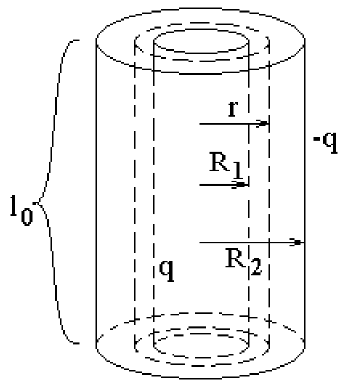
Лекционные демонстрации, 21 минута.

Емкости простейших конденсаторов 3. Цилиндрический конденсатор.

Цилиндрический конденсатор — это два соосных проводящих цилиндра. Длина цилиндров гораздо больше радиусов $l_0 >> R_2 > R_1$.



Применим теорему Гаусса для пунктирного цилиндра соосного обоим проводникам:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Если цилиндры бесконечно длинные, то из симметрии задачи вектор $\vec{E}$ направлен в плоскости перпендикулярной оси цилиндров и направлен по радиусу в этой плоскости. Тогда поток есть только через боковую поверхность цилиндра. Для просто длинного цилиндра то же самое будет выполняться только приближенно. Тогда

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad => \quad E \cdot 2\pi r \cdot l_0 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad => \quad E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l_0 r} \quad =>$$

$$U = \int_1^2 E_l dl = \int_{R_1}^{R_2} E\, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l_0 r} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad =>$$

$$C \equiv \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad =>$$

$C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ — емкость цилиндрического конденсатора, где l_0 — длина цилиндров, R_1 и R_2 — радиусы цилиндров. При стремлении разности радиусов к нулю емкость конденсатора стремится к бесконечности.

Потенциальные и емкостные коэффициенты.

Рассмотрим N проводников с зарядами q_i. Пусть при этом потенциалы проводников принимают значения φ_i.

Потенциалы линейно зависят от зарядов. Коэффициенты этой зависимости называются потенциальными коэффициентами.

$\varphi_n = \sum_k V_{nk} q_k$, где φ_n — потенциал n-го проводника, q_k — заряд k-го проводника, V_{nk} — потенциальные коэффициенты.

Эти соотношения можно рассматривать, как N линейных уравнений относительно N неизвестных зарядов q_i. Решая эти уравнения, получим:

$q_n = \sum_k C_{nk} \varphi_k$. Здесь C_{nk} — емкостные коэффициенты.

Из энергетических соображений можно доказать, что емкостные и потенциальные коэффициенты образуют симметричные матрицы $V_{nk} = V_{kn}$ и $C_{nk} = C_{kn}$.

Недиагональные элементы матрицы C_{nk} отрицательны. Модули этих элементов называют еще межэлектродными емкостями. Например, в электронной лампе пентоде (как и в тетроде) емкость между управляющей сеткой и анодом уменьшается благодаря наличию между ними экранной сетки.

Поясним, почему зависимость между потенциалами и зарядами проводников линейная. Задачу, в которой все проводники поддерживаются под наперед заданными потенциалами, обозначим, как $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N)$.

Рассмотрим задачу, в которой отличен от нуля потенциал только одного проводника $(0,...,0,\varphi_k,0,...,0)$. В этой задаче заряды q_n всех проводников пропорциональны величине этого потенциала φ_k аналогично тому, как это было доказано для одного и для двух проводников. То есть $q_n = C_{nk} \varphi_k$, где C_{nk} — коэффициенты пропорциональности.

Придумаем решение для потенциала в задаче $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N)$ в виде суммы по разным k решений задач $(0,...,0,\varphi_k,0,...,0)$. Это придуманное решение удовлетворяет потенциалам на всех границах проводников и удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$ в объеме между проводниками. В таком случае из единственности решения краевой задачи Дирихле следует, что решение задачи $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N)$ будет равно именно придуманному решению.

Заряды на проводниках при суммировании решений суммируются, так как суммируются напряженности в любой точке объема, суммируются проекции напряженности на нормаль к поверхности проводника в каждой точке поверхностей проводников, суммируются поверхностные плотности зарядов, суммируются полные заряды на проводниках. В результате

$$q_n = \sum_k C_{nk} \varphi_k .$$

Почему в задачах по электричеству заряды на пластинах конденсатора всегда равны по модулю и противоположны по знаку.

