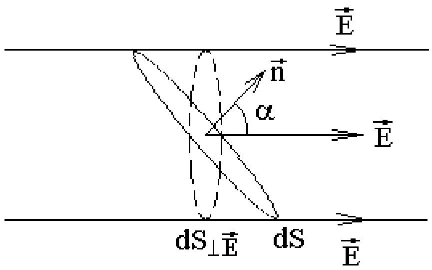
Поток вектора электрического поля *E* (продолжение)**.**

На рисунке ниже поток поля $\vec{E}$ (число пронизывающих линий поля) через две площадки dS и $dS_{\perp\vec{E}}$ одинаковый. Выразим площадь площадки $dS_{\perp\vec{E}}$ перпендикулярной линиям поля $\vec{E}$ через площадь произвольно ориентированной площадки dS.



Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности dS.

Из рисунка видно, что $dS_{\perp\vec{E}} = dS\cos(\alpha)$.

Тогда $d\Phi_E \equiv E\,dS_{\perp\vec{E}} = E\,dS\cos(\alpha) = E\,dS\cos\left(\widehat{\vec{E},\vec{n}}\right)$.

Введем определение вектора площадки: $d\vec{S} \equiv \vec{n}\,dS$. Тогда $\cos\left(\widehat{\vec{E},\vec{n}}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{E},d\vec{S}}\right)$.

Тогда $d\Phi_E = E\,dS\cos\left(\widehat{\vec{E},\vec{n}}\right) = E\,dS\cos\left(\widehat{\vec{E},d\vec{S}}\right) = \left(\vec{E},d\vec{S}\right)$.

$d\Phi_E \equiv \left(\vec{E},d\vec{S}\right)$ — определение потока поля $\vec{E}$ через произвольно ориентированную площадку $d\vec{S}$.

Электростатическая теорема Гаусса.

Теорема доказывается для неподвижных зарядов. По предположению Максвелла формулировка теоремы остается справедливой и для движущихся зарядов. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом, следовательно, так оно и есть.

Теорема Гаусса утверждает, что

$\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, где Φ_E — поток через замкнутую поверхность, границу объема V; Q — сумма зарядов в объеме V.

В системе СГС Гаусса $\Phi_E = 4\pi Q$.

При вычислении потока используется внешняя нормаль к поверхности — нормаль, направленная наружу из объема V.

Докажем теорему сначала для поля одного точечного заряда, а затем для поля любой суперпозиции зарядов.

Совместим начало координат с точечным зарядом q, тогда электрическое поле в любой точке $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$.

Рассмотрим малую площадку dS и поток через нее:

$$d\Phi_E = \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = E\,dS_{\perp\vec{E}} = E\,dS_{\perp\vec{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot dS_{\perp\vec{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\,\frac{dS_{\perp\vec{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\,d\Omega,$$

здесь $d\Omega$ — телесный угол, под которым площадка dS видна из точечного заряда q.

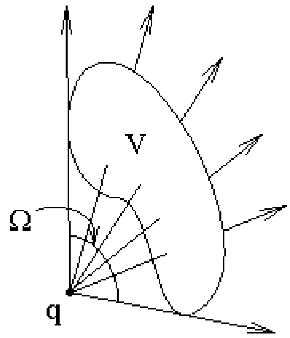
Пусть заряд q находится внутри замкнутой поверхности, тогда

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_E = \oint\limits_S d\Phi_E \\ d\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\,d\Omega \end{array}\right\} \quad =>$$

$$\Phi_E = \oint\limits_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\,d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint\limits_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Итак, если точечный заряд находится внутри замкнутой поверхности, то формула $\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ доказана.

Рассмотрим теперь заряд, расположенный снаружи от объема V.



Из рисунка видно, что ближняя и дальняя границы объема относительно заряда видны под одинаковым телесным углом Ω. Тогда потоки через обе части границы одинаковы по модулю и равны $\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\Omega$, так как $d\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\,d\Omega$. При вычислении потока рассматривается внешняя нормаль к замкнутой поверхности, поэтому поток, который втекает в объем — отрицательный, а поток, который вытекает — положительный. Модули потоков равны, но знаки потоков противоположны. В таком случае поток через всю замкнутую поверхность будет равен нулю $\Phi_E = 0$.

