Формула для одной из составляющих магнитного поля поверхностного тока.

$$\begin{cases} d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I \dfrac{\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3} \\ Id\vec{l} \to \vec{i}dS \end{cases} \quad => \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\left[\vec{i},\vec{r}\right]}{r^3} \cdot dS$$

— закон Био — Савара для поверхностного тока, где $i = \dfrac{dI}{dl_\perp}$ — плотность поверхностного тока.

Заменим $\vec{r} \to -\vec{r}$, тогда новый вектор $\vec{r}$ — радиус-вектор элемента тока, если начало координат выбрать в точке наблюдения магнитного поля. Тогда

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\left[\vec{r},\vec{i}\right]}{r^3} \cdot dS$$

Найдем составляющую магнитного поля $dB_\perp$ такую, что

$\begin{cases} dB_\perp \perp \vec{i} \\ dB_\perp \perp \vec{n} \end{cases}$, где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности, по которой течет ток.

Любой вектор можно разложить на три взаимно ортогональных составляющих:

$\vec{r} = \vec{r}_i + \vec{r}_n + \vec{r}_\perp$, где $\begin{cases} \vec{r}_\perp \perp \vec{i} \\ \vec{r}_\perp \perp \vec{n} \end{cases}$. Тогда

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\left[\vec{r},\vec{i}\right]}{r^3} dS = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dS}{r^3}\left[\vec{r}_i + \vec{r}_n + \vec{r}_\perp, \vec{i}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{dS}{r^3}\left[\vec{r}_i,\vec{i}\right] + \frac{dS}{r^3}\left[\vec{r}_n,\vec{i}\right] + \frac{dS}{cr^3}\left[\vec{r}_\perp,\vec{i}\right]\right\}.$$

В правой части первое слагаемое равно нулю, так как $\vec{r}_i \parallel \vec{i}$. Третье слагаемое перпендикулярно вектору $\vec{r}_\perp$, так как $\left[\vec{r}_\perp,\vec{i}\right] \perp \vec{r}_\perp$. Тогда третье слагаемое перпендикулярно вектору $dB_\perp$, так как $\vec{r}_\perp \parallel d\vec{B}_\perp$. Следовательно, третье слагаемое не дает вклад в интересующую нас величину $dB_\perp$. Второе слагаемое, наоборот, целиком входит в величину $dB_\perp$, так как $\left[\vec{r}_n,\vec{i}\right] \parallel d\vec{B}_\perp$, потому что $\begin{cases} dB_\perp \perp \vec{i} \\ dB_\perp \perp \vec{n} \end{cases}$.

Тогда вклад в величину $B_\perp$ целиком определяется вторым слагаемым:

$$d\vec{B}_\perp = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dS}{r^3}\left[\vec{r}_n,\vec{i}\right].$$

С учетом того, что $\vec{r}_n \perp \vec{i}$, получим

$$dB_\perp = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dS}{r^3} r_n i = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{r_n dS}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\left(\vec{r}, d\vec{S}\right)}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{r \cdot dS_{\perp\vec{r}}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dS_{\perp\vec{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i\, d\Omega.$$

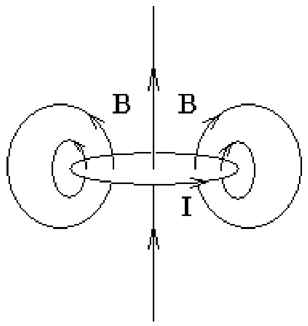
$dB_{\perp} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} i\, d\Omega$, где $d\Omega$ — телесный угол, под которым поверхность с током видна из точки наблюдения поля $\vec{B}$; $\vec{B}_{\perp}$ — составляющая магнитного поля такая, что $\begin{cases} \vec{B}_{\perp} \perp \vec{i} \\ \vec{B}_{\perp} \perp \vec{n} \end{cases}$, где $\vec{i}$ — плотность поверхностного тока, $\vec{n}$ — нормаль к поверхности с током. Составляющая $\vec{B}_{\perp}$ направлена так, что магнитное поле образует правый винт вокруг тока.

В системе СГС Гаусса: $dB_{\perp} = \dfrac{i}{c} d\Omega$.

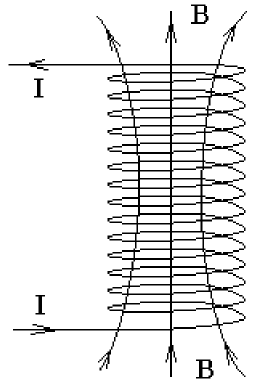
Магнитное поле внутри бесконечного соленоида.

