\alpha$.




Первый ноль амплитуды и интенсивности дифрагированного света соответствует дуге, свернувшейся в окружность. При этом разность фаз вкладов в комплексную амплитуду в точке наблюдения первой и последней полосок равен $\Delta\varphi = 2\pi$. Такой разности фаз соответствует разность хода

$\Delta = \lambda$.

Подставим это в выражение $\Delta = y \cdot \sin(\alpha)$, и, учитывая, что для последней полоски $y = D$, получим

$\lambda = D \cdot \sin(\alpha)$ => $\alpha \approx \frac{\lambda}{D}$ — величина угла дифракции для первой темной полосы.

Полторы окружности на комплексной плоскости сложения амплитуд соответствуют первому после нулевого максимуму зависимости интенсивности от угла дифракции. Две окружности — второй ноль интенсивности и т. д.

Конец факультативной вставки.