В данной конфигурации зарядов внутри объема нет $Q=0$. Поэтому с учетом $\Phi_E=0$ равенство $\Phi_E=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ выполнено и в этом случае.

Рассмотрим теперь вторую часть доказательства, когда зарядов много.

На равенство $\vec{E}=\sum\limits_i \vec{E}_i$ подействуем оператором $\oint\limits_S\left(\,\cdot\,,d\vec{S}\right)$. Вместо точки в операторе поставим левую часть равенства и получим левую часть нового равенства. Аналогично вместо точки в операторе поставим правую часть старого равенства и получим правую часть нового равенства.

$$\oint\limits_S\left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\oint\limits_S\left(\left(\sum_i \vec{E}_i\right),d\vec{S}\right). \quad => \quad \oint\limits_S\left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\sum_i\oint\limits_S\left(\vec{E}_i,d\vec{S}\right) =>$$

$$\Phi_E=\sum_i \Phi_{E_i}, \quad =>$$

$$\Phi_E=\sum_i \Phi_{E_i}=\sum_i \frac{Q_i}{\varepsilon_0}=\frac{\sum\limits_i Q_i}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \quad =>$$

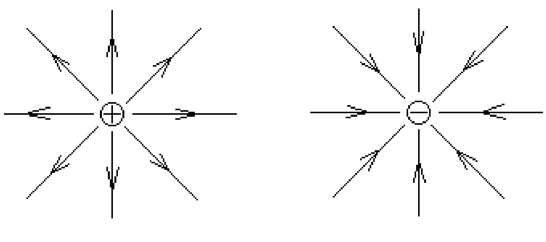
$$\Phi_E=\frac{Q}{\varepsilon_0},$$

что и требовалось доказать.

Линии поля $\vec{E}$ не рвутся.

Если в объеме нет зарядов $Q=0$, то $\Phi_E=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}=0$. Поток линий поля равен нулю — это значит, сколько линий поля втекает в объем, столько и вытекает.

Следовательно, линии поля $\vec{E}$ не начинаются и не заканчиваются в пустом объеме без зарядов. В этом смысле линии поля $\vec{E}$ не рвутся. Это справедливо и для переменных электрических полей.

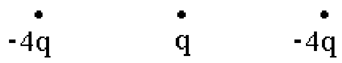


Линии поля $\vec{E}$ вытекают из положительных зарядов и втекают в отрицательные заряды. В этом смысле заряды буквально являются источниками поля.

Теорема Ирншоу.

Невозможно статическое распределение дискретных зарядов, в котором хотя бы один заряд находится в устойчивом равновесии.

Отметим, что неустойчивое равновесие возможно, например:



Доказательство теоремы Ирншоу.

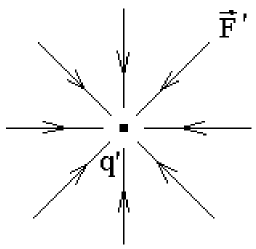
Проведем доказательство методом "от противного".

Предположим, что для одного из зарядов есть устойчивое равновесие и получим противоречие.

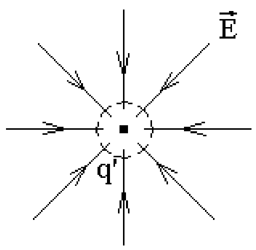
Все заряды дискретные — точечные.

Пусть в устойчивом равновесии находится заряд q, например положительный. Будем рассматривать его, как пробный заряд q'.

Для устойчивого равновесия поле сил при смещении в любую сторону пытается вернуть заряд в точку равновесия. Тогда, если сдвигать заряд q', то поле сил $\vec{F}'$ со стороны остальных зарядов на этот заряд q' имеет следующий вид.



Аналогично выглядит и поле $\vec{E}$ остальных зарядов, кроме рассматриваемого заряда q', так как $\vec{E} \equiv \dfrac{\vec{F}'}{q'}$. Рассмотрим маленькую сферу вокруг заряда q'.



