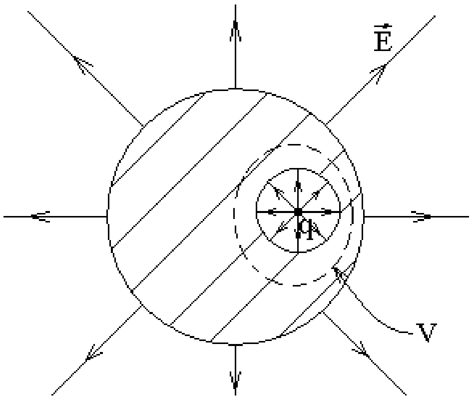
Заряд внутри полости проводника.

Рассмотрим задачу: пусть есть незаряженный проводящий шар, внутри шара — сферическая полость, в центре полости точечный заряд. Найти поле $\vec{E}$ везде.



Сначала докажем, что на внутренней поверхности проводника, на поверхности полости, соберется заряд $-q$. Для этого применим теорему Гаусса к пунктирной границе S объема V. Все точки поверхности S находятся внутри объема проводника. Следовательно, в точках границы S отсутствует поле $\vec{E}$. Тогда и поток поля $\vec{E}$ через поверхность S равен нулю: $\Phi_E = 0$. По теореме Гаусса $\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, но $\Phi_E = 0$, тогда $Q = 0$ — сумма зарядов внутри поверхности S равна нулю. Все заряды проводника в электростатике расположены на его границе, может быть и на внутренней границе. Следовательно, если в полости заряд q, то на границе полости находится заряд $-q$.

Проводник не заряжен. Если на поверхности полости находится заряд $-q$, то на внешней поверхности проводника должен быть суммарный заряд q.

Теперь можно решать две совершенно независимые задачи.

В 1-ой задаче рассмотрим объем полости V. В этой задаче в центре объема V находится точечный заряд q. Граница объема — это поверхность проводника, на которой задан полный заряд $Q = -q$. Ни в одной точке границы не задан потенциал, поэтому задача о потенциале в объеме полости имеет единственное решение с точностью до неизвестной константы в качестве слагаемого. Задача сферически симметрична. Поэтому поле в объеме полости можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r меньше радиуса полости. Решение — поле точечного заряда $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2}$.

Во второй задаче рассмотрим объем снаружи проводника. На границе этого объема задан заряд q, и граница является поверхностью проводника. Снаружи этой поверхности зарядов нет. Задача сферически симметрична. Ее решение можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r больше радиуса проводящего шара. Решение —

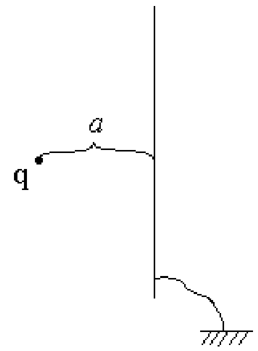
поле точечного заряда $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$. Заметим, что центр симметрии 2-ой задачи не совпадает с центром симметрии 1-ой задачи. И еще — если полость с зарядом в проводящем шаре имеет любую другую форму, то поле $\vec{E}$ снаружи проводящего шара не изменится.

Обобщая рассмотренную задачу, приходим к следующему выводу. Если есть незаряженный проводник, в полости которого есть какие-то заряды, то электростатическое поле снаружи проводника такое же, как будто полости нет, и проводник заряжен зарядами полости.

Метод изображений 1. Точечный заряд над проводящей заземленной плоскостью.

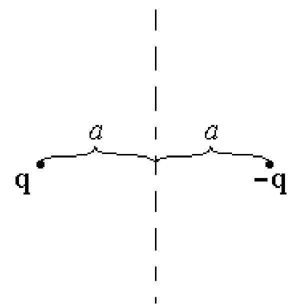
Рассмотрим задачу.

Дан точечный заряд q, расположенный над заземленной проводящей плоскостью на расстоянии a. Найти потенциал и напряженность поля в полупространстве над плоскостью.



