Поток магнитного поля *B* через замкнутую поверхность.

По теореме Гаусса-Остроградского $\oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int\limits_V div\left(\vec{B}\right) dV$, но $div\left(\vec{B}\right) = 0$.

Тогда

$$\oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \qquad =>$$

Для любого объема, сколько линий поля $\vec{B}$ втекает столько и вытекает. Линии поля $\vec{B}$ нигде не начинаются и не заканчиваются. Линии поля $\vec{B}$ замкнуты.

Поток поля магнитных зарядов.

Если удастся найти магнитные заряды, то кроме замкнутых вокруг токов линий магнитного поля появятся линии магнитного поля, которые должны выходить из положительных магнитных зарядов и входить в отрицательные магнитные заряды.

Если поток магнитного поля через замкнутую поверхность отличен от нуля, то в объеме, ограниченном этой поверхностью, есть магнитные заряды.

Циркуляция магнитного поля *B*.

(или теорема о циркуляции поля $\vec{B}$ в интегральной форме)

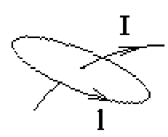
По теореме Стокса циркуляция магнитного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через площадку ограниченную контуром:

$$\oint\limits_l B_l dl = \int\limits_S \left(rot\left(\vec{B}\right), d\vec{S}\right).$$

Но ранее мы выяснили, что $rot\left(\vec{B}\right) = \mu_0 \vec{j}$, тогда

$$\oint\limits_l B_l dl = \int\limits_S \left(\mu_0 \vec{j}, d\vec{S}\right) = \mu_0 \int\limits_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) = \mu_0 \int\limits_S dI = \mu_0 I \qquad =>$$

$\oint\limits_l B_l dl = \mu_0 I$, где I — токи пронизывающие контур интегрирования. Для положительных токов I направление обхода контура и направления тока образуют правый винт.



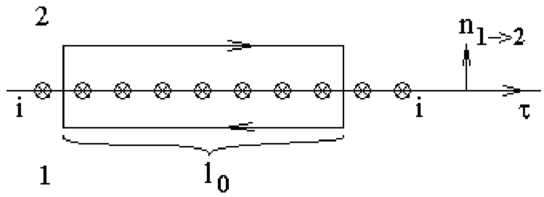
В системе СГС Гаусса $\oint\limits_l B_l dl = 4\pi \frac{I}{c}$.

Скачок магнитного поля *B* при переходе через токонесущую поверхность.

(граничные условия для поля $\vec{B}$ в вакууме)

Скачок испытывает тангенциальная составляющая магнитного поля направленная по касательной к поверхности и перпендикулярная поверхностному току.

Если подойти к поверхности с током на расстояние, которое гораздо меньше радиусов кривизны поверхности, то поверхность будет выглядеть плоской. Рассмотрим поверхностный ток, который протекает по поверхности перпендикулярной плоскости рисунка. Пусть токи текут от нас.



Рассмотрим циркуляцию магнитного поля по прямоугольному контуру, расположенному в плоскости перпендикулярной токам. Пусть вертикальные отрезки этого контура очень малы, тогда их вкладом в циркуляцию магнитного поля можно пренебречь.

Из теоремы о циркуляции магнитного поля

$$\oint\limits_{l} B_l dl = \mu_0 I$$

получаем $B_{2l} l_0 + B_{1l} l_0 = \mu_0 i l_0 \quad \Rightarrow \quad B_{2l} + B_{1l} = \mu_0 i$.

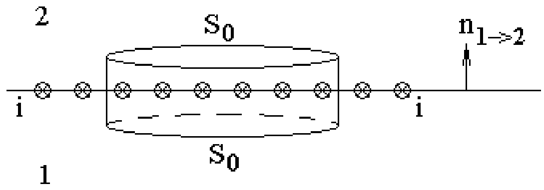
Здесь $i \equiv \dfrac{dI}{dl_\perp}$ — плотность поверхностного тока. На верхнем отрезке направление вдоль контура $d\vec{l}$ совпадает с выбранным направлением единичного вектора $\vec{\tau} \equiv \left[\dfrac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1\to 2}\right]$, поэтому $B_{2l} = B_{2\tau}$. На нижнем отрезке векторы $d\vec{l}$ и $\vec{\tau}$ противоположны по направлению, поэтому $B_{1l} = -B_{1\tau}$. Тогда

$B_{2\tau} - B_{1\tau} = \mu_0 i$, где $\vec{\tau} \equiv \left[\dfrac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1\to 2}\right]$ — единичный вектор, направленный по касательной к поверхности с током. Скачок $\vec{B}_\tau$ происходит вокруг вектора $\vec{i}$ по правилу правого винта.