Из рисунка видно, что поток поля $\vec{E}$ остальных зарядов через эту сферу отрицательный $\Phi_E < 0$, линии поля втекают в сферу. Это с одной стороны, а с другой стороны поток равен нулю $\Phi_E = 0$. И действительно, для дискретных зарядов внутри малой сферы с радиусом меньше наименьшего расстояния между зарядами вокруг заряда q' нет других зарядов, и для этих других зарядов $Q = 0$. Следовательно, для поля $\vec{E}$ остальных зарядов, кроме заряда q', получим $\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = 0$.

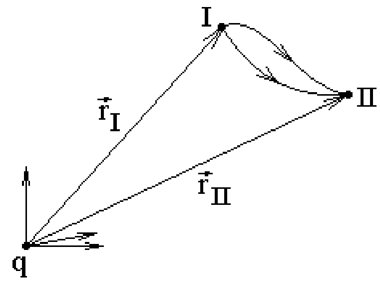
Итак $\begin{cases}\Phi_E < 0 \\ \Phi_E = 0\end{cases}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим, что для непрерывных распределений заряда теорема Ирншоу не справедлива. Например, точечный положительный заряд в центре шара с одинаковой в разных точках отрицательной объемной плотностью заряда находится в положении устойчивого равновесия.

Потенциальность кулоновских сил.

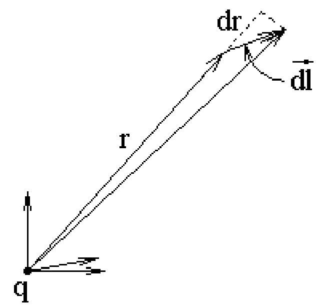
Поле сил потенциально (силы консервативны), если работа по перемещению в этом поле пробного заряда не зависит от формы траектории, а зависит только от начальной и конечной точки.

Докажем сначала потенциальность сил со стороны поля одного точечного заряда q. Для этого найдем работу электростатических сил $A'_{I\to II}$ при перемещении пробного заряда q' из точки I в точку II в поле одиночного заряда q:



Пусть начало координат совпадает с зарядом q. Найдем работу dA' на малом участке пути $d\vec{l}$:

$$dA' = \left(\vec{F}', d\vec{l}\right) = \left(q'\vec{E}, d\vec{l}\right) = q'E\,dl_E = q'E\,dl_r \approx q'E\,dr = q'\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot dr = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dr}{r^2}.$$



Из рисунка видно, что $dl_r \approx dr$.

Работа на конечном участке

$$A'_{I\to II} = \int_I^{II} dA' = \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dr}{r^2} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_I}^{r_{II}} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{r_I} - \frac{1}{r_{II}}\right) \qquad =>$$

$A'_{I\to II} = \dfrac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\dfrac{1}{r_I} - \dfrac{1}{r_{II}}\right)$ — работа электростатических сил по перемещению пробного заряда q' в поле заряда q из точки $\vec r_I$ в точку $\vec r_{II}$, если начало координат совпадает с зарядом q.

Это выражение не зависит от формы траектории, следовательно, поле $\vec E$ одного точечного заряда потенциально.

Докажем теперь потенциальность сил произвольного распределения точечных зарядов.

Из принципа суперпозиции

$$\vec E = \sum_i \vec E_i \quad \Big| \quad \int_{\vec r_I}^{\vec r_{II}} \left(q'\cdot, d\vec l\right) \qquad =>$$

$$\int_{\vec r_I}^{\vec r_{II}} \left(q'\left(\vec E\right), d\vec l\right) = \int_{\vec r_I}^{\vec r_{II}} \left(q'\left(\sum_i \vec E_i\right), d\vec l\right) \qquad =>$$

$$\int_{\vec r_I}^{\vec r_{II}} \left(q'\vec E, d\vec l\right) = \sum_i \int_{\vec r_I}^{\vec r_{II}} \left(q'\vec E_i, d\vec l\right) \qquad =>$$

$$\int_{\vec r_I}^{\vec r_{II}} \left(\vec F', d\vec l\right) = \sum_i \int_{\vec r_I}^{\vec r_{II}} \left(\vec F_i', d\vec l\right) \qquad =>$$

$$\int_{\vec r_I}^{\vec r_{II}} dA' = \sum_i \int_{\vec r_I}^{\vec r_{II}} dA_i' \qquad =>$$

$$A'_{I\to II} = \sum_i A'_{i,I\to II} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}}\right)$$

$$A'_{I\to II} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}}\right) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\left(\frac{1}{\left|\vec r_I - \vec r_i\right|} - \frac{1}{\left|\vec r_{II} - \vec r_i\right|}\right)$$

