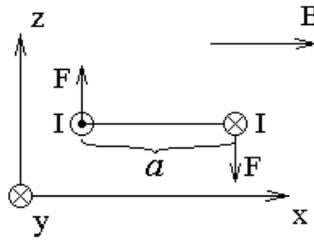


Магнитный диполь. Момент сил, действующих на виток с током в однородном магнитном поле (продолжение).

Рассмотрим теперь магнитное поле вдоль оси x .

$$\vec{B} = \vec{B}_x.$$



На отрезках рамки длиной a , которые направлены вдоль оси x и, соответственно, вдоль поля \vec{B} , сила Ампера равна нулю.

Сумма всех сил равна нулю. При этом условии момент сил не зависит от положения начала координат. Выберем начало координат в середине левого отрезка с током. Тогда плечо для силы Ампера, действующей на левый отрезок, равно нулю, и суммарный момент сил определяется только силой, действующей на правый отрезок. Момент силы $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ направлен вдоль оси y , так как вектор \vec{r} направлен слева направо.

Это с одной стороны, а с другой стороны вектор $[\vec{m}, \vec{B}] = [\vec{m}_z, \vec{B}_x]$ также направлен вдоль оси y . Следовательно, $\vec{M} \uparrow\uparrow [\vec{m}, \vec{B}]$.

Покажем, что эти векторы не только одинаково направлены, но и равны по величине.

Момент сил равен произведению силы на плечо

$$M = aF.$$

Подставим сюда выражение для величины силы Ампера $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$, откуда $F = IbB$. Тогда

$$M = aIbB = ISB = |\vec{m}|B = \left| [\vec{m}, \vec{B}] \right|.$$

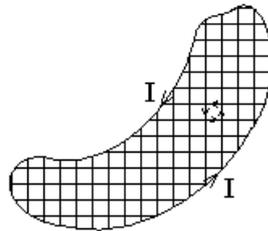
Следовательно, равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ доказано при условии $\vec{B} = \vec{B}_x$.

Аналогично доказывается, что $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ при $\vec{B} = \vec{B}_y$. Или можно повернуть оси координат вокруг оси z на $\frac{\pi}{2}$. Теперь равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ справедливо для поля \vec{B} вдоль новой (после поворота) оси x , значит, оно справедливо и для поля \vec{B} вдоль старой оси y .

Сила Ампера в суммарном поле $\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z$ равна сумме сил Ампера в каждом из трех полей. Тогда момент сил в суммарном поле равен сумме моментов сил, и, складывая равенства $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ для трех составляющих

вектора \vec{B} , получим, что равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ выполняется для любого направления вектора \vec{B} и прямоугольной рамки с током.

Любой ток в контуре плоскости можно приблизительно представить, как суперпозицию токов в малых прямоугольных рамках:



Складывая токи прямоугольных рамок, получим ток по краю суммарного контура. Для каждой i -ой прямоугольной рамки доказано, что

$$\vec{M}_i = [\vec{m}_i, \vec{B}].$$

Просуммируем это равенство по всем прямоугольным контурам, по всем i , и получим

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\vec{m}_i, \vec{B}] = \sum_i [I\vec{S}_i, \vec{B}] = \left[I \sum_i \vec{S}_i, \vec{B} \right] = [I\vec{S}, \vec{B}] = [\vec{m}, \vec{B}].$$

Тогда

$$\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}], \text{ что и требовалось доказать.}$$

Для поверхности неплоского контура будем считать равенство $\vec{S} = \sum_i \vec{S}_i$

определением вектора суммарной поверхности, тогда равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ будет справедливо и для неплоского контура.

Энергия магнитного диполя в магнитном поле.

В электростатике:

$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ — момент сил, действующих на диполь в электрическом поле.

$W = -(\vec{p}, \vec{E})$ — энергия диполя в электрическом поле.

Эти две формулы в электростатике мы выводили независимо друг от друга. Однако энергия диполя в электрическом поле определяется ориентацией диполя, то есть зависит от его поворота.

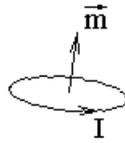
Повернуть диполь стремится момент сил.

Следовательно, в электростатике формула для энергии однозначно определяется формулой для момента сил.

То есть из формулы $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ можно доказать $W = -(\vec{p}, \vec{E})$.

Заменим во всех формулах этого доказательства $\vec{p} \rightarrow \vec{m}$ и $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, и получим доказательство из выражения для момента сил $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ формулы для энергии диполя в магнитном поле $W = -(\vec{m}, \vec{B})$.