В системе СГС Гаусса $B_{2\tau} - B_{1\tau} = 4\pi \dfrac{i}{c}$.

Рассмотрим теперь, что происходит с нормальной составляющей $\vec{B}_n$ поля $\vec{B}$ на границе с поверхностным током $\vec{i}$.

Рассмотрим поток Φ_B через поверхность цилиндра настолько малой высоты, что потоком через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь. Пусть два донышка цилиндра находятся с двух сторон поверхности с током.



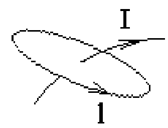
$\oint\limits_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$ => $\oint\limits_S B_n dS = 0$ => $B_{2n}S_0 + B_{1n}S_0 = 0$, где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к объему цилиндра. Если же для обоих донышек проектировать вектор $\vec{B}$ на одно и то же направление нормали $\vec{n}_{1\to 2}$, то для нижнего донышка направление нормали изменится на противоположное, и $B_{1n} \to -B_{1n}$. Тогда

$B_{2n}S_0 - B_{1n}S_0 = 0$ =>

$B_{2n} - B_{1n} = 0$, где $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности с током.

Три формы теоремы о потоке и теоремы о циркуляции поля *B*.

$$\begin{cases} div(\vec{B}) = 0 \\ \oint\limits_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} rot(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \\ \oint\limits_l B_l dl = \mu_0 I \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \mu_0 i \end{cases}$$



Если в интеграле $\oint\limits_l B_l dl$ направление обхода контура и направление тока в правой части равенства образуют правый винт, то ток в правой части равенства положителен; $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$ и $\vec{\tau} = \left[\dfrac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1\to 2}\right]$.

Сравним с аналогичными соотношениями для поля $\vec{E}$ в вакууме:

$$\begin{cases} div(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \oint\limits_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \\ E_{2n} - E_{1n} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} rot(\vec{E}) = 0 \\ \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}.$$

Магнитное поле симметричных распределений тока.

1. Поле соленоида бесконечной длины.

Как мы уже обсуждали ранее, составляющая магнитного поля вдоль оси соленоида B_z совпадает с составляющей $B_\perp$ для каждого элемента поверхностного тока соленоида, так как составляющая вдоль оси соленоида перпендикулярна поверхностному току $\vec{B}_z \perp \vec{i}$ и перпендикулярна нормали к поверхности с током $\vec{B}_z \perp \vec{n}$. Тогда из соотношения $dB_{\perp} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} i\, d\Omega$ следует $B_z = B_{\perp} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} i\Omega$, где для бесконечного соленоида $\Omega = 4\pi$. В результате

$B_z = \mu_0 i = \mu_0 nI$ — магнитное поле внутри соленоида, направленное вдоль его оси. Здесь $i = nI$ — плотность поверхностного тока соленоида, n — число витков на единицу длины соленоида, I — сила тока в каждом витке соленоида.

В системе СГС Гаусса $B_z = 4\pi \dfrac{i}{c} = 4\pi n \dfrac{I}{c}$.

<u>Факультативная вставка.</u>

$\vec{B} = \vec{B}_z + \vec{B}_r + \vec{B}_\varphi$

Докажем теперь строже, что:

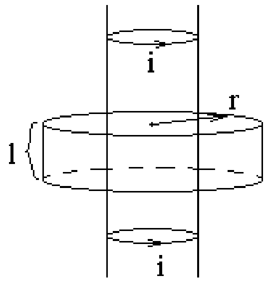
1) осевая составляющая поля снаружи соленоида $B_z = 0$ — отсутствует;

2) $B_r = 0$ — отсутствует радиальная составляющая поля внутри и снаружи соленоида или составляющая, направленная по радиусу в плоскости перпендикулярной оси соленоида;

3) $B_\varphi = 0$ — азимутальная составляющая поля, направленная вокруг оси соленоида, отсутствует внутри и снаружи соленоида, если провод подходит к соленоиду и отходит от соленоида с одного и того же торца соленоида.

Докажем отсутствие радиальной составляющей магнитного поля соленоида.

Рассмотрим поток магнитного поля через поверхность цилиндра:



Поток может создать только составляющая $\vec{B}_r$. Составляющая $\vec{B}_r$ может создать поток только через боковую поверхность цилиндра. Тогда

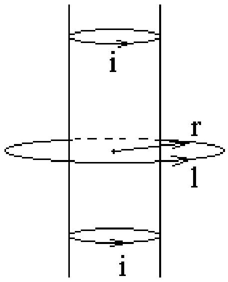
$\Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r \cdot 2\pi r l$

Это с одной стороны, а с другой стороны поток магнитного поля $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю $\Phi_B = 0$. Тогда

$B_r = 0$.