Для обычного конденсатора расстояние между обкладками конденсатора мало, так как при стремлении этого расстояния к нулю емкость конденсатора стремится к бесконечности. Для получения миниатюрного конденсатора с большой емкостью пластины конденсатора стараются разместить как можно ближе друг к другу.

В таком случае емкость конденсатора гораздо больше емкости каждого из двух уединенных проводников, из которых он состоит $C >> C_0$.

Рассмотрим именно такой обычный $C >> C_0$ плоский конденсатор с двумя одинаковыми пластинами. Заряды на пластинах линейно зависят от потенциалов пластин:

$$\begin{cases} q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \\ q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 \end{cases} \qquad (6.1).$$

Найдем эти емкостные коэффициенты C_{ik} с помощью следующих рассуждений.

Вместо переменных величин φ_1 и φ_2 рассмотрим две других переменных величины: $\varphi_1 - \varphi_2$ и $\varphi_1 + \varphi_2$. Старые переменные линейно зависят от новых:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ \varphi_2 = -\dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \end{cases}.$$

Следовательно, заряды на пластинах линейно зависят от новых переменных.

Рассмотрим по очереди две задачи. В одной задаче отлична от нуля будет только разность потенциалов на двух пластинах конденсатора, а сумма потенциалов будет равна нулю. Во второй задаче наоборот, сумма потенциалов отлична от нуля, а разность — равна нулю.

В каждой из двух задач выразим заряды на пластинах конденсатора через потенциалы пластин.

И так, в первой задаче пластины конденсатора поддерживаются под равными по величине, но противоположными по знаку потенциалами $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$. Тогда, из симметрии, и заряды пластин будут иметь противоположные знаки $q_2 = -q_1$, а с учетом определения емкости $C = \dfrac{q}{U}$ получаем:

$$\begin{cases} q_1 = CU = C(\varphi_1 - \varphi_2) \\ q_2 = -CU = -C(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases} \qquad (6.2).$$

Представим теперь вторую задачу, где на пластины конденсатора поместили одинаковые заряды одного знака. Тогда из симметрии задачи следует, что разность потенциалов на пластинах будет равна нулю. Если две пластины, рассмотреть, как одну, но вдвое толще, то емкость этой пластины, как уединенного проводника почти не зависит от его толщины и будет равна емкости одной пластины C_0. Тогда для этой объединенной пластины: $q = C_0\varphi$ в соответствии с определением емкости уединенного проводника. Заряд на каждой пластине конденсатора будет при этом вдвое меньше

$$q_1 = q_2 = \frac{q}{2} = \frac{C_0\varphi}{2},$$

а потенциал каждой пластины будет равен φ:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Тогда

$$\begin{cases} q_1 = C_0 \cdot \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \\ q_2 = C_0 \cdot \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \end{cases} \quad (6.3).$$

Если на пластинах конденсатора одновременно отличны от нуля и разность и сумма потенциалов, то, объединяя равенства (6.2) и (6.3), получим:

$$\begin{cases} q_1 = C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + C_0 \cdot \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \\ q_2 = -C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + C_0 \cdot \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \end{cases} \quad (6.4).$$

Возникает вопрос, почему можно объединить равенства, если, например, φ_1 в одной задаче имеет одну величину, а в другой — другую? Дело в том, что $\varphi_1 - \varphi_2$ можно рассматривать, как единый символ. Аналогично $\varphi_1 + \varphi_2$. В одной задаче есть только $\varphi_1 - \varphi_2$, в другой — только $\varphi_1 + \varphi_2$, а в суммарной задаче есть и то и другое.

Из (6.4) практически при любых значениях φ_1 и φ_2 при условии $C_0 \ll C$ следует

$$\begin{cases} q_1 \approx C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = CU \\ q_2 \approx -C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = -CU \end{cases} \quad => \quad q_2 \approx -q_1.$$

Если мы все же поместим на пластины конденсатора такие заряды, что $q_1 + q_2 \neq 0$, то обе пластины конденсатора окажутся под огромным и почти одинаковым потенциалом относительно Земли.

