Рассмотрим парадокс.

Если $q_1q_2<0$, то $W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r}<0$. Это с одной стороны. А с другой стороны, $\frac{\varepsilon_0E^2}{2}>0$, поэтому $W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0E^2}{2}dV>0$. С одной стороны энергия W получилась отрицательная, а с другой стороны — положительная. Получилось противоречие.

При выводе второй формулы для энергии $W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0E^2}{2}dV$ мы воспользовались равенством

$$\frac{1}{2}\sum_i\varphi_iq_i=\frac{1}{2}\int\limits_V\varphi\,dq\,,$$

которое на самом деле не выполняется. Причина неравенства в том, что φ_i — потенциал в точке расположения *i*-го заряда, создаваемый всеми остальными зарядами кроме *i*-го заряда, а φ — потенциал, создаваемый всеми зарядами.

В результате выражение $W=\frac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$ не содержит энергию взаимодействия каждого заряда с самим собой. Учесть эту энергию для точечных зарядов невозможно, потому что она бесконечная.

И действительно, рассмотрим энергию поля одного точечного заряда q по формуле $W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0E^2}{2}dV$. Покажем, что энергия в этой формуле бесконечна.

Будем считать, что точечный заряд представляет собой заряженную сферу радиусом R. Найдем энергию поля в виде интеграла $W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0E^2}{2}dV$, и устремим в полученном выражении радиус сферы R к нулю. Внутри сферы с радиусом R поле $\vec{E}$ равно нулю и интеграл по области $r<R$ можно не брать.

$$W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0E^2}{2}dV=\int\limits_R^\infty\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2dr=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int\limits_R^\infty\frac{dr}{r^2}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^\infty=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0R}$$

=>

$$W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0R}\xrightarrow[R\to0]{}\infty$$

Эту же формулу $W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ для энергии заряженной сферы можно получить не только из формулы $W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}dV$, но и из формулы $W=\frac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$. Для этого мысленно разобьем заряд сферы q на много зарядов q_i. Все эти заряды будут под одним и тем же потенциалом заряженной сферы $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R}$. Этот потенциал можно вынести за знак суммы $W=\frac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$. Под знаком суммы останется сумма зарядов q_i равная q.

$$W=\frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i=\frac{\varphi}{2}\sum_i q_i=\frac{\varphi}{2}q=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}\cdot q=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Энергия заряженной сферы одинаково стремится к бесконечности по формуле $W=\frac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$ и по формуле $W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}dV$ при стремлении радиуса сферы к нулю. Следовательно, точечный заряд обладает бесконечной энергией взаимодействия его частей друг с другом.

Если же мы рассмотрим, например, заряженную сферу, как один точечный заряд, то в выражении $W=\frac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$ будет только одно слагаемое, и потенциал φ_1 в этом слагаемом равен нулю, так как это потенциал поля остальных зарядов, которых нет. То есть для одного точечного заряда по формуле $W=\frac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$ получаем $W=0$, а по формуле $W=\int\limits_{V=\infty}\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}dV$ получаем $W=\infty$.

Электрон — точечный заряд.

Согласно современным представлениям протоны и нейтроны состоят из кварков, а электроны не имеют структуры и, казалось бы, должны быть точечными объектами.

Точечный заряд должен иметь бесконечную энергию электрического поля, а, следовательно, и бесконечную массу $W=mc^2$.

Масса электрона конечна, отсюда можно найти радиус электрона. Приравняем электрическую энергию заряженной сферы к энергии покоя электрона и получим радиус электрона:

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_e}=m_e c^2 \qquad =>

$r_e = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2}$ — электростатический радиус электрона, e — модуль заряда электрона, m_e — масса покоя электрона. Обычно вместо величины r_e рассматривают вдвое большую величину $r_0 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}$, которую называют классическим радиусом электрона.

$r_e = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \approx 10^{-15}$ м, что примерно в 10 раз меньше радиуса атомного ядра.

Для сравнения $r_g = \dfrac{2Gm_e}{c^2} \approx 10^{-57}$ м — гравитационный радиус электрона или радиус сферы Шварцшильда для объекта с массой электрона. Время на сфере Шварцшильда останавливается. Если электрон сжать до шара с таким радиусом, то он превратится в черную дыру.

Как же выйти из полученного противоречия, что с одной стороны электрон — точечный объект, а с другой стороны его масса не бесконечна?