Когда в задаче говориться, что проводник заземлен, то подразумевается, что он поддерживается под нулевым потенциалом. На самом деле электрический потенциал Земли отличен от нуля, но чтобы поставить опыт, в котором это отличие проявляется нужно очень постараться. Поэтому и в задачах и на практике можно считать, что соединение проводника с Землей обнуляет его потенциал.

Сравним эту задачу с другой, в которой нет проводящей плоскости, а вместо нее есть заряд-изображение $-q$, расположенный симметрично заряду q относительно плоскости.



Заряд-изображение $-q$ вместе с зарядом q создают нулевой потенциал в любой точке пунктирной плоскости. Следовательно, придуманный заряд-изображение вместе с реальным зарядом создают нужный потенциал на границе объема V (левой половине пространства) в задаче с проводящей заземленной плоскостью. Согласно единственности решения краевой задачи Дирихле в левой половине пространства потенциал в этих двух задачах одинаковый.

В результате поля $\vec{E}$ и φ в левой половине пространства в задаче с заземленной проводящей плоскостью — это поля двух точечных зарядов q и $-q$.

Метод изображений 2. Точечный заряд и проводящий заземленный шар.

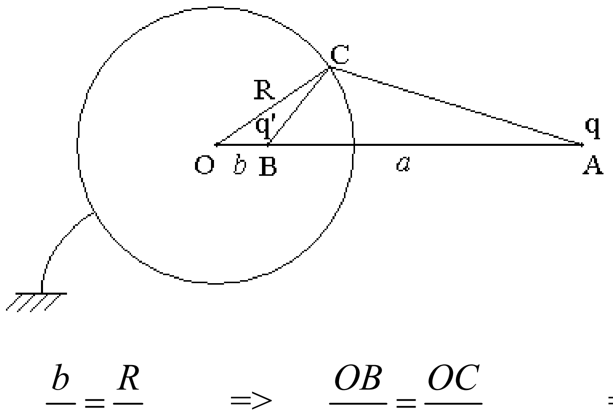
Рассмотрим задачу.

Дан проводящий заземленный шар радиусом R и точечный заряд q на расстоянии $a > R$ от центра шара. Найти потенциал φ в каждой точке пространства.

Покажем, что заряд-изображение q' на расстоянии b от центра шара вместе с реальным зарядом q удовлетворяет граничным условиям для потенциала $\varphi|_S = 0$, если

$$\begin{cases} q' = -q\dfrac{R}{a} \\ b = \dfrac{R^2}{a} \end{cases}.$$

Рассмотрим произвольную точку C на поверхности сферы и докажем, что заряды q и q' создают в этой точке нулевой потенциал.



$$b = \frac{R^2}{a} \quad => \quad \frac{b}{R} = \frac{R}{a} \quad => \quad \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OA} \quad =>$$

$\Delta OCB \sim \Delta OAC$ — треугольники подобны, так как имеют общий угол $\angle BOC$ и прилежащие стороны треугольников пропорциональны $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OC}{OA}$.

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{BC}{AC}=\frac{OC}{OA}=\frac{R}{a} \qquad => \qquad BC=AC\frac{R}{a}$$

Тогда

$$\varphi(C)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{AC}+\frac{q'}{BC}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{AC}+\frac{-q\frac{R}{a}}{AC\frac{R}{a}}\right)=0\,.$$

Потенциал в произвольной точке C на сфере равен нулю. Следовательно, заряды q и q' удовлетворяют граничным условиям для потенциала.

