Намагниченность и связанные токи (продолжение)**.**

В трех формах связь намагниченности среды $\vec{M}$ и связанных токов в дифференциальной, интегральной и для границы намагниченной среды имеет следующий вид:

$$\begin{cases} rot\left(\vec{M}\right) = \vec{j}\,' \\ \oint\limits_l M_l dl = I\,' \\ M_{2\tau} - M_{1\tau} = i\,' \end{cases}.$$

Связанные токи и намагниченность среды образуют правый винт или $\vec{\tau} = \left[\dfrac{\vec{i}\,'}{i\,'}, \vec{n}_{1\to 2}\right]$.

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} rot\left(\vec{M}\right) = \dfrac{\vec{j}\,'}{c} \\ \oint\limits_l M_l dl = \dfrac{I\,'}{c} \\ M_{2\tau} - M_{1\tau} = \dfrac{i\,'}{c} \end{cases}$.

Намагниченность и связанные токи для переменных полей.

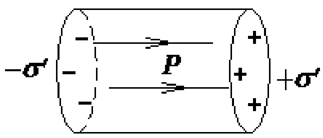
Соотношение $rot\left(\vec{M}\right) = \vec{j}\,'$ справедливо только для постоянных магнитных полей, независящих от времени.

В более общем случае

$$\vec{j}\,' = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + rot\left(\vec{M}\right).$$

В системе СГС Гаусса $\vec{j}\,' = \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \cdot rot\left(\vec{M}\right)$.

Чтобы понять природу слагаемого $\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ представим себе диэлектрический цилиндр, который поляризован вдоль оси цилиндра. На торцах цилиндра образуются связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma' = P$, что следует из граничных условий $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$.



Пусть поляризация цилиндра $\vec{P}$ линейно нарастает во времени. Производная от зарядов по времени равна силе тока, а производная от поверхностной плотности заряда по времени равна плотности тока $j\,' = \dfrac{d\sigma'}{dt} = \dfrac{dP}{dt}$.

Частная производная по времени вместо полной производной подчеркивает неизменность пространственных координат при вычислении производной.

Напряженность магнитного поля.

На внутриатомном микроскопическом уровне нет разницы между молекулярными токами I' и токами проводимости I. И те и другие находятся в вакууме и создают магнитное поле $\vec{B}$. Тогда для поля $\vec{B}$ на микроскопическом уровне

$$\oint_l \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \mu_0 \left(I + I'\right).$$

Усредненное микроскопическое магнитное поле $\vec{B}$ называют полем $\vec{B}$ в среде. Для усредненного поля $\vec{B}$ будет выполнено то же соотношение

$$\oint_l \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \mu_0 \left(I + I'\right).$$

Вычтем из этого равенства другое равенство $\oint_l \left(\vec{M}, d\vec{l}\right) = I'$, умноженное на μ_0, и получим

$$\oint_l \left(\vec{B} - \mu_0 \vec{M}, d\vec{l}\right) = \mu_0 I \qquad => \qquad \oint_l \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, d\vec{l}\right) = I.$$

Определим напряженность магнитного поля $\vec{H}$ следующим равенством:

$\vec{H} \equiv \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$. Тогда

$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right)$, что похоже на соотношение для электрических полей $\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

Из равенства $\oint_l \left(\dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, d\vec{l}\right) = I$ следует

$\oint_l H_l dl = I$ — теорема о циркуляции напряженности магнитного поля в интегральной форме. Из интегральной формы следуют две другие: дифференциальная форма и форма для границы раздела сред.

$$\begin{cases} rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} \\ \oint_l H_l dl = I \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \end{cases}$$

— связь напряженности магнитного поля $\vec{H}$ и токов проводимости в трех формах.

В системе СГС Гаусса: $\oint_l \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \frac{4\pi}{c} I$ $\quad \oint_l M_l dl = \frac{I'}{c}$ $\quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$ $\quad \vec{m} = \frac{I}{c} \vec{S}$.

Основные формулы для магнитного поля в среде.

$$\begin{cases} rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} \\ \oint\limits_l H_l dl = I \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \end{cases} \qquad \begin{cases} div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ \oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \end{cases}$$

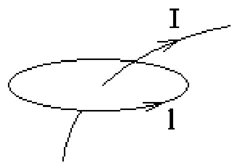
$$\begin{cases} rot\left(\vec{M}\right) = \vec{j}\,' \\ \oint\limits_l M_l dl = I' \\ M_{2\tau} - M_{1\tau} = i' \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\left(\vec{B}\right) = \mu_0\left(\vec{j} + \vec{j}\,'\right) \\ \oint\limits_l B_l dl = \mu_0\left(I + I'\right) \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \mu_0\left(i + i'\right) \end{cases}$$

