

Лекционные демонстрации, 9 минут.

Энергия электрического поля в линейных диэлектриках.

Математические выкладки и конечный результат этого вопроса вполне аналогичны выкладкам и результату вопроса "Энергия электрического поля" в вакууме.

Энергия поля — это та же энергия взаимодействия зарядов $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$,

только выраженная через напряженность электрического поля. Напомним, что в присутствии диэлектриков суммирование ведется только по свободным зарядам.

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \int_V \varphi dq = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV$$

Подставим сюда выражение для объемной плотности свободных зарядов из равенства $\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho \Rightarrow \rho = (\vec{\nabla}, \vec{D})$. Тогда

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot (\vec{\nabla}, \vec{D}) \cdot dV.$$

Возьмем полученный интеграл по частям, перебросив производную $\vec{\nabla}$ с одного сомножителя \vec{D} на другой сомножитель φ .

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot (\vec{\nabla}, \vec{D}) \cdot dV = \frac{1}{2} \oint_S \varphi \cdot (\vec{D}, d\vec{S}) - \frac{1}{2} \int_V (\vec{\nabla} \varphi, \vec{D}) dV$$

При стремлении объема к бесконечности интеграл по поверхности стремится к нулю. Докажем это позднее. Тогда

$$W = -\frac{1}{2} \int_{V=\infty} (\vec{\nabla} \varphi, \vec{D}) dV$$

Подставим сюда $\vec{\nabla} \varphi = -\vec{E}$ и получим

$$W = \int_{V=\infty} \frac{(\vec{D}, \vec{E})}{2} dV \quad \text{— энергия электрического поля в линейных}$$

диэлектриках. Доказывается равенство для электростатического поля, предполагается справедливость равенства для переменных электрических полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом, следовательно, формула для энергии поля справедлива и для переменных электрических полей.

$$w \equiv \frac{dW}{dV} = \frac{(\vec{D}, \vec{E})}{2} \quad \text{— объемная плотность энергии электрического поля в}$$

линейных диэлектриках.

Если диэлектрик не только линеен, но и изотропен, то $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \Rightarrow$

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}.$$

Для нелинейной и (или) гистерезисной зависимости \vec{D} от \vec{E} :

$dw = (\vec{E}, d\vec{D})$ — без доказательства.

В СГС Гаусса: $w = \frac{(\vec{D}, \vec{E})}{8\pi}$, $w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$ и $dw = \frac{\vec{E}, d\vec{D}}{4\pi}$.

$$\oint_S \varphi(\vec{D}, d\vec{S}) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0.$$

Пусть V — шар, $r \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \\ D \approx \frac{Q}{4\pi r^2} \\ d\vec{S} \parallel \vec{D} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \oint_S \varphi(\vec{D}, d\vec{S}) &\approx \oint_S \varphi \cdot D \cdot dS \approx \oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \cdot \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot dS = \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 r^3} \cdot \oint_S dS = \\ &= \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 r^3} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Электрические силы в диэлектриках.

Диполи стремятся к минимуму энергии $W = -(\vec{p}, \vec{E})$. Для этого они сначала поворачиваются вдоль поля $\vec{p} \uparrow \vec{E}$, а затем втягиваются в ту область пространства, где поле сильнее. В этом и состоит причина силы, действующей на диэлектрик, состоящий из диполей.

Примеры проявления таких сил: дым втягивается в электрическое поле, жидкий или твердый диэлектрик втягивается в заряженный конденсатор.

Рассмотрим нестрогую теорию сил в диэлектриках.

$\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E}$ — сила, действующая на диполь одной молекулы, независимо от того, жесткий это диполь или диполь, наведенный электрическим полем.

$\vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}}{dV}$ — объемная плотность сил в диэлектрике.

$$\vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}}{dV} = n \cdot \langle \vec{F} \rangle = n \cdot \langle (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E} \rangle$$

В последнем выражении заменим среднее от произведения на произведение средних значений

$$n \cdot \langle (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E} \rangle \approx n \cdot (\langle \vec{p} \rangle, \vec{\nabla}) \langle \vec{E} \rangle.$$

Эта замена не вполне правомерна, поэтому и теория на основе этой замены нестрогая.