Потенциал и напряженность снаружи заземленного проводящего шара — это потенциал и напряженность пары зарядов q и q', где

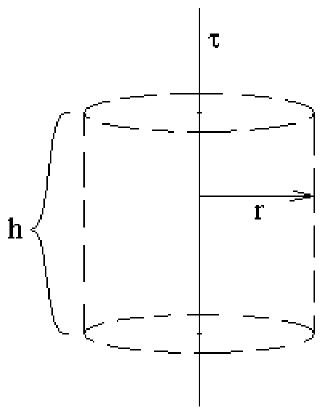
$$\begin{cases} q'=-q\dfrac{R}{a} \\ b=\dfrac{R^2}{a} \end{cases}.$$

Здесь b — расстояние от центра шара до заряда-изображения q'.

Электрическое поле длинного заземленного проводящего цилиндра и параллельной цилиндру заряженной нити.

Найдем сначала поля $\vec{E}$ и φ заряженной нити.

Для этого рассмотрим соосный с нитью цилиндр и применим к этому цилиндру теорему Гаусса.



$$\Phi_E=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Из симметрии задачи поле $\vec{E}$ направлено по радиусу в плоскости перпендикулярной заряженной нити. Тогда поток отличен от нуля только через боковую поверхность цилиндра. =>

$$ES=\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad => \qquad E\cdot 2\pi rh=\frac{\tau h}{\varepsilon_0} \qquad =>$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

В системе СГС Гаусса $E = \frac{2\tau}{r}$.

Заметим, что потенциал бесконечной заряженной нити бесконечен. В таких случаях потенциал отсчитывают не от бесконечности, а от некоторой точки, потенциал в которой выбран за ноль. Пусть эта точка расположена на расстоянии r_0 от заряженной нити. При этом из симметрии задачи следует, что потенциал в любой точке на расстоянии r_0 от нити также будет нулевым. Тогда потенциал в произвольной точке на расстоянии r от нити:

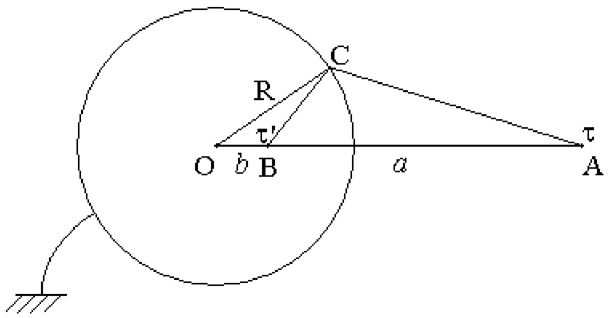
$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \int_r^{r_0} E_l dl = \int_r^{r_0} E_r dr = \int_r^{r_0} E\,dr = \int_r^{r_0} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} dr =$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln(r)\Big|_r^{r_0} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

Рассмотрим теперь поле заряженной нити и заземленного проводящего цилиндра.

Придумаем заряды-изображения в виде второй заряженной нити с линейной плотностью заряда $\tau' = -\tau$, расположенной параллельно оси цилиндра на расстоянии $b = \frac{R^2}{a}$ от оси цилиндра. Здесь R — радиус проводящего цилиндра, a — расстояние от оси цилиндра до параллельной цилиндру заряженной нити.

Рассмотрим цилиндр, заряженную нить и заряженную нить-изображение со стороны торца цилиндра.



Этот рисунок совпадает с рисунком предыдущего вопроса о поле заземленного шара и точечного заряда с точностью до замены $q \to \tau$ и $q' \to \tau'$.

Аналогично задаче с заземленным проводящим шаром треугольники ΔOCB и ΔOAC подобны, из подобия треугольников следует $\frac{BC}{AC} = \frac{OC}{OA} = \frac{R}{a}$ =>

$$BC = AC\frac{R}{a}.$$

Рассмотрим потенциал двух заряженных нитей τ и τ' в произвольной точке боковой поверхности цилиндра:

$$\varphi(C)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{r_0}{AC}\right)+\frac{\tau'}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{r_0}{BC}\right)=$$

$$=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{r_0}{AC}\right)-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{r_0}{AC\dfrac{R}{a}}\right)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{R}{a}\right).$$

Правая часть равенства не зависит от положения точки C на поверхности цилиндра. Следовательно, для поля двух заряженных нитей τ и τ' боковая поверхность цилиндра эквипотенциальна. Заметим, что для бесконечных заряженных нитей потенциал на поверхности цилиндра — это разность двух бесконечных потенциалов.