Докажем теперь отсутствие азимутальной составляющей магнитного поля соленоида.

Рассмотрим циркуляцию поля $\vec{B}$ по окружности вокруг оси соленоида:



По теореме о циркуляции магнитного поля

$\oint_l B_l dl = \mu_0 I$, где $I = 0$, так как нет токов пронизывающих контур интегрирования.

Составляющая B_φ — это составляющая вокруг оси соленоида, тогда $B_l = B_\varphi$. Тогда

$$\oint_l B_\varphi dl = 0 \quad => \quad B_\varphi \oint_l dl = 0 \quad => \quad B_\varphi \cdot 2\pi r = 0 \quad => \quad B_\varphi = 0$$

Отсутствие азимутальной составляющей магнитного поля соленоида доказано.

На самом деле составляющая B_φ снаружи соленоида может быть неравна нулю. Обычно ток подводится к соленоиду на одном его торце, а отводится на другом торце. Тогда, если радиус контура интегрирования больше радиуса обмотки соленоида, то контур пронизывает ток I, равный току в каждом витке соленоида, так как площадку, ограниченную контуром, протыкает провод с током I.

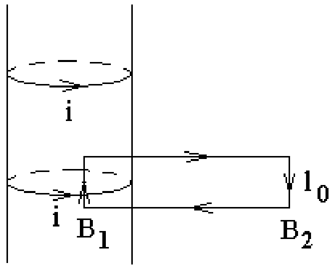
В этом случае

$\oint_l B_l dl = \mu_0 I \quad => \quad B_l \cdot 2\pi r = \mu_0 I \quad => \quad B_\varphi = B_l = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ — поле снаружи соленоида совпадает с полем прямого провода с током I.

Это поле $B_\varphi = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ гораздо меньше, чем поле внутри соленоида $B_z = \mu_0 n I$, так как $2\pi n r >> 1$, где n — число витков на единице длины соленоида, nr — число витков соленоида на длине равной радиусу соленоида. Обычно полем B_φ пренебрегают, даже когда оно есть. Чтобы B_φ было строго равно нулю нужно сделать обмотку соленоида в два слоя. Один слой намотать, например, снизу вверх, а второй слой намотать в качестве продолжения провода первого слоя сверху вниз, но в ту же сторону вокруг оси соленоида.

Докажем теперь, что снаружи соленоида нет осевой составляющей магнитного поля $B_z = 0$.

Рассмотрим прямоугольный контур, в плоскости которого лежит ось цилиндра.



Горизонтальные участки прямоугольного контура дают нулевой вклад в циркуляцию, так как $B_r = 0$. Кроме того, горизонтальные участки находятся в равных условиях, поэтому они давали бы нулевой суммарный вклад в циркуляцию, даже если бы радиальная составляющая магнитного поля была бы отлична от нуля.

Тогда по теореме о циркуляции магнитного поля:

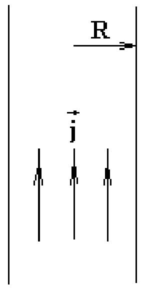
$$\oint\limits_l B_l dl = \mu_0 I \quad => \quad B_{1z} l_0 + \left(-B_{2z}\right) l_0 = \mu_0 i l_0 \quad => \quad B_{2z} = B_{1z} - \mu_0 i$$

Но внутри соленоида $B_{1z} = \mu_0 i$, тогда снаружи соленоида

$B_{2z} = 0$, что и требовалось доказать.

Конец факультативной вставки.

2. Магнитное поле *B* внутри и снаружи длинного цилиндрического проводника с заданной плотностью тока *j*.



Факультативная вставка.

$$\vec{B} = \vec{B}_z + \vec{B}_r + \vec{B}_\varphi$$

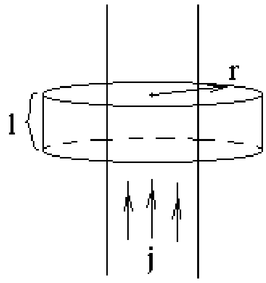
Докажем, что $B_z = 0$ — отсутствует составляющая поля вдоль провода внутри и снаружи проводника.

По закону Био — Савара $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I \dfrac{\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}$. Заменим $Id\vec{l} \to \vec{j}dV$ и получим

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\left[\vec{j}, \vec{r}\right]}{r^3} dV \quad => \quad d\vec{B} \perp \vec{j} \quad => \quad dB_z = dB_j = 0$$

$=> \quad B_z = 0$.