В системе СГС Гаусса:

$$\begin{cases} rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \oint\limits_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{cases} \qquad \begin{cases} div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ \oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} rot\left(\vec{M}\right) = \frac{\vec{j}\,'}{c} \\ \oint\limits_l M_l dl = \frac{I'}{c} \\ M_{2\tau} - M_{1\tau} = \frac{i'}{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\left(\vec{B}\right) = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}\,'\right) \\ \oint\limits_l B_l dl = \frac{4\pi}{c}\left(I + I'\right) \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c}\left(i + i'\right) \end{cases}.$$

Во всех равенствах направление обхода контура и направление тока образуют правый винт,



$\vec{\tau} = \left[\frac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1\to 2}\right]$ — единичный вектор по касательной к поверхности, по которой текут токи, и перпендикулярный токам.

Сравнение формул для электрического и магнитного полей.

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \qquad \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

$$\vec{p} = \sum_i q_i\vec{r}_i = \int\limits_V \rho\vec{r}dV \qquad \vec{m} = I\vec{S} = \frac{1}{2}\int\limits_V \left[\vec{r}, \vec{j}\right]dV = \frac{1}{2}\int\limits_V \left[\vec{r}, \rho\vec{v}\right]dV$$

$$div\left(\vec{D}\right) = \rho \qquad rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j}$$

$$div\left(\vec{E}\right)=\frac{\rho+\rho'}{\varepsilon_0} \qquad rot\left(\vec{B}\right)=\mu_0\left(\vec{j}+\vec{j}\,'\right)$$

$$div\left(\vec{P}\right)=-\rho' \qquad rot\left(\vec{M}\right)=\vec{j}\,'$$

$$rot\left(\vec{E}\right)=0 \qquad div\left(\vec{B}\right)=0$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\left(\vec{p},\vec{r}\right)}{r^3} \qquad \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\left[\vec{m},\vec{r}\right]}{r^3}$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{3\frac{\left(\vec{p},\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}\right\} \qquad \vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{3\frac{\left(\vec{m},\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{m}}{r^3}\right\}$$

В системе СГС Гаусса:

$$\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P} \qquad \vec{B}=\vec{H}+4\pi\vec{M}$$

$$\vec{P}=\frac{d\vec{p}}{dV} \qquad \vec{M}=\frac{d\vec{m}}{dV}$$

$$\vec{p}=\sum_i q_i\vec{r}_i=\int_V \rho\vec{r}dV \qquad \vec{m}=\frac{I}{c}\vec{S}=\frac{1}{2c}\int_V\left[\vec{r},\vec{j}\right]dV=\frac{1}{2c}\int_V\left[\vec{r},\rho\vec{v}\right]dV$$

$$div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho \qquad rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$div\left(\vec{E}\right)=4\pi\left(\rho+\rho'\right) \qquad rot\left(\vec{B}\right)=\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}+\vec{j}\,'\right)$$

$$div\left(\vec{P}\right)=-\rho' \qquad rot\left(\vec{M}\right)=\frac{\vec{j}\,'}{c}$$

$$rot\left(\vec{E}\right)=0 \qquad div\left(\vec{B}\right)=0$$

$$\varphi=\frac{\left(\vec{p},\vec{r}\right)}{r^3} \qquad \vec{A}=\frac{\left[\vec{m},\vec{r}\right]}{r^3}$$

$$\vec{E}=3\frac{\left(\vec{p},\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3} \qquad \vec{B}=3\frac{\left(\vec{m},\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{m}}{r^3}$$

Электрическое и магнитное поле в полости вытянутой вдоль поля и в полости сплюснутой перпендикулярно полю.

Граничные условия позволяют найти поле в полости вытянутой вдоль поля и в полости сплюснутой перпендикулярно полю.

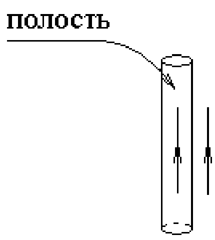
Если на границе полости нет свободных поверхностных зарядов и поверхностных токов проводимости $\begin{cases}\sigma=0\\ \vec{i}=0\end{cases}$, то граничные условия для электрического и магнитного полей выглядят одинаково:

$$\begin{cases}D_{2n}-D_{1n}=0\\ E_{2\tau}-E_{1\tau}=0\end{cases} \qquad \begin{cases}B_{2n}-B_{1n}=0\\ H_{2\tau}-H_{1\tau}=0\end{cases},$$

Поэтому дальнейшие рассуждения одинаковы для электрического и магнитного полей.

Рассмотрим полость в виде длинного цилиндра с осью цилиндра направленной вдоль поля.