Следовательно, $W = -(\vec{m}, \vec{B})$ — энергия магнитного диполя $\vec{m} \equiv I\vec{S}$



Интересно, что магнитное поле не потенциально $rot(\vec{B}) \neq 0$, а магнитные силы потенциальны, и потенциальная энергия магнитного диполя равна $W = -(\vec{m}, \vec{B})$. Это оказывается возможным, так как сила Ампера $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$ не параллельна магнитному полю \vec{B} .

Сила, действующая на магнитный диполь в неоднородном магнитном поле.

Сила и потенциальная энергия всегда связаны соотношением $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$. Тогда

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W = -\vec{\nabla}(-(\vec{m}, \vec{B})) = \vec{\nabla}(\vec{m}, \vec{B}) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}, \vec{B}) \text{ — сила, действующая на магнитный диполь } \vec{m} \equiv I\vec{S}.$$

Для сравнения в электростатике $\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla})\vec{E}$, а при условии $rot(\vec{E}) = 0$ получаем $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E})$.

Векторный потенциал поля точечного магнитного диполя.

$$d\vec{A} \equiv \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{r} \text{ — определение векторного потенциала для элемента тока}$$

$Id\vec{l}$, r — расстояние от элемента тока до точки наблюдения.

Тогда для замкнутого контура с током векторный потенциал:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

С учетом того, что $d\vec{l}' = d\vec{r}'$ получим

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ — векторный потенциал замкнутого контура с током.}$$

Это точное выражение для векторного потенциала, а нас интересует приближенное выражение с учетом того, что расстояние от токов до точки наблюдения гораздо больше, чем размеры контура с током.

Выберем начало координат где-то в области магнитного диполя.

Пусть \vec{r}' — радиус-вектор элемента тока магнитного диполя, \vec{r} — радиус-вектор точки наблюдения векторного потенциала, создаваемого магнитным диполем.

Для точечного магнитного диполя $r' \ll r$.

Разложим $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ по степеням малого параметра \vec{r}' .

$$f(d\vec{r}) \approx f(0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = f(0) + (d\vec{r}, \vec{\nabla} f)$$

Заменим

$$\left. \begin{array}{l} d\vec{r} \rightarrow \vec{r}' \\ f(\vec{r}') \rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}', \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{\vec{r}'=0} \right)$$

Заметим, что для любой функции от $(\vec{r} - \vec{r}')$ справедливо равенство $\vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$, так как

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \cdot}{\partial x'} = \frac{\partial \cdot}{\partial(x-x')} \cdot \frac{\partial(x-x')}{\partial x'} = \frac{\partial \cdot}{\partial(x-x')} \cdot (-1) \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x} = \frac{\partial \cdot}{\partial(x-x')} \cdot \frac{\partial(x-x')}{\partial x} = \frac{\partial \cdot}{\partial(x-x')} \cdot (+1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$$

Тогда

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}', \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{\vec{r}'=0} \right) = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}', \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{\vec{r}'=0} \right) = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}', \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right)$$

$$\text{Здесь } \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ так как } \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \\ \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \end{array} \right. \text{ Тогда}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} - \left(\vec{r}', -\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \cdot (\vec{r}', \vec{r})$$

Подставим это в выражение для векторного потенциала контура с током

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ и получим}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} (\vec{r}', \vec{r}) \right\} d\vec{r}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \oint_{l'} \frac{d\vec{r}'}{r} + \oint_{l'} \frac{(\vec{r}', \vec{r})}{r^3} d\vec{r}' \right\} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \oint_{l'} d\vec{r}' + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{r}) d\vec{r}'$$

Здесь первый интеграл в правой части равенства равен нулю $\oint_{l'} d\vec{r}' = 0$, так

как интеграл $\oint_{l'} d(\cdot) = 0$ равен нулю для любой функции под знаком дифференциала и в частности для \vec{r}' . Тогда

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{r}) d\vec{r}'$$

Мы хотим выразить векторный потенциал $\vec{A}(\vec{r})$ через магнитный дипольный момент $\vec{m} \equiv I\vec{S}$, где \vec{S} — вектор площади ограниченной контуром с током I .

С этой целью рассмотрим

$$[\vec{m}, \vec{B}] = \vec{M} = \oint_{l'} d\vec{M} = \oint_{l'} [\vec{r}', d\vec{F}'] = \oint_{l'} [\vec{r}', I [d\vec{l}', \vec{B}]]$$

Здесь в последнем равенстве подставлено выражение для силы Ампера $d\vec{F}' = I [d\vec{l}', \vec{B}]$, действующей на элемент тока $I d\vec{l}'$, радиус-вектор которого равен \vec{r}' .