И действительно, из

$$\begin{cases} q_1 = C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + C_0 \cdot \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \\ q_2 = -C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + C_0 \cdot \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \end{cases}$$

следует

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{q_1+q_2}{C_0} + \dfrac{q_1-q_2}{4C} \approx \dfrac{q_1+q_2}{C_0} \\ \varphi_2 = \dfrac{q_1+q_2}{C_0} - \dfrac{q_1-q_2}{4C} \approx \dfrac{q_1+q_2}{C_0} \end{cases},$$

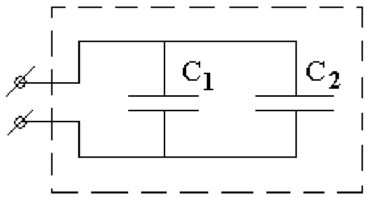
где при малой величине C_0 и $q_1+q_2 \neq 0$ потенциалы φ_1 и φ_2 окажутся очень большими по модулю и почти одинаковыми.

Сравнивая (6.1) и (6.4), получим

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} C + \dfrac{C_0}{4} & -C + \dfrac{C_0}{4} \\ -C + \dfrac{C_0}{4} & C + \dfrac{C_0}{4} \end{pmatrix}.$$

Электрическая емкость параллельного и последовательного соединения конденсаторов.

Пусть два конденсатора с емкостями C_1 и C_2 соединены параллельно и помещены в черный ящик, из которого торчат два провода:



Если не знать, что в черном ящике два конденсатора, а не один, то емкость этого одного конденсатора можно найти опытным путем.

Приложим к проводам напряжение U и измерим, какой заряд q протечет по проводам. Тогда $C = \dfrac{q}{U}$.

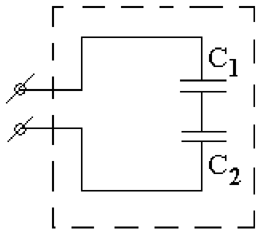
При параллельном соединении конденсаторов $\begin{cases} U = U_1 = U_2 \\ q = q_1 + q_2 \end{cases}$. Тогда

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1+q_2}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} = \frac{q_1}{U_1} + \frac{q_2}{U_2} = C_1 + C_2 \qquad => \qquad C = C_1 + C_2.$$

Емкости параллельно соединенных конденсаторов складываются. Аналогично для большего числа параллельно соединенных конденсаторов:

$C = \sum_i C_i$ — емкость при параллельном соединении конденсаторов.

Рассмотрим теперь последовательное соединение двух конденсаторов.



При последовательном соединении конденсаторов $\begin{cases} U = U_1 + U_2 \\ q = q_1 = q_2 \end{cases}$. Тогда

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2}{q} = \frac{U_1}{q} + \frac{U_2}{q} = \frac{U_1}{q_1} + \frac{U_2}{q_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad => \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

При последовательном соединении конденсаторов складываются обратные емкости. Аналогично для большего числа последовательно соединенных конденсаторов:

$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$, где C — емкость при последовательном соединении конденсаторов.

<u>Энергия взаимодействия зарядов.</u>

Рассмотрим пару зарядов:

Рассмотрим энергию второго заряда в поле первого заряда:

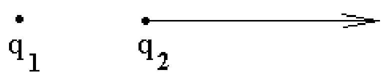
$$W_2 = q_2\varphi_2 = q_2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_{12}}.$$

Найдем теперь энергию первого заряда в поле второго:

$$W_1 = q_1\varphi_1 = q_1 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_{12}}.$$

Энергии равны $W_1 = W_2$. Возникает вопрос. Это две разные энергии или одна и та же?

Рассмотрим мысленный опыт:



Пусть первый заряд остается неподвижным, а второй заряд медленно уносят на бесконечность.

В этом процессе энергия первого заряда в поле второго изменяется от значения $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ до нуля, но работа над зарядом q_1 не совершается, так как он остается неподвижным.

По закону изменения энергии работа равна изменению энергии. Чтобы избежать противоречия нужно считать, что энергия $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ не принадлежит ни одному, ни другому заряду, а принадлежит сразу двум зарядам в том смысле, что работа над любым из двух зарядов изменяет эту энергию. Чтобы подчеркнуть эту особенность энергию $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ называют "энергией взаимодействия".

Для энергии взаимодействия удобна симметричная запись:

$$W = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right).$$

Рассмотрим теперь систему зарядов $\{q_i\}$.

Сила, действующая на каждый заряд, равна сумме сил парных взаимодействий этого заряда с каждым из остальных. При перемещении этого заряда работа электрических сил тоже будет равна сумме работ парных взаимодействий. Тогда и энергия $q_i\varphi_i$ заряда q_i в точке с потенциалом φ_i равна сумме энергий его парных взаимодействий.