Соленоид — это цилиндрическая катушка с проводящей обмоткой. По проводу соленоида пускают электрический ток. Можно сказать, что ток течет по боковой поверхности цилиндра вокруг оси цилиндра.

Рассмотрим магнитное поле круглого витка с током.



Мысленно сложим поля нескольких витков, расположенных один над другим и получим поле соленоида.



Внутри соленоида магнитное поле в основном направлено вдоль оси соленоида.

Линии магнитного поля проходят внутри соленоида вдоль его оси, а возвращаются снаружи соленоида. Снаружи места много, поэтому плотность линий мала, и поле мало.

Для бесконечного соленоида магнитное поле снаружи соленоида равно нулю.

Для любого элемента токонесущей поверхности соленоида оказывается, что составляющая $\vec{B}_\perp$ такая, что $\begin{cases} \vec{B}_\perp \perp \vec{i} \\ \vec{B}_\perp \perp \vec{n} \end{cases}$, направлена вдоль оси соленоида.

$dB_\perp = \dfrac{\mu_0}{4\pi} i\, d\Omega$ => $B_\perp = \dfrac{\mu_0}{4\pi} i\Omega = B_z$, где ось z направлена вдоль оси соленоида.

Внутри бесконечного соленоида $\Omega = 4\pi$ — полный телесный угол (телесный угол во все стороны), так как куда ни посмотришь из точки наблюдения поля, взгляд упирается в поверхность с током.

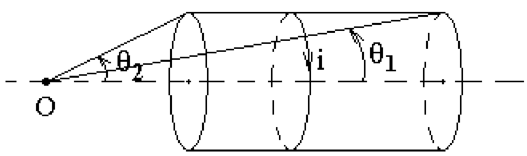
Тогда

$B = \mu_0 i = \mu_0 nI$ — поле внутри бесконечного соленоида, где i — плотность поверхностного тока соленоида, n — число витков на единицу длины соленоида, I — сила тока в одном витке соленоида.

В системе СГС Гаусса $B = 4\pi\frac{i}{c} = 4\pi n\frac{I}{c}$.

Магнитное поле на оси соленоида конечной длины.

Найдем магнитное поле в точке O на оси соленоида с поверхностной плотностью тока $i = nI$, где n — число витков на единице длины соленоида, I — сила тока в одном витке.



Здесь θ_1 и θ_2 — угловые радиусы донышек цилиндра при взгляде из точки O наблюдения магнитного поля.

Ось соленоида является поворотной осью симметрии задачи. Решение должно обладать этой же симметрией. Тогда на оси симметрии может быть только осевая составляющая магнитного поля.

Для любого элемента поверхностного тока составляющая $B_\perp$ направлена вдоль оси соленоида. Тогда поле на оси:

$$B = B_\perp = \frac{\mu_0}{4\pi} i\Omega = \frac{\mu_0}{4\pi} nI\Omega.$$

Найдем телесный угол Ω, под которым видна поверхность с током из точки наблюдения магнитного поля.

$d\Omega = \sin(\theta)\cdot d\theta \cdot d\varphi$ =>

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(\theta)\, d\theta = 2\pi\big(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)\big)$$

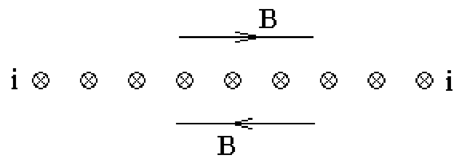
Тогда $B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\Omega nI = \mu_0 nI \dfrac{\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)}{2}$

$$B=\mu_0 nI\frac{\cos(\theta_1)-\cos(\theta_2)}{2}$$ — поле на оси соленоида, где n — число витков на единицу длины соленоида, I — сила тока в соленоиде, θ_1 и θ_2 — угловые радиусы торцов соленоида при взгляде из точки наблюдения поля.

В системе СГС Гаусса: $B=\frac{2\pi}{c}nI\left(\cos(\theta_1)-\cos(\theta_2)\right)$.

Магнитное поле над токонесущей плоскостью.