Для цилиндрической полости, вытянутой вдоль поля, линии поля идут по касательной к боковой поверхности цилиндра полости и почти не искривляются.



Граничные условия на боковой поверхности полости:

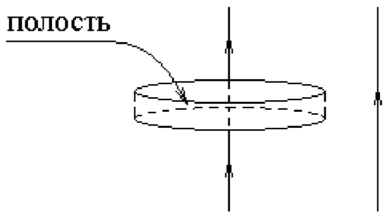
$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$ или $H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0$. =>

Напряженность в полости, вытянутой вдоль поля, одинаковая в среде и в полости.

Индукция поля в среде и в полости различная.

Измеряя поле в такой полости, мы измеряем напряженность электрического или магнитного поля в веществе.

Для цилиндрической полости, сплюснутой перпендикулярно полю, линии поля направлены перпендикулярно донышкам полости и, проходя через донышки, почти не искривляются.



Граничные условия на донышках полости:

$D_{2n} - D_{1n} = 0$ или $B_{2n} - B_{1n} = 0$ =>

Индукция в полости, сплюснутой перпендикулярно полю, одинаковая в среде и в полости. Напряженность поля в среде и в полости различная.

Измеряя поле в такой полости, мы измеряем электрическую или магнитную индукцию в веществе.

<u>Совсем факультативная вставка.</u>

Рассмотрим полость в форме шара. Электрическое поле.

Пусть:

$\vec{E}_0$ — напряженность электрического поля вдали от полости.

Придумаем, что $\vec{E}_1 = \overrightarrow{const}$ — напряженность однородного электрического поля внутри полости.

Придумаем, что поле снаружи полости $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$, где $\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right\}$ — напряженность электрического поля точечного диполя расположенного в центре полости.

В системе СГС Гаусса $\vec{E}_p = 3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$.

Проверим, что придуманное поле удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \varepsilon E_{2n} - \varepsilon_0 E_{1n} = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} E_{1n} = \varepsilon E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \end{cases}$$

Подставим

$$\begin{cases} E_{1n} = E_1 \cos(\theta) \\ E_{1\tau} = E_1 \sin(\theta) \\ E_{2n} = E_0 \cos(\theta) + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ 3 \dfrac{p\cos(\theta)}{R^3} - \dfrac{p\cos(\theta)}{R^3} \right\} = E_0 \cos(\theta) + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2 \dfrac{p\cos(\theta)}{R^3} \\ E_{2\tau} = E_0 \sin(\theta) - \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{p\sin(\theta)}{R^3} \end{cases}$$

в два следующих равенства

$$\begin{cases} E_{1n} = \varepsilon E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \end{cases}$$

и после сокращения первого равенства на $\cos(\theta)$, а второго — на $\sin(\theta)$, получим

$$\begin{cases} E_1 = \varepsilon E_0 + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\varepsilon \dfrac{p}{R^3} \\ E_1 = E_0 - \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{p}{R^3} \end{cases}.$$

Откуда

$$E_1 = \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} E_0 \quad \text{и} \quad p = -4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} R^3 E_0 .$$

В системе СГС Гаусса $E_1 = \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} E_0$ и $p = -\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+1} R^3 E_0$.

Аналогично для магнитного поля:

$$H_1 = \frac{3\mu}{1+2\mu} H_0, \qquad m = -\frac{4\pi}{\mu_0} \cdot \frac{\mu - 1}{2\mu + 1} R^3 H_0 \qquad \text{и} \qquad B_1 = \frac{3}{1+2\mu} B_0$$

В системе СГС Гаусса: $H_1 = \frac{3\mu}{1+2\mu} H_0$, $m = -\frac{\mu-1}{2\mu+1} R^3 H_0$ и $B_1 = \frac{3}{1+2\mu} B_0$.

Конец совсем факультативной вставки.

Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость среды.

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ — определение χ_m — магнитной восприимчивости среды. Аналогично $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ для электрического поля.

$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ — определение μ — магнитной проницаемости среды. Аналогично $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ для электрического поля.

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) = \mu_0 \left(\vec{H} + \chi_m \vec{H} \right) = \mu_0 \left(1 + \chi_m \right) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad =>$$

$$\mu = 1 + \chi_m \qquad \text{аналогично} \qquad \varepsilon = 1 + \chi .$$

В системе СГС Гаусса:

$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$ $\vec{B}=\mu\vec{H}$ $\vec{B}=\vec{H}+4\pi\vec{M}$ $\mu=1+4\pi\chi_m$

$\vec{P}=\chi\vec{E}$ $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ $\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}$ $\varepsilon=1+4\pi\chi$

Связанные токи обычно присутствуют только на поверхности намагниченной среды.

$$\vec{j}\,'=rot\left(\vec{M}\right)=rot\left(\chi_m\vec{H}\right)$$

Если магнетик однородный, то магнитную восприимчивость χ_m можно вынести за знак производной везде, кроме точек границы магнетика. Вынесем χ_m за знак ротора и получим

$$\vec{j}\,'=\chi_m\, rot\left(\vec{H}\right)=\chi_m\vec{j} \qquad =>$$

$$\vec{j}\,'=\chi_m\vec{j}\,.$$

Если в объеме намагниченной среды нет токов проводимости $\vec{j}$, то нет и связанных токов $\vec{j}\,'$. Поэтому связанные токи обычно протекают только по поверхности намагниченной среды.