Рассмотрим сумму энергий $q_i\varphi_i$ по всем зарядам $\sum_i q_i\varphi_i$. В этой сумме энергия взаимодействия каждой пары зарядов просуммирована дважды: один раз как энергия одного заряда из пары и второй раз как энергия второго заряда. Следовательно, энергия взаимодействия системы зарядов вдвое меньше этой суммы энергий всех зарядов.

$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ — энергия взаимодействия системы зарядов, где φ_i — потенциал в точке расположения i-ого заряда, создаваемый остальными зарядами системы.

Для непрерывного распределения зарядов

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\,\rho dV.$$

В системе СГС Гаусса оба выражения для энергии такие же, как в системе СИ.

Энергия электрического поля.

Для неподвижных зарядов энергия электрического поля — это то же самое, что и энергия взаимодействия зарядов. Для движущихся зарядов формула для энергии взаимодействия зарядов не верна, но формула для энергии поля, как предполагают, справедлива и для переменных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом.

$$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2}\int_V \varphi\,dq = \frac{1}{2}\int_V \varphi\,\rho dV = \frac{1}{2}\int_V \varphi\varepsilon_0 div\left(\vec{E}\right) dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varphi\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right) dV.$$

Здесь набла $\vec{\nabla}$ — это производная. Возьмем последний интеграл по частям, перебросив производную с одного сомножителя $\vec{E}$ на другой сомножитель φ:

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varphi\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right) dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S \varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right) - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \left(\vec{\nabla}\varphi,\vec{E}\right) dV .$$

Здесь первое слагаемое в правой части равенства — это внеинтегральный член, просуммированный по краям области интегрирования, при этом сохранена векторная форма скалярного произведения. Второе слагаемое имеет прежнюю векторную форму, но производная берется от другого сомножителя. Доказать справедливость этого интегрирования по частям можно с помощью теоремы Гаусса — Остроградского для поля $\varphi\vec{E}$, не будем на этом останавливаться.

С учетом $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ подставим во второй интеграл $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$ и получим:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S \varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right) + \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV .$$

Устремим объем к бесконечности. Мы можем это сделать, так как исходный интеграл $\int_V \varphi\rho dV$ можно брать по любому объему, который охватывает все заряды. Чуть позднее докажем, что поверхностный интеграл стремится к нулю при стремлении объема интегрирования к бесконечности. Тогда

$$W = \int_{V=\infty} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV$$ — энергия электрического поля.

$$w \equiv \frac{dW}{dV}$$ — определение объемной плотности энергии. Откуда

$$W = \int_{V=\infty} dW = \int_{V=\infty} w dV .$$

Сравнивая два выражения для энергии при произвольной зависимости поля $\vec{E}\left(\vec{r}\right)$

$$W = \int_{V=\infty} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV \quad \text{и} \quad W = \int_{V=\infty} w dV ,$$ получаем, что

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$ — объемная плотность энергии электрического поля.

В системе СГС Гаусса $w = \frac{E^2}{8\pi}$.

$$\oint_S \varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right) \to 0 \text{ \underline{\textbf{при}} } V \to \infty .$$

Докажем, что $\oint\limits_S \varphi\left(\vec{E}, d\vec{S}\right) \to 0$ при $V \to \infty$.

Пусть S - большая сфера, радиус которой гораздо больше расстояний между зарядами. И выберем положение сферы так, чтобы все заряды оказались вблизи центра сферы. Тогда для наблюдателя на поверхности сферы все распределение зарядов выглядит как один точечный заряд. =>

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \\ E &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \end{aligned}\right\}.$$

Откуда, с учетом того что векторы $\vec{E}$ и $d\vec{S}$ почти параллельны в каждой точке поверхности, получаем

$$\oint\limits_S \varphi\left(\vec{E}, d\vec{S}\right) \approx \oint\limits_S \varphi E \, dS \approx \oint\limits_S \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{Q}{r} \frac{Q}{r^2} dS = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{Q^2}{r^3} \oint\limits_S dS =$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{Q^2}{r^3} S = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{Q^2}{r^3} 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0^2} \frac{Q^2}{r} \xrightarrow[V \to \infty]{} 0$$

Что и требовалось доказать.