Магнитное поле закручено вокруг токов по правилу правого винта. В таком случае магнитное поле плоскости с током имеет следующий вид:



Это поле перпендикулярно току и перпендикулярно нормали к поверхности с током. Тогда магнитное поле можно найти по формуле $dB_\perp=\frac{\mu_0}{4\pi}i\,d\Omega$. Телесный угол, под которым видна бесконечная плоскость с током, равен 2π. Тогда

$B=\frac{\mu_0 i}{2}$, где поле $\vec{B}$ закручено вокруг тока по правилу правого винта, поле параллельно токонесущей плоскости и в этой плоскости перпендикулярно току.

В системе СГС Гаусса $B=2\pi\frac{i}{c}$.

Векторный потенциал.

$d\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{d\vec{l}}{r}$ — векторный потенциал элемента тока $Id\vec{l}$ на расстоянии r от элемента тока.

В системе СГС Гаусса: $d\vec{A}=\frac{I}{c}\cdot\frac{d\vec{l}}{r}$.

Выражение $d\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{d\vec{l}}{r}$ похоже на выражение $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$, где φ — скалярный потенциал. Поэтому $\vec{A}$ называют векторным потенциалом, хотя к потенциальной энергии он не имеет отношения.

Рассмотрим $rot\left(d\vec{A}\right)$:

$$rot\left(d\vec{A}\right)=\left[\vec{\nabla},\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{d\vec{l}}{r}\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}I\left[\vec{\nabla},\frac{1}{r}d\vec{l}\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}I\left[\vec{\nabla}\frac{1}{r},d\vec{l}\right].$$

Подставим сюда $\vec{\nabla}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$, что следует из $\begin{cases}\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}\\ \vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\frac{\vec{r}}{r^3}\\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi\end{cases}$, и получим

$$rot\left(d\vec{A}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}I\left[\vec{\nabla}\frac{1}{r},d\vec{l}\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}I\left[-\frac{\vec{r}}{r^3},d\vec{l}\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}I\left[d\vec{l},\frac{\vec{r}}{r^3}\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}$$

Сравним этот результат с законом Био — Савара $d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}$ и получим:

$rot\left(d\vec{A}\right)=d\vec{B}$ =>

$\vec{B}=rot\left(\vec{A}\right)$— связь магнитного поля $\vec{B}$ и векторного потенциала $\vec{A}$.

$d\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{d\vec{l}}{r}$ =>

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V'}\frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\cdot dV'$$

Потенциалы переменных электромагнитных полей.

Потенциалы переменных электромагнитных полей φ и $\vec{A}$ определяются равенствами:

$$\begin{cases}\vec{B}\equiv rot\left(\vec{A}\right)\\ \vec{E}\equiv-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\varphi\end{cases}.$$

При таком определении для потенциалов остается некоторый произвол (калибровка). Для устранения произвола выберем калибровку Лоренца $div\left(\vec{A}\right)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$.

В СГС Гаусса: $\begin{cases}\vec{B}\equiv rot\left(\vec{A}\right)\\ \vec{E}\equiv-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\varphi\end{cases}$ в калибровке Лоренца $div\left(\vec{A}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$.

Потенциалы зависят от зарядов и токов также как в электростатике $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$ и магнитостатике $d\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{d\vec{l}}{r}$, но зависят от зарядов и токов в предшествующий момент времени. Момент времени предшествует на время распространения сигнала $\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$ от источника в точке $\vec{r}\,'$ до точки наблюдения $\vec{r}$:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ d\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)\cdot d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \end{cases}.$$

Интересно, что $\begin{pmatrix} \frac{\varphi}{c} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ — 4-х вектор относительно преобразований Лоренца, так же как $\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

В системе СГС Гаусса 4-х вектор $\begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$.

Подробнее этот вопрос рассмотрен в лекции, которая обозначена как лекция 34 из 30 лекций за прошлый год. На самом деле лекция за 2011 год.

Дивергенция векторного потенциала.

$$div\left(\vec{A}\right) = 0$$

При нашем определении векторного потенциала $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}}{r}$ равенство $div\left(\vec{A}\right) = 0$ справедливо только для постоянных токов. Формулу нужно знать на экзамене. Доказательство формулы на экзамене знать не нужно.

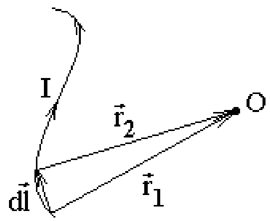
Это равенство можно доказать только для замкнутых токов. Постоянные токи замкнуты.