Учтем, что $d\vec{l}' = d\vec{r}'$, и получим

$$[\vec{m}, \vec{B}] = \oint_{l'} [\vec{r}', I [d\vec{r}', \vec{B}]] = I \oint_{l'} [\vec{r}', [d\vec{r}', \vec{B}]]$$

Двойное векторное произведение в правой части равенства преобразуем по правилу "бац минус цап" и получим

$$[\vec{m}, \vec{B}] = I \oint_{l'} d\vec{r}' (\vec{r}', \vec{B}) - I \oint_{l'} \vec{B} (\vec{r}', d\vec{r}') = I \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{B}) d\vec{r}' - I \vec{B} \oint_{l'} (\vec{r}', d\vec{r}')$$

Второй интеграл в правой части равенства равен нулю. И действительно,

$$d(\vec{r}', \vec{r}') = (d\vec{r}', \vec{r}') + (\vec{r}', d\vec{r}') = 2(\vec{r}', d\vec{r}') \Rightarrow (\vec{r}', d\vec{r}') = \frac{1}{2} d(\vec{r}', \vec{r}') \Rightarrow$$

$\oint_{l'} (\vec{r}', d\vec{r}') = \frac{1}{2} \cdot \oint_{l'} d(\vec{r}', \vec{r}')$, где последний интеграл равен нулю, так как интеграл $\oint_{l'} d(\cdot) = 0$ равен нулю для любой функции под знаком дифференциала.

Тогда в выражении для векторного произведения $[\vec{m}, \vec{B}]$ останется только первый интеграл:

$$[\vec{m}, \vec{B}] = I \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{B}) d\vec{r}'$$

Это равенство справедливо для любого значения вектора \vec{B} , если считать, что поле \vec{B} одинаковое во всех точках.

Хотя это равенство было получено с использованием закона Ампера $d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}]$, вектор \vec{B} в равенстве $[\vec{m}, \vec{B}] = I \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{B}) d\vec{r}'$ может иметь любое

значение, а значит, его можно сделать равным любому наперед заданному вектору, например, вектору \vec{r} .

Следовательно, в равенстве $[\vec{m}, \vec{B}] = I \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{B}) d\vec{r}'$ вектор \vec{B} можно заменить на вектор \vec{r} . В результате получим

$$[\vec{m}, \vec{r}] = I \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{r}) d\vec{r}'.$$

Сравним это равенство с полученным выражением для векторного потенциала $\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_{l'} (\vec{r}', \vec{r}) d\vec{r}'$ и получим

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3} \text{ — векторный потенциал точечного магнитного диполя, где}$$

\vec{r} — вектор из диполя в точку наблюдения. Формулу без доказательства нужно знать **к экзамену**.

Заметим, что это равенство похоже на потенциал электрического диполя

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}.$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \vec{A} = \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3} \text{ и } \varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}.$$

Магнитное поле \vec{B} точечного магнитного диполя.

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) = \text{rot} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\vec{\nabla}, \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\vec{\nabla}, \left[\vec{m}, \frac{\vec{r}}{r^3} \right] \right]$$

Правую часть равенства распишем по правилу "бац минус цап" и получим

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \vec{m} \left(\vec{\nabla}, \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - \frac{\vec{r}}{r^3} (\vec{\nabla}, \vec{m}) \right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках правой части равенства равно нулю, так как $\left(\vec{\nabla}, \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \text{div}(\vec{E}_1)$, где \vec{E}_1 — напряженность поля

единичного точечного заряда в начале координат, в точке $\vec{r} = 0$. По теореме Гаусса в дифференциальной форме $\text{div}(\vec{E}) = 4\pi\rho$, а для единичного точечного заряда в начале координат имеем $\rho = 0$ во всех точках кроме точки $\vec{r} = 0$, следовательно, $\text{div}(\vec{E}_1) = 0$ во всех точках, кроме точки $\vec{r} = 0$, тогда и

$$\left(\vec{\nabla}, \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0 \text{ во всех точках, кроме точки } \vec{r} = 0.$$

Тогда магнитное поле диполя:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m}, \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Раскроем правую часть равенства, как производную от произведения \vec{r} на $\frac{1}{r^3}$:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} (\vec{m}, \vec{\nabla}) \vec{r} + \vec{r} (\vec{m}, \vec{\nabla}) \frac{1}{r^3} \right\}.$$

Рассмотрим подробнее первое слагаемое правой части равенства:

$$\begin{aligned} (\vec{m}, \vec{\nabla}) \vec{r} &= \left(m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \\ &= m_x \frac{\partial}{\partial x} x\vec{i} + m_y \frac{\partial}{\partial y} y\vec{j} + m_z \frac{\partial}{\partial z} z\vec{k} = m_x \vec{i} + m_y \vec{j} + m_z \vec{k} = \vec{m} \end{aligned}$$

Тогда

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{m}}{r^3} + \vec{r} (\vec{m}, \vec{\nabla}) \frac{1}{r^3} \right\} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{m}}{r^3} + \vec{r} \left(\vec{m}, \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) \right\}.$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в правой части равенства.