— работа электростатических сил по перемещению пробного заряда q' из точки I в точку II. Здесь $\vec r_{iI} = \vec r_I - \vec r_i$ — вектор из i-го заряда в точку I, $\vec r_{iII} = \vec r_{II} - \vec r_i$ — вектор из i-го заряда в точку II. Это выражение не зависит от формы траектории, следовательно, поле $\vec E$ произвольного распределения неподвижных зарядов потенциально.

Потенциальная энергия заряда в электростатическом поле.

Энергия — это способность совершить работу.

Электростатическая энергия заряда q' в точке I по определению равна работе электростатических сил по перемещению этого заряда из точки I на бесконечность $W'_I \equiv A'_{I\to\infty}$.

$$W'_I \equiv A'_{I\to\infty} = A'_{I\to II}\Big|_{II\to\infty} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\left(\frac{1}{r_{iI}}-\frac{1}{r_{iII}}\right)\Bigg|_{r_{iII}\to\infty} =$$

$$= \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_{iI}} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{\left|\vec r_I - \vec r_i\right|} \quad =>$$

$W'(\vec r) = \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \dfrac{q_i}{\left|\vec r - \vec r_i\right|}$ - энергия заряда q' в точке с радиус-вектором $\vec r$ в поле остальных зарядов q_i.

Потенциал электростатического поля.

Потенциал по определению — это потенциальная энергия единичного заряда:

$$\varphi \equiv \frac{W'}{q'}.$$

Потенциал произвольного распределения зарядов.

Для системы точечных зарядов q_i получим следующее выражение для потенциала φ в точке с радиус-вектором $\vec r$

$$\varphi(\vec r) \equiv \frac{W'(\vec r)}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{\left|\vec r - \vec r_i\right|}.$$

Если кроме дискретных зарядов рассматриваются заряды, распределенные по объемам, по поверхностям и по линиям, то

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_i \frac{q_i}{\left|\vec r - \vec r_i\right|} + \int_{V'} \frac{\rho(\vec r\,')\,dV'}{\left|\vec r - \vec r\,'\right|} + \int_{S'} \frac{\sigma(\vec r\,')\,dS'}{\left|\vec r - \vec r\,'\right|} + \int_{l'} \frac{\tau(\vec r\,')\cdot dl'}{\left|\vec r - \vec r\,'\right|}\right\}.$$

$\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q}{r}$ — потенциал поля точечного заряда.

В системе СГС Гаусса $\varphi = \frac{q}{r}$.

Связь потенциала и напряженности электростатического поля.

$$\varphi(\vec r_I) \equiv \frac{W'(\vec r_I)}{q'} \equiv \frac{A'_{I\to\infty}}{q'} = \frac{\int_I^\infty \left(\vec F', d\vec l\right)}{q'} = \int_I^\infty \left(\frac{\vec F'}{q'}, d\vec l\right) = \int_I^\infty \left(\vec E, d\vec l\right) \quad =>$$

$\varphi(\vec r) = \displaystyle\int_{\vec r}^\infty \left(\vec E, d\vec l\right) = \int_{\vec r}^\infty E_l dl$ — связь потенциала и напряженности в одну сторону.

Получим теперь связь между $\vec E$ и φ в другую сторону.

Рассмотрим

$$\varphi(\vec{r}_{II})-\varphi(\vec{r}_I)=\int\limits_{\vec{r}_{II}}^{\infty}E_l dl-\int\limits_{\vec{r}_I}^{\infty}E_l dl=-\int\limits_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}}E_l dl.$$

Устремим $\vec{r}_{II}\to\vec{r}_I$ и получим:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(\vec{r}_{II})-\varphi(\vec{r}_I)\approx d\varphi\\&-\int\limits_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}}E_l dl\approx -E_l dl\end{aligned}\right\}\quad \Rightarrow \quad d\varphi=-E_l dl \quad \Rightarrow$$

$E_l=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$ — для любого направления l.