Дело в том, что вокруг электрона постоянно рождаются на короткое время и пропадают электрон-позитронные пары. В каждой такой паре позитрон с большей вероятностью будет ближе к исходному электрону, чем новый электрон рожденной пары. Поле внутри рожденной пары направлено навстречу полю исходного электрона. По этой причине в малой окрестности электрона напряженность поля возрастает при приближении к электрону медленнее, чем $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2}$, и интеграл от квадрата напряженности по объему оказывается не бесконечной величиной.

Обсуждая такие малые длины, нужно указать, что минимальной возможной длиной считается планковская длина. Это длина, на которой квантовые флуктуации кривизны пространства настолько велики, что само пространство теряет смысл. Рассмотрим черную дыру очень малого радиуса, такого, что радиус черной дыры $r_g = \dfrac{2Gm}{c^2}$ будет равен длине волны де Бройля $\lambda = \dfrac{h}{mc}$ для этой черной дыры, где в выражении для длины волны де Бройля скорость движения черной дыры V заменили скоростью света c. Из равенства $\dfrac{2Gm}{c^2} = \dfrac{h}{mc}$ выразим массу m и подставим ее в выражение для длины волны де Бройля. Тогда получим $\lambda = r_g = \sqrt{\dfrac{2Gh}{c^3}}$. Планковская длина по определению чуть меньше этой длины:

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1{,}616\,229(38)\cdot 10^{-35}\,м.$$

Электростатическая энергия заряженного проводника и системы проводников.

Рассмотрим энергию взаимодействия зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i .$$

Все заряды на поверхности одного проводника имеют одинаковый потенциал. Если просуммировать слагаемые $\sum_i q_i\varphi_i$ для k-го проводника, то получим $\sum_i q_i\varphi_i = \varphi_k \sum_i q_i = Q_k\varphi_k$, где φ_k — потенциал k-го проводника, Q_k — полный заряд на k-ом проводнике.

Тогда вместо суммы по всем точечным зарядам получим сумму по всем проводникам:

$W = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$ — энергия электростатического взаимодействия системы проводников, где i — номер проводника, Q_i — заряд i-ого проводника, φ_i — потенциал i-ого проводника.

В системе СГС Гаусса формула выглядит также.

Для одного проводника получаем

$$W = \frac{Q\varphi}{2}.$$

В частности для проводящего шара, как и для проводящей сферы, $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R}$ => $W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$.

Энергия заряженного конденсатора.

Конденсатор — это два проводника. Просуммируем выражение для энергии $W = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$ по этим двум проводникам:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i = \frac{1}{2}\big(q\varphi_1 + (-q)\varphi_2\big) = \frac{q}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{qU}{2}.$$

Это выражение можно заменить на эквивалентные выражения с учетом соотношения $C \equiv \frac{q}{U}$:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

Все три выражения для энергии справедливы и в системе СГС Гаусса.

Последнее выражение проще запомнить:

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

Электрический диполь.
Потенциал поля точечного диполя.

Издалека любое распределение зарядов выглядит, как один точечный заряд $\varphi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$. Здесь начало координат выбрано где-то вблизи зарядов, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения потенциала. К этому выражению можно сделать поправки в виде ряда по степеням $\frac{1}{r}$:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} + \frac{f_2(\theta,\varphi)}{r^2} + \frac{f_3(\theta,\varphi)}{r^3} + \frac{f_4(\theta,\varphi)}{r^4} + \frac{f_5(\theta,\varphi)}{r^5} + \ldots$$

Слагаемые этого ряда имеют названия: потенциал точечного заряда, потенциал точечного диполя, потенциал точечного квадруполя, потенциал точечного октуполя, потенциал точечного гексадекаполя и т. д.

Точное выражение для потенциала имеет вид:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

Найдем первые два слагаемых разложения этого потенциала по степеням $\frac{1}{r}$.

$|\vec{r}| >> |\vec{r}_i| \quad => \quad \frac{\vec{r}_i}{r}$ — безразмерный малый параметр задачи. Найдем отрезок ряда Тейлора по степеням $\vec{r}_i$ и автоматически получим требуемое разложение по $\frac{1}{r}$, так как все слагаемые ряда Тейлора имеют одинаковую размерность.

В трехмерном пространстве $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \left(d\vec{r}, \vec{\nabla} f\right)$, тогда

$$f(d\vec{r}) \approx f(0) + df = f(0) + \left(d\vec{r}, \vec{\nabla} f\right).$$

Для малого приращения $d\vec{r} = \vec{r}_i$ получим

$$f(\vec{r}_i) \approx f(0) + df = f(0) + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla} f\right).$$

В качестве $f(\vec{r}_i)$ рассмотрим $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ и получим

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}_i, \left(\vec{\nabla}_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}\right)\Bigg|_{\vec{r}_i = 0}\right)$$

Здесь $\vec{\nabla}_i$ - производная по координатам вектора $\vec{r}_i$.