Среднее значение напряженности по определению является напряженностью поля в диэлектрике:

$$\langle \vec{E} \rangle \equiv \vec{E} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{f} = n \cdot (\langle \vec{p} \rangle, \vec{\nabla}) \vec{E} = (n \langle \vec{p} \rangle, \vec{\nabla}) \vec{E} = (\vec{P}, \vec{\nabla}) \vec{E} = (\varepsilon_0 \chi \vec{E}, \vec{\nabla}) \vec{E}$$

Подставим выражение восприимчивости через проницаемость $\chi = \varepsilon - 1$ и получим

$$\vec{f} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) (\vec{E}, \vec{\nabla}) \vec{E}.$$

Выражение для объемной плотности сил можно привести к более удобному виду. С этой целью рассмотрим двойное векторное произведение и преобразуем его по правилу "бац минус цап":

$$[\vec{E}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E}, \vec{\nabla})$$

В левой и правой части равенства производные берутся только от одной из двух напряженностей \vec{E} . Чтобы не перепутать, эта напряженность подчеркнута и в левой и в правой части равенства.

Левая часть равенства равна нулю, так как $[\vec{\nabla}, \vec{E}] \equiv \text{rot}(\vec{E}) = 0$ по теореме о циркуляции электростатического поля \vec{E} в дифференциальной форме. Тогда и правая часть равенства равна нулю:

$$\vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E}, \vec{\nabla}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) = \vec{E}(\vec{E}, \vec{\nabla}) = (\vec{E}, \vec{\nabla}) \vec{E}$$

Сравнивая последнее равенство с выражением для объемной плотности сил в диэлектриках $\vec{f} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) (\vec{E}, \vec{\nabla}) \vec{E}$, получим:

$$\vec{f} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E})$$

Последнее выражение можно преобразовать с учетом

$$\vec{\nabla}(E^2) = \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) + \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) = 2\vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) \text{ и окончательно получить}$$

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{2} \cdot \vec{\nabla}(E^2) = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{2} \cdot \text{grad}(E^2) \text{ — объемная плотность сил,}$$

действующих на диэлектрик в электростатическом поле.

$$\text{grad}(E^2) \text{ направлен туда, куда быстрее всего возрастает } E^2.$$

Формула

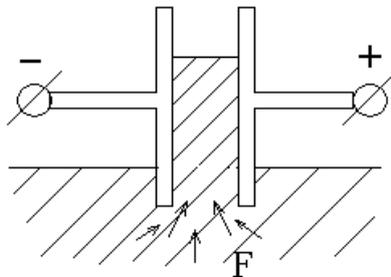
$$\vec{f} = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)}{2} \cdot \text{grad}(E^2)$$

показывает, что диэлектрик втягивается в электрическое поле.

$$\text{В системе СГС Гаусса: } \vec{f} = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \cdot \text{grad}(E^2).$$

Хотя это выражение получено с учетом равенства $\text{rot}(\vec{E}) = 0$, которое справедливо только для полей неподвижных зарядов, считается, что объемная плотность сил примерно такая же и для переменных электромагнитных полей вплоть до оптических частот. Применимость для световых полей определяется тем, что длина волны светового поля примерно в тысячу раз больше размера диполя молекулы. Для более медленных электромагнитных полей неравенство выполнено еще сильнее.

Для примера приведем поле сил, втягивающих жидкий диэлектрик в заряженный конденсатор.



Силы действуют там, где электрическое поле неоднородно.

Понятие о строгой теории сил в диэлектриках.

Рассмотрим производную от произведения

$$\vec{\nabla}((\epsilon - 1)E^2) = E^2 \cdot \vec{\nabla}(\epsilon - 1) + (\epsilon - 1) \cdot \vec{\nabla}(E^2) = E^2 \cdot \vec{\nabla}\epsilon + (\epsilon - 1) \cdot \vec{\nabla}(E^2)$$

Тогда

$$(\epsilon - 1) \cdot \vec{\nabla}(E^2) = \vec{\nabla}((\epsilon - 1)E^2) - E^2 \cdot \vec{\nabla}\epsilon \quad \Rightarrow$$

$$\vec{f} = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)}{2} \cdot \vec{\nabla}(E^2) = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \vec{\nabla}((\epsilon - 1)E^2) - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot \vec{\nabla}\epsilon$$

или, что то же самое:

$$\vec{f} = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)}{2} \cdot \text{grad}(E^2) = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \text{grad}((\epsilon - 1)E^2) - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot \text{grad}(\epsilon).$$

Два слагаемых в правой части равенства рассмотрим, как две разные силы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_1 = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \text{grad}((\epsilon - 1)E^2) \\ \vec{f}_2 = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot \text{grad}(\epsilon) \end{array} \right.$$

Строгая теория сил в диэлектриках отличается только в первом слагаемом для силы:

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \text{grad} \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right) - \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot \text{grad}(\varepsilon) \quad \text{— объемная плотность сил в}$$

строгой теории, где τ — плотность среды диэлектрика, производная по плотности среды рассматривается при постоянной температуре $T = \text{const}$.

