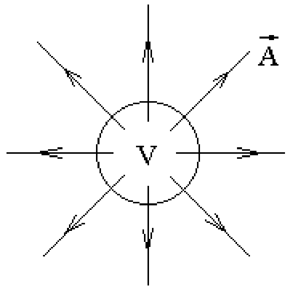
Физический смысл дивергенции.

Рассмотрим малый объем V:

$$\int_V div\left(\vec{A}\right)\cdot dV \approx div\left(\vec{A}\right)\cdot\int_V dV = V\cdot div\left(\vec{A}\right) \quad =>$$

$$div\left(\vec{A}\right)\approx\frac{\int_V div\left(\vec{A}\right)\cdot dV}{V}=\frac{\oint_S\left(\vec{A},d\vec{S}\right)}{V}=\frac{\Phi_A}{V} \quad =>$$

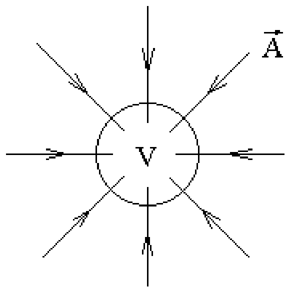
Физический смысл дивергенции: дивергенция — объемная плотность потока. Но поток — это сколько линий поля протекает. Тогда, если



,

то поток положительный $\Phi_A > 0 \quad => \quad div\left(\vec{A}\right) > 0$.

Если же



то поток отрицательный $\Phi_A < 0 \quad => \quad div\left(\vec{A}\right) < 0$.

Дивергенция — производная во все стороны.

Электростатическая теорема Гаусса в дифференциальной форме.

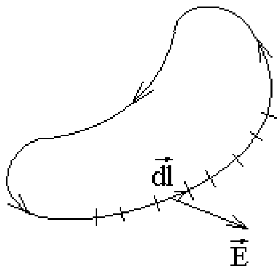
$$\Phi_E=\frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Big|\cdot\frac{1}{V} \qquad => \qquad \frac{\Phi_E}{V}=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{V} \quad \Big| V\to 0 \qquad =>$$

$$div\left(\vec{E}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

В системе СГС Гаусса: $div\left(\vec{E}\right)=4\pi\rho$.

Теорема о циркуляции электростатического поля E.

$\Gamma_E \equiv \oint_l\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=\oint_l E_l dl$ — определение циркуляции поля $\vec{E}$.



Для вычисления циркуляции по контуру или по замкнутой линии эту замкнутую линию нужно разбить на большое число малых отрезков. Каждому отрезку соответствует вектор $d\vec{l}$. В области отрезка электрическое поле $\vec{E}$ почти постоянно. Для каждого отрезка нужно вычислить $\left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$ и просуммировать соответствующие величины по замкнутому контуру.

Рассмотрим циркуляцию поля $\vec{E}$ по замкнутому контуру:

$$\Gamma_E \equiv \oint\limits_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \oint\limits_l \left(\frac{\vec{F}'}{q'}, d\vec{l}\right) = \frac{1}{q'}\oint\limits_l \left(\vec{F}', d\vec{l}\right) = \frac{1}{q'}\oint\limits_l dA' = \frac{1}{q'}A'_{I\to I}$$

Работу по перемещению заряда по замкнутому контуру $A_{I\to I}$ можно найти из выражения для работы по перемещению из точки I в точку II:

$$A'_{I\to I} = A'_{I\to II}\Big|_{II\to I} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q'\sum_i q_i\left(\frac{1}{\left|\vec{r}_I - \vec{r}_i\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}_{II} - \vec{r}_i\right|}\right)\Bigg|_{II\to I} = 0 \qquad =>$$

$\Gamma_E = 0$ или, что то же самое, $\oint\limits_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0$ — теорема о циркуляции электростатического поля.

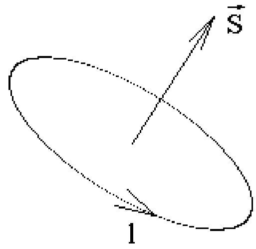
Ротор.

$$rot\left(\vec{A}\right) \equiv \left[\nabla, \vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\cdot\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\cdot\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Теорема Стокса.