Докажем теперь, что $B_r = 0$ — отсутствует радиальная составляющая поля внутри и снаружи проводника.

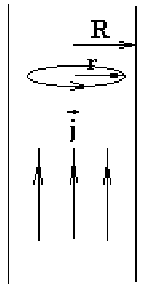


Рассмотрим поток вектора $\vec{B}$ через поверхность цилиндра. Поток может создавать только составляющая B_r.

$$0 = \Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r \cdot 2\pi r l \qquad => \qquad B_r = 0$$

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Рассмотрим теперь азимутальную составляющую B_φ.



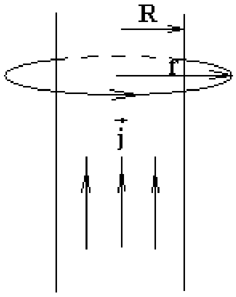
Рассмотрим циркуляцию поля $\vec{B}$ по контуру в виде окружности в плоскости перпендикулярной оси провода с током. Пусть центр окружности находится на оси провода. Рассмотрим сначала окружность, радиус которой r меньше радиуса проводника R.

$$\oint_l B_l dl = \mu_0 I \qquad => \qquad B_\varphi l = \mu_0 jS \;=>\; \qquad B_\varphi \cdot 2\pi r = \mu_0 j \cdot \pi r^2 \qquad =>$$

$B_\varphi = \dfrac{\mu_0}{2} jr$ — азимутальная составляющая поля внутри проводника с плотностью тока $\vec{j}$ при $r \le R$, составляющая поля B вокруг оси провода.

В системе СГС Гаусса $\quad B_\varphi = 2\pi r \dfrac{j}{c}$.

Рассмотрим теперь окружность, радиус которой r больше радиуса проводника R.



$$\oint_l B_l dl = \mu_0 I \quad => \quad B_\varphi \cdot l = \mu_0 j \cdot S \quad => \quad B_\varphi \cdot 2\pi r = \mu_0 j \cdot \pi R^2 \quad =>$$

$B_\varphi = \dfrac{\mu_0}{2} j \dfrac{R^2}{r}$ — азимутальная составляющая поля снаружи проводника при $r \geq R$, составляющая поля B вокруг оси провода направленная вокруг тока по правилу правого винта.

В системе СГС Гаусса $B_\varphi = 2\pi \frac{j}{c} \frac{R^2}{r}$.

3. Магнитное поле плоского слоя с током.

Пусть в объеме между двумя параллельными плоскостями текут токи с одинаковой во всех точках плотностью тока $\vec{j}$.

Факультативная вставка.

$\vec{B} = \vec{B}_j + \vec{B}_n + \vec{B}_\tau$

Докажем, что $B_j = 0$ — отсутствует составляющая магнитного поля вдоль тока внутри и снаружи плоского слоя.

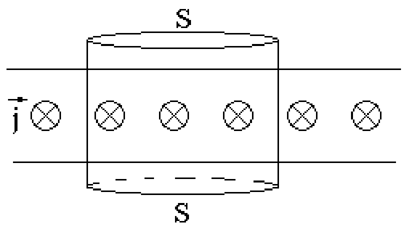
По закону Био — Савара $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I \dfrac{\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}$. Заменим $Id\vec{l} \to \vec{j}dV$ и получим

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\left[\vec{j}, \vec{r}\right]}{r^3} dV \quad => \quad d\vec{B} \perp \vec{j} \quad => \quad dB_j = 0$$

Тогда $B_j = 0$.

Докажем теперь, что отсутствует составляющая магнитного поля перпендикулярная плоскому слою $B_n = 0$.

Рассмотрим поток магнитного поля через поверхность цилиндра, донышки которого параллельны плоскому слою и симметрично расположены относительно слоя.



Поток может создавать только составляющая магнитного поля B_n. Эта составляющая создает поток только через донышки цилиндра. Из симметрии задачи потоки через оба донышка одинаковые, тогда

$\Phi_B = \Phi_{B_n} = 2B_n S$.

Это с одной стороны, а с другой стороны поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю $\Phi_B = 0$. Следовательно,

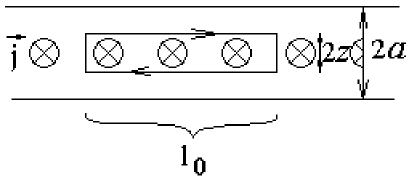
$B_n = 0$ внутри и снаружи плоского слоя с током.