Докажем, что для любой функции $f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)$ от разности векторов $\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)$ справедливо следующее соотношение:

$$\vec{\nabla}_i f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)=-\vec{\nabla} f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right).$$

И действительно:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial}{\partial x_i} f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)=\dfrac{\partial f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}{\partial\left(x-x_i\right)}\cdot\dfrac{\partial\left(x-x_i\right)}{\partial x_i}=-\dfrac{\partial f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}{\partial\left(x-x_i\right)} \\
\dfrac{\partial}{\partial x} f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)=\dfrac{\partial f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}{\partial\left(x-x_i\right)}\cdot\dfrac{\partial\left(x-x_i\right)}{\partial x}=+\dfrac{\partial f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}{\partial\left(x-x_i\right)}
\end{array}\right\} \quad => \quad \vec{\nabla}_i=-\vec{\nabla}$$

Тогда

$$\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}\approx\frac{1}{r}+\left(\vec{r}_i,\left.\left(\vec{\nabla}_i\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}\right)\right|_{\vec{r}_i=0}\right)=\frac{1}{r}-\left(\vec{r}_i,\left.\left(\vec{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}\right)\right|_{\vec{r}_i=0}\right)\approx\frac{1}{r}-\left(\vec{r}_i,\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right).$$

Найдем $\vec{\nabla}\dfrac{1}{r}$:

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{r} \\
\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r^3} \\
\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi
\end{array}\right\} \quad => \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Подставим это выражение в отрезок разложения $\dfrac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}$ по степеням $\vec{r}_i$:

$$\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}\approx\frac{1}{r}-\left(\vec{r}_i,\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}+\left(\vec{r}_i,\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=\frac{1}{r}+\frac{\left(\vec{r}_i,\vec{r}\right)}{r^3}.$$

Подставим теперь этот отрезок разложения в выражение для потенциала:

$$\varphi\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\cdot\left(\frac{1}{r}+\frac{\left(\vec{r}_i,\vec{r}\right)}{r^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sum\limits_i q_i}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\left(\sum\limits_i q_i\vec{r}_i,\vec{r}\right)}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\left(\vec{p},\vec{r}\right)}{r^3}$$

Здесь введено обозначение

$\vec{p}\equiv\sum\limits_i q_i\vec{r}_i$ - дипольный момент распределения зарядов.

Тогда $\varphi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$, где $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$ — потенциал заряда, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$ — потенциал диполя.

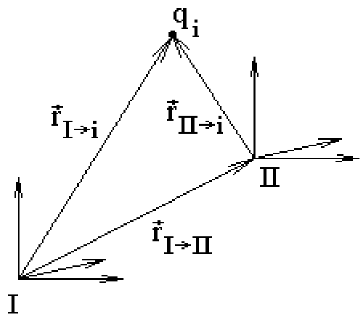
$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$ — потенциал точечного диполя.

$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$ — определение дипольного момента системы зарядов $\{q_i\}$.

В системе СГС Гаусса: $\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$ и $\varphi = \frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$.

Изменение дипольного момента при переходе от одной системы отсчета к другой.

Пусть $\vec{r}_{I\to II}$ — положение второй системы отсчета относительно первой, $\vec{r}_{I\to i}$ — радиус-вектор заряда q_i в первой системе отсчета, $\vec{r}_{II\to i}$ — радиус-вектор заряда q_i во второй системе отсчета.



Из рисунка видно, что $\vec{r}_{II\to i} = \vec{r}_{I\to i} - \vec{r}_{I\to II}$. Обозначим дипольный момент относительно первой системы отсчета за $\vec{p}_I$, а относительно второй системы — $\vec{p}_{II}$. Тогда

$$\vec{p}_{II} = \sum_i q_i \vec{r}_{II\to i} = \sum_i q_i \cdot (\vec{r}_{I\to i} - \vec{r}_{I\to II}) = \sum_i q_i \vec{r}_{I\to i} - \left(\sum_i q_i\right) \cdot \vec{r}_{I\to II} = \vec{p}_I - Q \cdot \vec{r}_{I\to II}$$

$$\vec{p}_{II} = \vec{p}_I - Q \cdot \vec{r}_{I\to II}$$

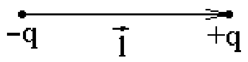
Здесь $\vec{p}_{II}$ — дипольный момент во второй системе отсчета, $\vec{p}_I$ — дипольный момент в первой системе отсчета, Q — полный заряд системы, $\vec{r}_{I\to II}$ — положение второй системы отсчета относительно первой.