Рассмотрим направления вдоль осей x,y,z:

$$\begin{cases}E_x=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\\ E_y=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\ E_z=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\end{cases}\quad \Rightarrow$$

$$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)\quad \Rightarrow$$

$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$, где

$\vec{\nabla}\equiv\vec{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}$ — оператор набла.

$grad(\varphi)\equiv\vec{\nabla}\varphi$ — определения градиента.

$\begin{cases}\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi\\ \varphi(\vec{r})=\int\limits_{\vec{r}}^{\infty}E_l dl\end{cases}$ — связь напряженности и потенциала в обе стороны.

Связь силы и потенциальной энергии для любых потенциальных полей.

$\varphi\equiv\dfrac{W'}{q'}$ и $\vec{E}\equiv\dfrac{\vec{F}'}{q'}$ и из $\varphi(\vec{r})=\int\limits_{\vec{r}}^{\infty}(\vec{E},d\vec{l})$ мы получили $\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$.

Тогда, повторив выкладки, из равенства $W(\vec{r})=\int\limits_{\vec{r}}^{\infty}(\vec{F},d\vec{l})$ мы получим $\vec{F}=-\vec{\nabla}W$. То есть, если $W(\vec{r})$ — это энергия или способность совершить работу при перемещении из точки $\vec{r}$ на бесконечность, то сила может быть выражена через энергию по формуле $\vec{F}=-\vec{\nabla}W$.

Можно доказать и в обратную сторону, что из равенства $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$ следует $W(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{F}, d\vec{l})$. И действительно, рассмотрим интеграл:

$$-\int\limits_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{F}, d\vec{l}) = -\int\limits_{\vec{r}}^{\infty} (-\vec{\nabla} W, d\vec{l}) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{\nabla} W)_l \, dl = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \frac{\partial W}{\partial l} dl = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} dW = W\Big|_{\vec{r}}^{\infty} = -W(\vec{r})$$

То есть, если для силы $\vec{F}$ удалось подобрать такую функцию W, что $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$, то сила — потенциальна, а W — потенциальная энергия, соответствующая этой силе. Подробнее, почему $(\vec{\nabla} W)_l = \frac{\partial W}{\partial l}$, смотри в следующем вопросе.

Физический смысл градиента.

Покажем, что проекция градиента на любое направление равна производной по этому направлению.

Градиент произвольной функции, например φ, равен $\vec{\nabla}\varphi \equiv \vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Проекция градиента на направление оси x — это коэффициент при единичном векторе $\vec{i}$ вдоль оси x, то есть $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Ось x можно направить произвольно вдоль любого направления l, следовательно, проекция градиента $\vec{\nabla}\varphi$ на произвольное направление l равна $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$.

Итак, проекция градиента на любое направление равна производной по этому направлению. Проекция максимальна на направление самого вектора. Следовательно, производная по направлению максимальна в направлении самого вектора градиента. То есть направление градиента — это направление, в котором максимальна производная по направлению, то есть направление, в котором функция быстрее всего возрастает.

Градиент как вектор показывает направление, в котором функция быстрее всего возрастает, а длина вектора градиента равна производной от функции по этому направлению.

Дивергенция.

$$div(\vec{A}) \equiv (\vec{\nabla}, \vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Теорема Гаусса — Остроградского.

(математическая теорема, без доказательства)

$$\int\limits_V div(\vec{A}) \cdot dV = \oint\limits_S (\vec{A}, d\vec{S})$$

Здесь $\oint\limits_S \left(\vec{A}, d\vec{S}\right) \equiv \Phi_A$ — поток произвольного векторного поля $\vec{A}$ через замкнутую поверхность S, которая ограничивает объем V. При вычислении потока используется внешняя нормаль к поверхности.

Вместо доказательства сравним два равенства:

$$\int\limits_a^b f' dx = f(b) - f(a)$$

$$\int\limits_V \left(\vec{\nabla}, \vec{A}\right) \cdot dV = \oint\limits_S \left(\vec{A}, d\vec{S}\right)$$

В обеих формулах интеграл от производной равен сумме значений функции по границе области интегрирования.