В нашем рассмотрении для первой силы выражение $(\varepsilon - 1)$ заменено в строгой теории выражением $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau$. Оба выражения примерно одинаковы,

что следует из разложения диэлектрической проницаемости ε в ряд Тейлора по степеням плотности среды τ :

$$\varepsilon \approx 1 + \tau \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T + \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} \right)_{TT} + \dots \quad \Rightarrow \quad \tau \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \approx \varepsilon - 1$$

Другое выражение сил в диэлектриках.

Покажем, что первое слагаемое в выражении

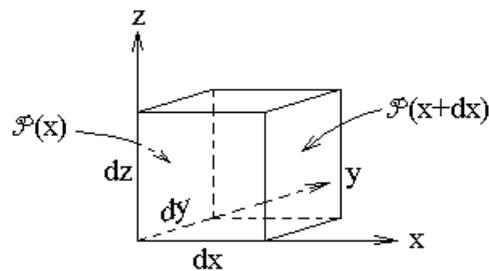
$$\vec{f} = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \text{grad} \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right) - \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot \text{grad}(\varepsilon)$$

эквивалентно давлению разному в разных точках диэлектрика.

Рассмотрим среду, давление \mathcal{P} в разных точках которой различно. Покажем, что это давление эквивалентно объемной плотности сил

$$\vec{f} = -\text{grad}(\mathcal{P}).$$

Рассмотрим маленький куб (или прямоугольный параллелепипед) с ребрами, направленными вдоль осей координат.



Рассмотрим давление на две грани перпендикулярные оси x . Площадь каждой грани равна $dy \cdot dz$. X -координаты граней равны x и $x+dx$. Сумма сил, действующих на эти грани со стороны давления, определяет x -проекцию силы, действующей на куб:

$$F_x = \mathcal{P}(x) \cdot dy \cdot dz - \mathcal{P}(x + dx) \cdot dy \cdot dz = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Объемная плотность x -проекции силы:

$$f_x = \frac{F_x}{V} = \frac{-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} \mathcal{P}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Тогда первое слагаемое

$$\vec{f}_I = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \text{grad} \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right)$$

в выражении $\vec{f} = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \text{grad} \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right) - \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot \text{grad}(\varepsilon)$ эквивалентно давлению

$$\mathcal{P}_I = -\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \tau \cdot E^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T,$$

которое никуда не втягивает диэлектрик и для несжимаемого диэлектрика может быть отброшено. И действительно, если диэлектрик сжать, то упругие силы в диэлектрике уравновесят давление. Следовательно, сила \vec{f}_I только растягивает $\mathcal{P}_I < 0$ диэлектрик, но никуда его не втягивает.

Если диэлектрик несжимаемый (жидкий или твердый), то силу \vec{f}_I можно не учитывать. В таком случае можно считать, что на диэлектрик действует только сила \vec{f}_{II} :

$$\vec{f}_{II} = -\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot \text{grad}(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot \vec{\nabla} \varepsilon.$$

Силу \vec{f}_{II} можно заменить эквивалентным давлением \mathcal{P}_{II} , приложенным к границам диэлектрика, если диэлектрик однородный и несжимаемый. Обсудим это подробнее.

Если диэлектрик однородный, то $\vec{\nabla} \varepsilon = 0$. Следовательно, $\vec{f}_{II} = 0$ везде, кроме границ диэлектрика, где ε испытывает скачок.

На границе диэлектрика $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \infty$, отсюда следует, что $\vec{\nabla} \varepsilon$ направлен перпендикулярно границе диэлектрика, $\vec{\nabla} \varepsilon = \infty$ и $\vec{f}_{II} = \infty$. Бесконечно большая объемная плотность сил в бесконечно тонком поверхностном слое диэлектрика эквивалентна поверхностной плотности сил или давлению на границу диэлектрика.

Найдем это давление.

Рассмотрим малый участок границы диэлектрика. Направим ось z перпендикулярно границе. Градиент диэлектрической проницаемости $\vec{\nabla} \varepsilon$ и объемная плотность сил \vec{f}_{II} также будут перпендикулярны границе.