$\vec{p}_{II} = \vec{p}_I$ при $Q = 0$.

Дипольный момент не зависит от системы координат, если полный заряд системы равен нулю. Обычно дипольный момент системы зарядов рассматривают только в том случае, если полный заряд системы равен нулю. При этом величина дипольного момента не зависит от положения начала координат.

Простейший электрический диполь.

Простейший электрический диполь с нулевым полным зарядом — это пара точечных зарядов противоположных знаков и одинаковых по модулю.



$$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2 = (-q)\vec{r}_1 + (+q)\vec{r}_2 = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = q\vec{l} \qquad =>$$

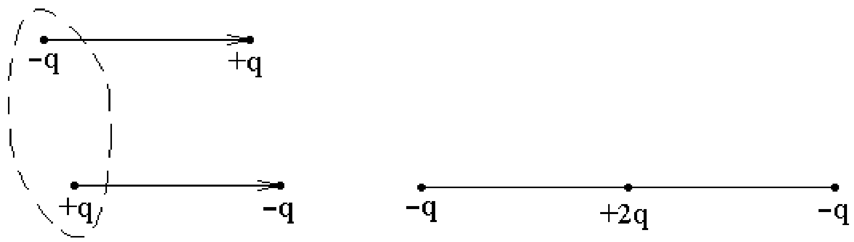
$$\vec{p} = q\vec{l}$$

Здесь $\vec{p}$ — дипольный момент пары зарядов $-q$ и $+q$, $\vec{l}$ — вектор направленный из заряда $-q$ к заряду $+q$.

Простейший квадруполь, октуполь, гексадекаполь и т.д.

Если точечный заряд продублировать, поменять знак и сдвинуть, то полученная пара зарядов образует простейший диполь.

Если заряды простейшего диполя продублировать, поменять их знаки и сдвинуть на один и тот же вектор, то образуется простейший квадруполь.



На рисунке приведены два варианта квадруполей.

Если заряды простейшего мультиполя продублировать, поменять их знаки и сдвинуть на один и тот же вектор, то образуется простейший мультиполь следующего порядка.

Напряженность поля точечного диполя.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$$

Раскроем последнее выражение, как производную от произведения $(\vec{p},\vec{r})$ на $\dfrac{1}{r^3}$.

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r^3} \cdot \vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r}) + (\vec{p},\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right\}$$

Вычислим отдельно каждую из производных в последнем выражении.

Сначала вычислим $\vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r})$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{p},\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_x x + p_y y + p_z z\right) = p_x \qquad => \qquad \vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r}) = \vec{p}$$

Вычислим теперь $\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}$.

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}=\vec{\nabla}\left(\left(\frac{1}{r}\right)^3\right)=3\left(\frac{1}{r}\right)^2\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}$$

Найдем $\vec{\nabla}\frac{1}{r}$:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\\&\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\\&\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi\end{aligned}\right\}\qquad\Rightarrow\qquad\vec{\nabla}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Тогда

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}=3\left(\frac{1}{r}\right)^2\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}=3\left(\frac{1}{r}\right)^2\cdot\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=-3\frac{\vec{r}}{r^5}.$$

Подставим $\begin{cases}\vec{\nabla}\left(\vec{p},\vec{r}\right)=\vec{p}\\ \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}=-3\frac{\vec{r}}{r^5}\end{cases}$ в $\vec{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r^3}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{p},\vec{r}\right)+\left(\vec{p},\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right\}$ и получим:

$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{3\frac{\left(\vec{p},\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}\right\}$, где $\vec{r}$ — вектор, направленный из диполя $\vec{p}$ в точку наблюдения.

Напряженность поля точечного диполя с учетом поля внутри самого диполя.

Без доказательства:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{3\frac{\left(\vec{p},\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}-\frac{4}{3}\pi\vec{p}\cdot\delta\left(\vec{r}\right)\right\}.$$

Здесь $\delta\left(\vec{r}\right)$ — дельта-функция Дирака. Для дельта-функции по определению:

при $\vec{r}\neq 0$: $\delta\left(\vec{r}\right)=0$,

при $\vec{r}=0$: $\delta\left(\vec{r}\right)=\infty$,

$$\int\limits_{V=\infty}\delta\left(\vec{r}\right)\cdot dV=1.$$

$\delta\left(\vec{r}\right)$ — очень узкая и очень высокая функция.

Для точечного заряда q_0, расположенного в точке $\vec{r}_0$, объемная плотность заряда:

$$\rho\left(\vec{r}\right) = q_0 \cdot \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right).$$