Сначала рассмотрим дивергенцию векторного потенциала для элемента тока, а не для замкнутого контура с током.

$$div\left(d\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla}, \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}}{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\vec{\nabla}, \frac{1}{r} d\vec{l}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}, d\vec{l}\right)$$

Подставим сюда $\vec{\nabla}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$, что следует из $\begin{cases}\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}\\ \vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\frac{\vec{r}}{r^3}\\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi\end{cases}$, и получим

$$div\left(d\vec{A}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}I\left(-\frac{\vec{r}}{r^3},d\vec{l}\right)=-\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{\left(\vec{r},d\vec{l}\right)}{r^3}$$



Из рисунка видно, что

$\vec{r}_1=d\vec{l}+\vec{r}_2$ => $d\vec{l}=-\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)=-d\vec{r}$

Подставим это в выражение для $div\left(d\vec{A}\right)$ и получим

$$div\left(d\vec{A}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{\left(\vec{r},d\vec{r}\right)}{r^3}$$

Рассмотрим

$d\left(\vec{r},\vec{r}\right)=\left(d\vec{r},\vec{r}\right)+\left(\vec{r},d\vec{r}\right)=2\left(\vec{r},d\vec{r}\right)$. =>

$$\left(\vec{r},d\vec{r}\right)=\frac{1}{2}d\left(\vec{r},\vec{r}\right)=\frac{1}{2}d\left(r^2\right)=r\,dr$$

Подставим это в выражение для $div\left(d\vec{A}\right)$ и получим

$$div\left(d\vec{A}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{\left(\vec{r},d\vec{r}\right)}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{r\,dr}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{dr}{r^2}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}d\left(\frac{1}{r}\right).$$

Теперь от рассмотрения одного элемента тока перейдем к рассмотрению замкнутого контура с током. Дивергенция суммы вкладом $d\vec{A}$ равна сумме дивергенций

$$div\left(\vec{A}\right)=\oint\limits_l div\left(d\vec{A}\right)=\oint\limits_l\left(-\frac{\mu_0 I}{4\pi}d\left(\frac{1}{r}\right)\right)=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\limits_l d\left(\frac{1}{r}\right).$$

Заметим, что для любой функции координат $(\cdot)$ криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_l d\left(\cdot\right)=0$ равен нулю, тогда

$$div\left(\vec{A}\right)=0.$$

Уравнение Пуассона для векторного потенциала.

Из электростатики мы знаем, что для любой функции координат φ, которую можно представить в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\cdot dV'$$

оказывается справедливо уравнение

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Из первого равенства следует второе. Заменим в этих двух равенствах и во всех выкладках между ними

$\begin{cases}\varphi \to \vec{A}\\ \rho \to \varepsilon_0\mu_0\vec{j}\end{cases}$ и получим что для любой функции координат $\vec{A}$, которую можно представить в виде

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

оказывается справедливо уравнение

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}\ .$$

Таким образом, получаем

$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$ — уравнение Пуассона для векторного потенциала.

В системе СГС Гаусса: $\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$.

Заметим, что для каждой проекции векторного потенциала получается дифференциальное уравнение аналогичное уравнению электростатики $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

<u>Дивергенция магнитного поля *B*.</u>

$$div(\vec{B}) = div(rot(\vec{A})) = (\vec{\nabla},[\vec{\nabla},\vec{A}])$$

Циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно-векторном произведении не изменяет его величины. Тогда

$$div(\vec{B}) = (\vec{A},[\vec{\nabla},\vec{\nabla}])$$

Векторное произведение вектора самого на себя равно нулю, поэтому

$[\vec{\nabla},\vec{\nabla}] = 0$ =>

$$div(\vec{B}) = 0$$

Это равенство доказано нами для магнитного поля постоянных токов. Максвелл предположил, что оно справедливо и для переменных электромагнитных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом, следовательно, равенство справедливо и для переменных полей.

Ротор магнитного поля *B* постоянных токов.

$\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right)$ => $rot\left(\vec{B}\right) = rot\left(rot\left(\vec{A}\right)\right) = \left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right]$

Разложим правую часть равенства по правилу "бац минус цап" и получим

$$rot\left(\vec{B}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{A}\right) - \vec{A}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right).$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как $\left(\vec{\nabla},\vec{A}\right) = div\left(\vec{A}\right) = 0$,

тогда

$$rot\left(\vec{B}\right) = -\vec{A}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right) = -\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} = -\Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j} \qquad =>$$

$rot\left(\vec{B}\right) = \mu_0\vec{j}$ — магнитное поле $\vec{B}$ закручено вокруг токов по правилу правого винта.

В системе СГС Гаусса $rot\left(\vec{B}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$.