(математическая теорема, без доказательства)

$$\int\limits_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S}\right) = \oint\limits_l \left(\vec{A}, d\vec{l}\right),$$



Направление нормали к поверхности при вычислении потока и направление обхода контура при вычислении циркуляции образуют правый винт.

Вместо доказательства сравним два равенства:

$$\int\limits_a^b f'dx = f(b) - f(a)$$

$$\int\limits_S \left(\left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right], d\vec{S}\right) = \oint\limits_l \left(\vec{A}, d\vec{l}\right)$$

В обеих формулах интеграл от производной равен сумме значений функции по границе области интегрирования.

Физический смысл ротора.

Рассмотрим маленькую площадку S:

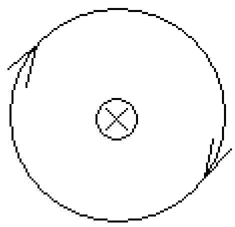
$$\int\limits_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S}\right) = \int\limits_S \left(rot\left(\vec{A}\right)\right)_n dS \approx \left(rot\left(\vec{A}\right)\right)_n \cdot \int\limits_S dS \approx S \cdot \left(rot\left(\vec{A}\right)\right)_n \quad =>$$

$$\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)_n \approx \frac{\int\limits_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S}\right)}{S} = \frac{\oint\limits_l \left(\vec{A}, d\vec{l}\right)}{S} = \frac{\Gamma_A}{S}$$

Проекция ротора на нормаль к площадке равна поверхностной плотности циркуляции.

Циркуляция — мера закрученности векторного поля.

Ротор производная вида:



Теорема о циркуляции электростатического поля *E* в дифференциальной форме.

По теореме о циркуляции электростатического поля для любого контура l:

$$\oint\limits_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0 \qquad \left| \cdot \frac{1}{S} \right. \qquad \left| \; S \to 0 \right. \qquad =>$$

$\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)_n = 0$ — для любой площадки и любого направления вектора $\vec{n}$ нормали к площадке. Тогда проекция ротора $\vec{E}$ на любое направление равна нулю и

$$rot\left(\vec{E}\right) = 0.$$

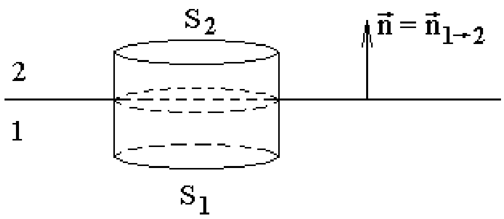
Скачок электрического поля *E* при переходе через заряженную поверхность.

Этот же вопрос можно было бы назвать "граничные условия для поля $\vec{E}$ в вакууме", так как заряженную поверхность можно рассматривать, как границу двух объемов.

Любая поверхность вблизи выглядит плоской.

Рассмотрим скачок поля $\vec{E}$ на плоской поверхности с поверхностной плотностью заряда σ.

Рассмотрим цилиндр малой высоты с основаниями параллельными заряженной плоскости. Пусть основания цилиндра расположены с двух сторон от заряженной плоскости.



Если высота цилиндра мала, то потоком через боковую поверхность можно пренебречь. Тогда

$$\Phi \approx \Phi_{S_2} + \Phi_{S_1} = E_{2n}S + E_{1n}S,$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к объему.

Удобнее рассматривать для двух площадок проекцию на одно и то же направление $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$. Тогда

$$\Phi \approx E_{2n}S - E_{1n}S,$$

где минус в последнем выражении вызван тем, что внешняя нормаль к цилиндру на площадке S_1 противоположна выбранному направлению нормали к заряженной плоскости $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$.

С другой стороны, тот же поток по теореме Гаусса равен

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}.$$

Сравнивая два выражения для потока Φ, получим

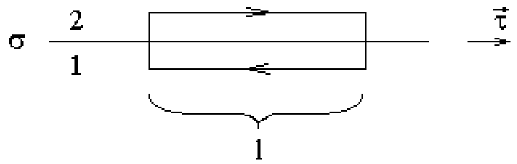
$$E_{2n}S - E_{1n}S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow$$

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где нормаль к границе $\vec{n}$ смотрит из объема 1 в объем 2.

Рассмотрим теперь тангенциальную (по касательной к поверхности) составляющую поля $\vec{E}$ при переходе через заряженную границу.