Рассмотрим границу диэлектрика, как переходный слой конечной толщины h . Если ось z направлена из объема 1 в объем 2, то

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{II_{1 \rightarrow 2}} &= \frac{F_{IIz}}{S} = \frac{\int f_{IIz} \cdot dV}{S} = \frac{\int f_{IIz} \cdot S \cdot dz}{S} = \int_V f_{IIz} dz = \\ &= \int_0^h f_{IIz} dz = \int_0^h \left(-\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot \text{grad}(\varepsilon) \right)_z \cdot dz = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^h E^2 \cdot (\text{grad}(\varepsilon))_z \cdot dz = \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^h E^2 \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \cdot dz = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^h E^2 d\varepsilon = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} E^2 d\varepsilon.\end{aligned}$$

Зависимость подынтегрального выражения от диэлектрической проницаемости ε можно найти с учетом того, что при переходе через границу диэлектрика сохраняется тангенциальная составляющая поля E_τ , так как $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$, и сохраняется нормальная составляющая поля D_n , так как $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma = 0$. На границе нет свободных зарядов $\sigma = 0$. Тогда

$$\mathcal{P}_{II_{1 \rightarrow 2}} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} E^2 d\varepsilon = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} (E_n^2 + E_\tau^2) \cdot d\varepsilon = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \left(\frac{D_n^2}{\varepsilon_0^2 \varepsilon^2} + E_\tau^2 \right) \cdot d\varepsilon.$$

Интеграл может быть разбит на сумму двух интегралов. Величины D_n и E_τ не изменяются внутри переходного слоя границы диэлектрика и могут быть вынесены за пределы соответствующих интегралов. Тогда

$$\mathcal{P}_{II_{1 \rightarrow 2}} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \left(\frac{D_n^2}{\varepsilon_0^2 \varepsilon^2} + E_\tau^2 \right) \cdot d\varepsilon = -\frac{D_n^2}{2\varepsilon_0} \cdot \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon_0 E_\tau^2}{2} \cdot \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} d\varepsilon.$$

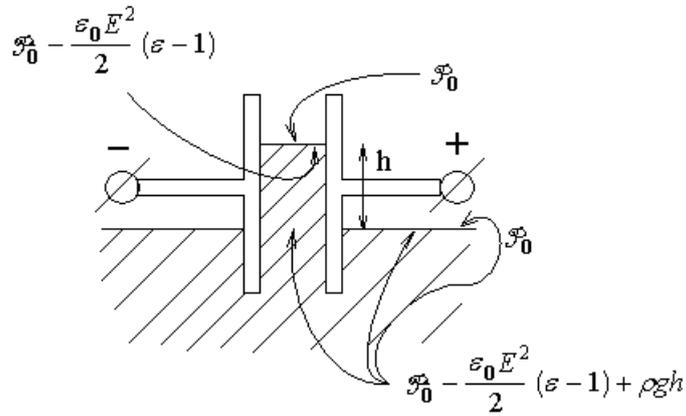
Окончательно получаем:

$$\mathcal{P}_{II_{1 \rightarrow 2}} = \frac{D_n^2}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) + \frac{\varepsilon_0 E_\tau^2}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$$\text{В системе СГС Гаусса: } \mathcal{P}_{II_{1 \rightarrow 2}} = \frac{D_n^2}{8\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) + \frac{E_\tau^2}{8\pi} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Это давление приложено к границе двух диэлектриков и направлено в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

Рассмотрим втягивание жидкого диэлектрика в заряженный конденсатор, считая, что есть только сила \vec{f}_{II} .



Пусть атмосферное давление равно \mathcal{P}_0 . На границе диэлектрика внутри заряженного конденсатора есть только тангенциальная составляющая напряженности электрического поля $E_\tau = E$. В таком случае к границе диэлектрика приложено давление $\mathcal{P}_H = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} (\epsilon - 1)$, которое тянет диэлектрик за его верхнюю границу вверх. Следовательно, под границей диэлектрика давление меньше атмосферного на величину \mathcal{P}_H . Под границей жидкого диэлектрика давление растет с глубиной h , как $\rho g h$. Если электрические силы приложены только к границам диэлектрика, то в диэлектрике на одинаковой высоте внутри и снаружи конденсатора давление одинаковое и равно $\mathcal{P}_0 - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} (\epsilon - 1) + \rho g h$. Электрического поля снаружи конденсатора почти нет, поэтому нет и электрического давления на поверхность жидкости. В результате это давление снаружи конденсатора $\mathcal{P}_0 - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} (\epsilon - 1) + \rho g h$ будет как под границей диэлектрика, так и над его границей, но с другой стороны — это атмосферное давление. Тогда