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) = \vec{\nabla} \left(\left(\frac{1}{r} \right)^3 \right) = 3 \left(\frac{1}{r} \right)^2 \vec{\nabla} \frac{1}{r}.$$

$$\text{Здесь } \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ так как } \begin{cases} \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \\ \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}. \text{ Тогда} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{r} \right)^2 \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -3 \frac{\vec{r}}{r^5}.$$

Подставим это значение в выражение

для магнитного поля \vec{B} точечного магнитного диполя и получим:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{m}}{r^3} + \vec{r} \left(\vec{m}, -3 \frac{\vec{r}}{r^5} \right) \right\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 3 \frac{(\vec{m}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right\}.$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 3 \frac{(\vec{m}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right\} \text{ — магнитное поле точечного диполя, где } \vec{m} \equiv I\vec{S}$$

— магнитный дипольный момент, \vec{r} — вектор из диполя в точку наблюдения.

Эту формулу без доказательства нужно знать **к экзамену**. Заметим, что это выражение с точностью до коэффициента совпадает с выражением для электрического поля, создаваемого электрическим диполем

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right\}.$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 3 \frac{(\vec{m}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{8}{3} \pi \cdot \vec{m} \cdot \delta(\vec{r}) \right\}$$
 магнитное поле точечного диполя с

учетом поля внутри самого диполя (без доказательства). Но

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{4}{3} \pi \cdot \vec{p} \cdot \delta(\vec{r}) \right\}.$$

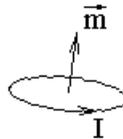
В системе СГС Гаусса $\vec{B} = 3 \frac{(\vec{m}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{8}{3} \pi \cdot \vec{m} \cdot \delta(\vec{r})$ и $\vec{E} = 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{4}{3} \pi \cdot \vec{p} \cdot \delta(\vec{r})$.

Магнитное поле в веществе.

Намагниченность и связанные токи.

$$\vec{M} \equiv \frac{d\vec{m}}{dV} \quad \text{— намагниченность или объемная плотность магнитного}$$

дипольного момента, где $\vec{m} \equiv I\vec{S}$ — магнитный дипольный момент.



Для электрического поля аналогично $\vec{P} \equiv \frac{d\vec{p}}{dV}$ — поляризация или

объемная плотность электрического дипольного момента, где $\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$ —

электрический дипольный момент.

Связанные токи, они же молекулярные токи, они же токи намагничения.

Связанные токи — внутриатомные и внутримолекулярные токи — токи с перемещением зарядов внутри каждой молекулы, но макроскопическим суммарным током молекул.

Токи проводимости или свободные токи — токи с макроскопическим перемещением зарядов — токи с перемещением зарядов много большим, чем размеры одной молекулы.

Будем обозначать:

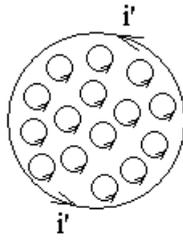
I', \vec{j}', \vec{i}' — связанные токи;

I, \vec{j}, \vec{i} — токи проводимости;

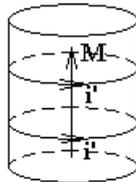
$(I' + I), (\vec{j}' + \vec{j}), (\vec{i}' + \vec{i})$ — полные токи.

Рассмотрим цилиндр, намагниченный вдоль оси, то есть с объемной плотностью магнитного дипольного момента, направленной вдоль оси цилиндра.

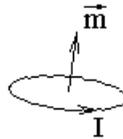
Вид с торца цилиндра со связанными токами:



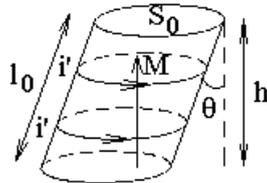
При сложении молекулярных токов получается ток, как бы идущий по боковой поверхности цилиндра — связанный ток.