Рассмотрим прямоугольный контур в плоскости перпендикулярной заряженной поверхности.



Если высота прямоугольника мала, то вклад в циркуляцию вертикальных отрезков пренебрежимо мал. Тогда

$$\Gamma_E \approx \Gamma_2 + \Gamma_1 = E_{2l} \cdot l + E_{1l} \cdot l = E_{2\tau} l - E_{1\tau} l\,,$$

где минус вызван тем, что на нижнем отрезке направление $d\vec{l}$ противоположно выбранному направлению единичного тангенциального вектора $\vec{\tau}$.

По теореме о циркуляции электростатического поля $\vec{E}$ имеем $\Gamma_E = 0$. Сравнивая равенство $\Gamma_E = 0$ с другим только что полученным равенством $\Gamma_E = E_{2\tau} l - E_{1\tau} l$, находим:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0\,.$$

Здесь $\vec{\tau}$ — единичный вектор в любом направлении по касательной к заряженной поверхности.

<u>Три формы электростатической теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции.</u>

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \\ div\left(\vec{E}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ E_{2n} - E_{1n} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{cases}$$
— электростатическая теорема Гаусса в интегральной форме, дифференциальной форме и для границы раздела.

В системе СГС Гаусса $\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\rho \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \end{cases}$.

$$\begin{cases} \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$ — теорема о циркуляции электростатического поля $\boldsymbol{E}$ в интегральной форме, дифференциальной форме и для границы раздела.

<u>Поля симметричных распределений зарядов. 1. Сферическая симметрия.</u>

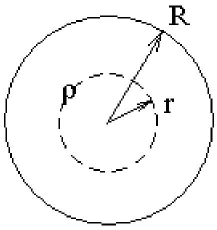
Рассмотрим задачу. Дан шар с радиусом R и объемной плотностью заряда ρ. Найти в любой точке пространства $\vec{E}$ и φ.

Решение.

Сначала найдем поле $\vec{E}$, а затем φ.

Будем искать поле $\vec{E}$ внутри шара на расстоянии r от центра шара $r \le R$.

Рассмотрим сферу с радиусом r с центром, совпадающим с центром заряженного шара.



Для сферы радиусом r применим теорему Гаусса:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad =>$$

$$E(r)S(r) = \frac{\rho V(r)}{\varepsilon_0} \quad =>$$

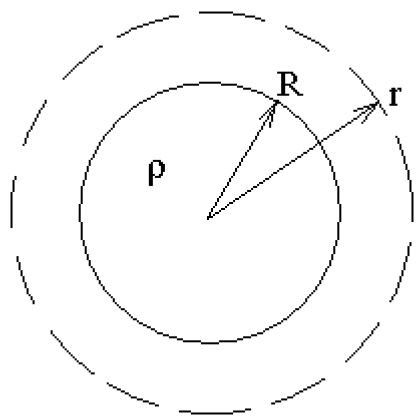
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \quad =>$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad \text{при } r \le R$$

В системе СГС Гаусса: $E = \frac{4}{3}\pi\rho r$ при $r \le R$.

Найдем теперь E при $r \ge R$.

Рассмотрим сферу $r \ge R$:



Для сферы $r \geq R$:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad =>$$

$$ES = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} \qquad =>$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

Здесь объем $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ только этой части объема $\frac{4}{3}\pi r^3$, где есть заряды. Тогда

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \text{ при } r \geq R.$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \text{ при } r \geq R,$$ где Q — полный заряд шара.

В системе СГС Гаусса: $E = \frac{Q}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r^2}$ при $r \leq R$.

Найдем теперь потенциал φ.

Сначала найдем потенциал снаружи от заряженного шара при $r \geq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} \qquad \text{при } r \geq R.$$

В системе СГС Гаусса: $\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{r} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r}$ при $r \geq R$.

Теперь найдем потенциал φ внутри шара при $r \leq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^R E dr + \int_R^{\infty} E dr = \int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr + \varphi(R) =$$

$$= \frac{\rho}{6\varepsilon_0} \cdot r^2 \Big|_r^R + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} \qquad =>$$

$$\varphi = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} \text{ при } r \le R .$$

В системе СГС Гаусса: $\varphi = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2$ при $r \le R$.