$$\mathcal{P}_0 - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} (\epsilon - 1) + \rho g h = \mathcal{P}_0 \Rightarrow -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} (\epsilon - 1) + \rho g h = 0 \Rightarrow$$

$$h = \frac{\epsilon_0 E^2 (\epsilon - 1)}{2 \rho g} \text{ — высота подъема жидкого диэлектрика в заряженном конденсаторе.}$$

В системе СГС Гаусса: $h = \frac{E^2 (\epsilon - 1)}{8 \pi \rho g}$.

Поляризация неполярных диэлектриков.

Неполярные диэлектрики состоят из молекул, которые не имеют жесткого дипольного момента.

Дипольный момент молекулы возникает только под действием электрического поля \vec{E}

$\vec{p} = \alpha \vec{E}$, где α — поляризуемость молекулы.

В очень грубом приближении получим

$$\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle = n \alpha \langle \vec{E} \rangle = n \alpha \vec{E}.$$

Сравним это с $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ и получим, что $\chi = \frac{n \alpha}{\varepsilon_0}$.

Подставим сюда выражение диэлектрической восприимчивости χ через диэлектрическую проницаемость ε

$\chi = \varepsilon - 1$ и получим

$$\varepsilon - 1 = \frac{n \alpha}{\varepsilon_0},$$

здесь ε — диэлектрическая проницаемость среды, n — концентрация молекул, α — поляризуемость каждой молекулы.

Концентрация молекул n пропорциональна плотности среды τ . Тогда изменение диэлектрической проницаемости ε с изменением плотности среды происходит так, что отношение $\frac{\varepsilon - 1}{\tau}$ остается неизменным

$$\frac{\varepsilon - 1}{\tau} = \text{const}.$$

Как показывает опыт, зависимость $\varepsilon - 1$ от τ линейная только для газов с низкой плотностью. При увеличении плотности газа и тем более при переходе к жидкой или твердой фазе диэлектриков отклонение от линейности становится очень заметным.

В более точном приближении нужно учесть отличие действующего на молекулу поля \vec{E}' от среднего поля в диэлектрике \vec{E} .

Представьте себе, что молекулы диэлектрика расположены вплотную друг к другу. В таком случае, чтобы найти действующее на молекулу поле \vec{E}' , нужно из среднего поля в диэлектрике \vec{E} вычесть поле, которое поляризованная молекула создает внутри себя. Дело в том, что поле, которое поляризованная молекула создает внутри себя, не действует на молекулу, так как на нее действует только внешнее по отношению к молекуле поле.

Чтобы найти поле, действующее на молекулу диэлектрика, нам сначала потребуется найти поле \vec{E}_p однородно поляризованного шара.

Если связанные заряды перемещаются, то возникает поляризация среды. Однородно поляризованный шар можно представить себе, как два шара с плотностями зарядов $+\rho$ и $-\rho$, таких что шар с плотностью заряда $+\rho$ чуть сдвинут на отрезок \vec{l} относительно шара с плотностью заряда $-\rho$. Здесь l много меньше радиуса поляризованного шара R .

Дипольный момент этих двух шаров равен дипольному моменту двух точечных зарядов, расположенных в центрах этих шаров

$$\vec{p} = q\vec{l} = \rho V \vec{l}.$$

Если разделить дипольный момент p на объем шара V , то получится поляризация диэлектрика

$$\vec{P} = \rho \vec{l}.$$

Поле в любой точке внутри поляризованного шара можно найти, как сумму полей двух заряженных шаров. Напряженность электрического поля внутри каждого из двух шаров $\vec{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \vec{r}$. Пусть \vec{r}_- — вектор из центра шара с плотностью заряда $-\rho$ в точку наблюдения внутри поляризованного шара, а \vec{r}_+ — вектор из центра шара с плотностью заряда $+\rho$ в ту же точку наблюдения. Тогда

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{+\rho} + \vec{E}_{-\rho} = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \vec{r}_+ + \frac{1}{3\epsilon_0} (-\rho) \vec{r}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_+ - \vec{r}_-).$$

$$\text{С другой стороны } \vec{l} + \vec{r}_+ = \vec{r}_- \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_+ - \vec{r}_- = -\vec{l} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{E}_P = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{l} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

Тогда величина электрического поля в любой точке поляризованного шара:

$$\vec{E}_P = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

Следовательно, если мы мысленно удалим шар из поляризованного диэлектрика, так что в оставшемся диэлектрике связанные заряды не сдвинутся, то поле в образовавшейся полости будет равно $\vec{E} - \vec{E}_P = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$, где \vec{E} — поле в диэлектрике до удаления шара, \vec{P} — поляризация диэлектрика. И действительно, вместе с шаром там должно быть поле \vec{E} , значит, без шара поле будет $\vec{E} - \vec{E}_P$.