Намагниченность цилиндра и связанные токи образуют правый винт, как и для магнитного момента каждого атома:



Рассмотрим теперь наклонный цилиндр, намагниченный перпендикулярно плоскости основания.



Чтобы найти связь между намагниченностью и связанными токами, выразим магнитный момент всего цилиндра двумя способами и приравняем эти два выражения.

$$\begin{cases} m = MV \\ m = I'S_0 \end{cases} \Rightarrow MV = I'S_0 \Rightarrow M \cdot S_0 h = i'l_0 \cdot S_0 \Rightarrow$$

$$M \frac{h}{l_0} = i' \Rightarrow M \cos(\theta) = i' \Rightarrow M_\tau = i'$$

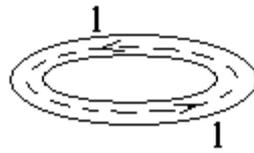
— связь тангенциальной составляющей намагниченности и плотности поверхностных связанных токов на границе магнетик-вакуум.

На границе двух магнетиков:

$$M_{2\tau} - M_{1\tau} = i', \text{ где } \vec{\tau} = \left[\frac{\vec{i}'}{i'}, \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \right].$$

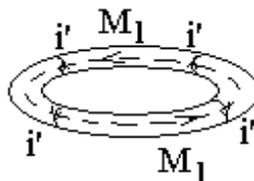
Скачок тангенциальной составляющей намагниченности образует правый винт с плотностью поверхностных связанных токов.

Рассмотрим замкнутый контур l , который целиком находится в намагниченном веществе. Пусть намагниченность вещества имеет различную величину в разных точках. Рассмотрим тонкую трубку вокруг контура в виде тора, который так же целиком находится внутри намагниченного вещества.



Рассмотрим M_l — составляющую намагниченности вдоль контура l . На время забудем об остальных составляющих намагниченности и забудем о веществе за пределами тора.

Если тор намагничен вдоль контура l , то связанные токи будут течь по поверхности тора, охватывая намагниченность M_l по правилу правого винта.



Рассмотрим величину связанного тока, пронизывающего контур l , то есть протыкающего площадку, ограниченную контуром l .

Связанные токи протыкают площадку, ограниченную контуром l , пересекая линию внутренней окружности тора.

Для точек поверхности тора на этой линии $M_\tau = i'$ — это составляющая намагниченности вдоль этой линии, направленная по касательной к поверхности тора и перпендикулярно связанным токам.

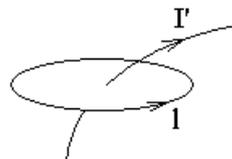
Тогда $M_l \approx M_\tau = i'$ — составляющая магнитного поля вдоль контура l .

Найдем связанный ток, пронизывающий весь контур l :

$$I' = \oint_l dI' = \oint_l i' dl = \oint_l M_l dl \quad \Rightarrow$$

$$\oint_l M_l dl = I', \quad \text{где направление обхода контура } l \text{ и направление}$$

пронизывающих контур связанных токов I' образуют правый винт.

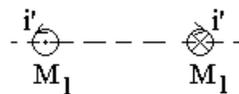


В системе СГС Гаусса: $\oint_l M_l dl = \frac{I'}{c}$.

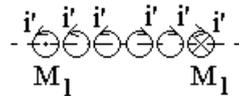
Факультативная вставка.

Докажем, что нет других связанных токов пронизывающих контур l , кроме токов, текущих по боковой поверхности тора.

Повернем плоскость рисунка так, чтобы плоскость контура l оказалась перпендикулярна плоскости рисунка.



Магнетик на площадке, ограниченной контуром, можно разбить на трубки (торы) других контуров.



Для новых трубок, сколько связанных токов втекает в площадку, ограниченную контуром l , столько и вытекает.

Кроме составляющей намагниченности M_l , остальные составляющие намагниченности создают связанные токи, которые так же имеют нулевой суммарный связанный ток через площадку, ограниченную контуром.

Конец факультативной вставки.

$$\oint_l M_l dl = I' \text{ — соотношение между намагниченностью } \vec{M} \text{ и связанными}$$

токами I' в интегральной форме.

Получим теперь соотношение между намагниченностью и связанными токами в дифференциальной форме.

$$\oint_l M_l dl = I' \quad \left| \cdot \frac{1}{S} \right. \quad \Rightarrow \quad \left(\text{rot}(\vec{M}) \right)_n = \frac{I'}{S} = j'_n, \text{ где } \vec{n} \uparrow \uparrow \vec{S} \text{ — любое}$$

направление. Тогда

$$\text{rot}(\vec{M}) = \vec{j}'$$