Потенциал постоянен, но не нулевой. Для удовлетворения граничным условиям цилиндр должен иметь нулевой потенциал — потенциал заземленного цилиндра.

Можно устремить линейную плотность заряда нити к нулю, а длину нити одновременно устремить к бесконечности так, что потенциал в некоторой точке рядом с нитью будет оставаться постоянным. Для нити с бесконечно малой линейной плотностью заряда напряженность поля везде равна нулю, а потенциал везде одинаковый. Будем считать, что нами произведено изменение линейной плотности заряда τ' на бесконечно малую величину. Тогда потенциал всех точек изменится на одинаковую константу, и потенциал на поверхности цилиндра можно сделать нулевым.

Следовательно, поле $\vec{E}$ снаружи заземленного цилиндрического проводника совпадает с полем $\vec{E}$ двух заряженных нитей, где параметры нити-изображения:

$$\begin{cases}\tau'=-\tau\\ b=\dfrac{R^2}{a}\end{cases}\cdot$$

Здесь τ' — линейная плотность заряда нити-изображения, b — расстояние от нити-изображения до оси цилиндра, R — радиус проводящего цилиндра, a — расстояние от заряженной нити с линейной плотностью заряда τ до оси цилиндра.

<u>**Электрическая емкость уединенного проводника.**</u>

Рассмотрим уединенный проводник.

Сообщим проводнику заряд q. Заряды как-то распределятся по поверхности проводника. Все точки проводника будут иметь один и тот же потенциал φ.

Что будет, если полный заряд проводника удвоить? Потенциал проводника удвоится.

<u>Факультативная вставка.</u>

Обсудим это подробнее.

Рассмотрим задачу с удвоенным зарядом проводника. Придумаем решение этой задачи, в котором потенциал в каждой точке объема снаружи проводника тоже удвоится. Потенциал в придуманном решении удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, обеспечивает эквипотенциальность поверхности проводника и нулевой потенциал на бесконечности. Для придуманного решения напряженность поля в каждой точке объема удваивается вместе с удвоением потенциала, удваивается проекция напряженности на нормаль к границе проводника $E_n = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, удваивается поверхностная плотность заряда, удваивается полный заряд поверхности проводника. То есть придуманное решение удовлетворяет граничным условиям краевой задачи с проводником и удвоенным зарядом и уравнению Пуассона в объеме. Из единственности решения краевой задачи электростатики решение для потенциала с удвоенным зарядом проводника будет именно таким.

Следовательно, потенциал проводника удваивается при удвоении полного заряда проводника.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Аналогично можно показать, что увеличение заряда проводника втрое приводит к увеличению втрое потенциала проводника. То есть потенциал проводника пропорционален его заряду. Тогда отношение заряда к потенциалу зависит только от размеров и формы проводника.

$C \equiv \dfrac{q}{\varphi}$ — определение емкости уединенного проводника, где φ — потенциал проводника, когда его заряд равен q.

Для примера рассмотрим емкость проводящего шара. $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{R}$ =>

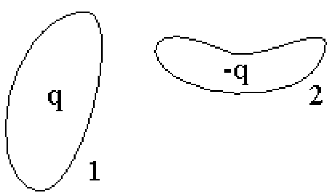
$C \equiv \dfrac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R$ =>

$C = 4\pi\varepsilon_0 R$ — емкость шара. Емкость планеты Земля С ≈ 701 мкФ.

В системе единиц СГС Гаусса потенциал проводящего шара $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R}$, и $C=R$ емкость проводящего шара равна его радиусу.

Емкость конденсатора.

Конденсатор — пара проводников. Пусть один из них заряжен зарядом q, а другой — зарядом $-q$. При этом проводники получат потенциалы φ_1 и φ_2.