Заметим, что поле в шаровой полости не зависит от радиуса удаляемого шара. На каждую молекулу диэлектрика в среднем приходится объем равный $1/n$, где n — концентрация молекул. Удалим из диэлектрика шар вокруг интересующей нас молекулы именно с таким объемом. Это — то же самое, что удалить из диэлектрика одну интересующую нас молекулу. Если рассуждать не слишком строго, то поле в образовавшейся шаровой полости и будет полем, действующем на молекулу:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

Более строго нужно удалить шар произвольного радиуса и вернуть на место все молекулы этого шара, кроме центральной молекулы. Можно показать, что в случае случайного расположения молекул и в случае кубической симметрии диэлектрического кристалла все молекулы шара кроме

центральной создают в центре шара нулевое электрическое поле. Эту часть доказательства можно найти в лекциях за 2012 — 2014 годы или учебниках по электричеству, например:

1. И. Е. Тамм. Основы теории электричества.

2. Д. В. Сивухин. Курс общей физики. Том 3. Электричество.

Дипольный момент молекулы \vec{p} наводится пропорционально именно действующему на молекулу полю \vec{E}' :

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}' = \alpha \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) = \alpha \vec{E} + \frac{\alpha}{3\epsilon_0} \vec{P}.$$

Умножим это равенство на концентрацию молекул и получим в левой части равенства поляризацию среды \vec{P} :

$$\vec{P} = n\alpha \vec{E} + \frac{n\alpha}{3\epsilon_0} \vec{P} \Rightarrow$$

$$\vec{P} = \frac{n\alpha \vec{E}}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{n\alpha}{\epsilon_0 - \frac{n\alpha}{3}} \quad \Rightarrow$$

$$\epsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{n\alpha}{\epsilon_0 - \frac{n\alpha}{3}} = \frac{1 + \frac{2n\alpha}{3\epsilon_0}}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}}$$

Обозначим $\beta \equiv \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}$, тогда

$$\epsilon = \frac{1 + 2\beta}{1 - \beta} \quad \Rightarrow \quad \epsilon - \beta\epsilon = 1 + 2\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n\alpha}{3\epsilon_0} \quad \text{— формула Клаузиуса — Моссотти.}$$

В системе СГС Гаусса: $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4}{3} \pi n \alpha$.

Здесь n — концентрация молекул, α — поляризуемость одной молекулы.

Концентрация молекул пропорциональна плотности среды $n \sim \tau$, тогда

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = const$$

при изменении плотности диэлектрика величина $\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$ остается постоянной.

Для переменных полей аналогичная формула называется формулой Лоренца — Лоренца (или формулой Лоренц — Лорентца).

Поляризация полярных газообразных диэлектриков.

Молекулы полярных диэлектриков являются жесткими диполями, такими как, например, молекула HCl.

Для этих молекул во внешнем электрическом поле появляется и наведенный диполь, но его величина гораздо меньше величины жесткого диполя, поэтому наведенными диполями мы будем пренебрегать.

Жесткие диполи молекул стремятся к минимуму потенциальной энергии, то есть стремятся повернуться по полю \vec{E} , так как энергия диполя $W = -(\vec{p}, \vec{E})$.

Это с одной стороны, а с другой стороны, тепловые столкновения молекул стремятся разбросать диполи по направлениям случайным образом.

В результате совместного влияния этих двух факторов и происходит поляризация полярных газообразных диэлектриков во внешнем электрическом поле.

Пусть p_0 — величина жесткого дипольного момента молекулы.

Пусть $d\xi$ — вероятность того, что диполь направлен в телесный угол $d\Omega$.

Согласно распределению Больцмана эта вероятность пропорциональна экспоненте $e^{-\frac{W}{kT}}$. Кроме того она пропорциональна величине телесного угла $d\Omega$. Тогда