Осталось найти составляющую B_τ, направленную по касательной к плоскостям слоя и перпендикулярную токам.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Рассмотрим циркуляцию поля $\vec{B}$ по прямоугольному контуру перпендикулярному токам слоя и симметрично расположенному относительно границ слоя.

Пусть $|z| \le a$.



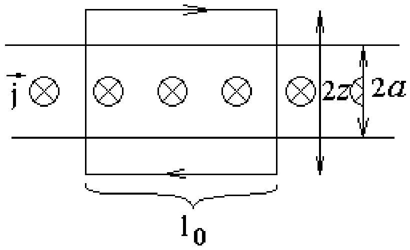
Вклад в циркуляцию дают только горизонтальные отрезки. Вклад двух горизонтальных отрезков одинаков. Тогда

$$\oint_l B_l dl = \mu_0 I \quad => \quad 2B_\tau l_0 = \mu_0 jS \quad => \quad 2B_\tau l_0 = \mu_0 j \cdot 2zl_0 \quad =>$$

$B_\tau = \mu_0 jz$ — магнитное поле внутри слоя $|z| \le a$ в направлении параллельном границам слоя и перпендикулярному току.

В системе СГС Гаусса $B_\tau = 4\pi \frac{j}{c} z$.

Пусть теперь $|z| \ge a$.



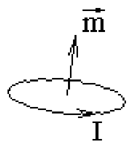
$$\oint_l B_l dl = \mu_0 I \quad => \quad 2B_\tau l_0 = \mu_0 jS \quad => \quad 2B_\tau l_0 = \mu_0 j \cdot 2al_0 \quad =>$$

$B_\tau = \mu_0 ja$ — магнитное поле снаружи слоя $|z| \ge a$ в направлении параллельном границам слоя и перпендикулярному току. Направление магнитного поля образует правый винт с направлением тока.

В системе СГС Гаусса $B_\tau = 4\pi \frac{j}{c} a$.

<u>Магнитный диполь. Момент сил, действующих на виток с током в однородном магнитном поле.</u>

$\vec{m} \equiv I\vec{S}$ — определение магнитного дипольного момента тока I в контуре, ограничивающем площадку $\vec{S}$. Направление дипольного момента образует правый винт с направлением тока.



<u>Факультативная вставка.</u>

Магнитный дипольный момент может быть выражен иначе:

$\vec{m} \equiv I\vec{S} = \frac{I}{2}\oint\limits_{l}\left[\vec{r}, d\vec{l}\right] = \frac{1}{2}\int\limits_{V}\left[\vec{r}, \vec{j}\right]dV$. В электронной оболочке атома $\vec{j} = \rho\vec{V}$.

В системе СГС Гаусса: $\vec{m} = \frac{I}{c}\vec{S}$.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Докажем, что момент сил $\vec{M}$, действующих на рамку с током в магнитном поле $\vec{B}$ равен:

$\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$.

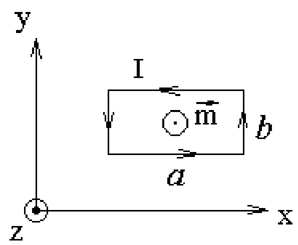
В системе СГС Гаусса $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$.

Это равенство аналогично равенству $\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]$ в электростатике.

Докажем сначала для прямоугольной рамки с током.

Выберем направление оси z системы координат вдоль вектора $\vec{m}$ (перпендикулярно плоскости рамки), оси x и y повернем вокруг оси z и направим вдоль сторон рамки с током.

Обозначим длину рамки вдоль оси x за a, вдоль оси y — за b.



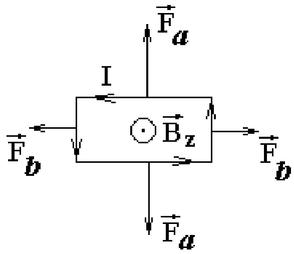
Произвольное магнитное поле $\vec{B}$ разложим на составляющие вдоль осей координат:

$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z$.

Докажем требуемое равенство $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ отдельно для каждой составляющей поля $\vec{B}$.

Рассмотрим магнитное поле с одной составляющей $\vec{B} = \vec{B}_z$.

Направление и величина сил на следующем рисунке определяются законом Ампера $d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$.



Из рисунка видно, что противоположно направленные силы попарно дают нулевой момент, как равные и противоположно направленные силы, действующие вдоль одной прямой. Следовательно, $\vec{M} = 0$ для всех 4-х сил.

С другой стороны, $\left[\vec{m}, \vec{B}\right] = 0$, так как $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{B}$.

Следовательно, при $\vec{B} = \vec{B}_z$ равенство $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ выполнено, так как каждая часть равенства равна нулю.