$U \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ — определение напряжения между точками 1 и 2. Заметим, что напряжение и приращение потенциала отличаются друг от друга знаком.

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\infty} E_l dl - \int_{\vec{r}_2}^{\infty} E_l dl = \int_{\vec{r}_1}^{\infty} E_l dl + \int_{\infty}^{\vec{r}_2} E_l dl = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} E_l dl$$ — напряжение, выраженное через напряженность.

Аналогично рассуждениям с уединенным проводником можно показать, что при удвоении обоих зарядов потенциал каждого проводника удваивается, а при утроении — утраивается. Следовательно, потенциалы φ_1, φ_2 и напряжение U пропорциональны величине зарядов q. Отношение величины зарядов к напряжению между проводниками зависит только от размеров, формы и взаимного расположения двух проводников.

$C \equiv \dfrac{q}{U}$ — определение емкости конденсатора, где U — напряжение между проводниками конденсатора, когда один его проводник имеет заряд $+q$, а другой — $-q$.

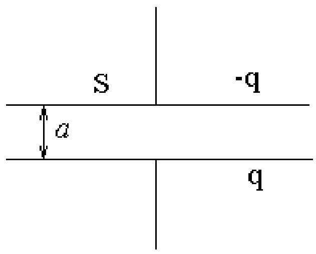
<u>Емкости простейших конденсаторов 1. Плоский конденсатор.</u>

Алгоритм вычисления емкости конденсатора:

$$\{+q, -q\} \to \vec{E}(\vec{r}) \to U \to C = \frac{q}{U}.$$

Плоский конденсатор — это две плоские проводящие пластины, расстояние a между которыми мало по сравнению с линейными размерами пластин $a << \sqrt{S}$. Здесь S — площадь пластин.

Пусть на одной пластине конденсатора находится заряд q, а на другой — заряд $-q$.



Средняя поверхностная плотность заряда каждой пластины $\sigma = \dfrac{q}{S}$. Заряженная плоскость создает напряженность поля $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Напряженность поля удваивается в объеме между двумя поверхностями с зарядами разных знаков $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Напряжение между пластинами 1 и 2 можно найти по формуле

$$U = \int_1^2 E_l dl .$$

Интеграл можно брать по любой кривой соединяющие любые две точки разных пластин. Нам проще вычислять интеграл по линии перпендикулярной плоскости пластин. Вдоль этого направления

$$E_l = E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S} .$$

Тогда

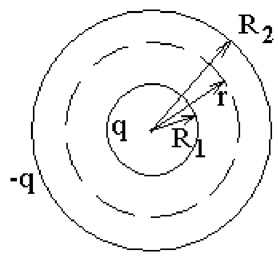
$$U = \int_1^2 E_l dl = E_l \int_1^2 dl = \frac{q}{\varepsilon_0 S} a \quad => \quad C \equiv \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{\varepsilon_0 S} a} = \frac{\varepsilon_0 S}{a} \quad =>$$

$C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{a}$ — емкость плоского конденсатора, где S — площадь каждой пластины, a — расстояние между платинами. При стремлении расстояния между пластинами a к нулю емкость конденсатора стремится к бесконечности.

В системе СГС Гаусса емкость плоского конденсатора $C = \frac{S}{4\pi a}$.

Емкости простейших конденсаторов 2. Сферический конденсатор.

Сферический конденсатор — это две концентрические проводящие сферы с радиусами R_1 и R_2.



Рассмотрим теорему Гаусса для пунктирной сферы радиусом r:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad => \quad ES = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad => \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad =>$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad =>$$

$$U = \int_1^2 E_l\, dl = \int_{R_1}^{R_2} E\, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad =>$$

$$C \equiv \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad =>$$

$C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ — емкость сферического конденсатора. При стремлении разности радиусов к нулю емкость конденсатора стремится к бесконечности.