Два способа вычисления векторного потенциала *A* магнитного поля, создаваемого намагниченной средой.

Можно считать, что вещества нет, а связанные токи висят в вакууме, тогда

$$d\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\vec{j}dV}{r} \qquad => \qquad \vec{A}\left(\vec{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V'}\frac{\vec{j}\,'\left(\vec{r}\,'\right)\cdot dV'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{S'}\frac{\vec{i}\,'\left(\vec{r}\,'\right)\cdot dS'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}$$

В системе СГС Гаусса $d\vec{A}=\frac{\vec{j}dV}{cr}$ и $\vec{A}(\vec{r})=\frac{1}{c}\int\limits_{V'}\frac{\vec{j}\,'(\vec{r}\,')\cdot dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}+\frac{1}{c}\int\limits_{S'}\frac{\vec{i}\,'(\vec{r}\,')\cdot dS'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$.

Здесь в правой части равенства обычно отлично от нуля только второе слагаемое, так как связанные токи обычно протекают только по поверхности магнетика.

Можно считать, что вещества нет, а магнитные диполи висят в вакууме, тогда

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\left[\vec{m},\vec{r}\right]}{r^3} \qquad => \qquad \vec{A}\left(\vec{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V'}\frac{\left[\vec{M}\left(\vec{r}\,'\right),\vec{r}-\vec{r}\,'\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}dV'$$

В системе СГС Гаусса $\vec{A}=\frac{[\vec{m},\vec{r}]}{r^3}$ и $\vec{A}(\vec{r})=\int\limits_{V'}\frac{\left[\vec{M}(\vec{r}\,'),\vec{r}-\vec{r}\,'\right]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dV'$.

Факультативная вставка.

Интегралы для векторного потенциала, как и для потенциала, создаваемого поляризованным диэлектриком, содержат интегрируемую особую точку $\vec{r}-\vec{r}\,'=0$. Особенность интегрируемая, так как ее можно устранить заменой переменной интегрирования $\vec{r}\,'$ на $\vec{r}_0=\vec{r}\,'-\vec{r}$.

Конец факультативной вставки.

Два способа вычисления магнитного поля *B*, создаваемого намагниченной средой.

Первый способ. Можно считать, что вещества нет, а связанные токи висят в вакууме, тогда

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\left[\vec{j},\vec{r}\right]}{r^3}\cdot dV \qquad =>$$

$$\vec{B}\left(\vec{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V'}\frac{\left[\vec{j}'\left(\vec{r}'\right),\vec{r}-\vec{r}'\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{S'}\frac{\left[\vec{i}'\left(\vec{r}'\right),\vec{r}-\vec{r}'\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dS'$$

В системе СГС Гаусса $d\vec{B}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\left[\vec{j},\vec{r}\right]}{r^3}\cdot dV$ и $\vec{B}\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{c}\int\limits_{V'}\frac{\left[\vec{j}'\left(\vec{r}'\right),\vec{r}-\vec{r}'\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dV'+\frac{1}{c}\oint\limits_{S'}\frac{\left[\vec{i}'\left(\vec{r}'\right),\vec{r}-\vec{r}'\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dS'$.

Здесь отличен от нуля обычно только второй интеграл, так как связанные токи обычно протекают только по поверхности магнетика. Второй интеграл имеет неинтегрируемую особую точку, если точка вычисления магнитного поля находится на поверхности со связанными токами. На такой поверхности поле $\vec{B}$ испытывает скачок и не имеет определенного значения.

Второй способ. Можно считать, что вещества нет, а магнитные диполи висят в вакууме, тогда

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{3\frac{\left(\vec{m},\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{m}}{r^3}+\frac{8}{3}\pi\vec{m}\delta\left(\vec{r}\right)\right\} \qquad =>$$

$$\vec{B}\left(\vec{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V'}\left\{3\frac{\left(\vec{M}\left(\vec{r}'\right),\vec{r}-\vec{r}'\right)\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^5}-\frac{\vec{M}\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\right\}dV'+\frac{2\mu_0}{3}\vec{M}\left(\vec{r}\right)$$

Здесь интегралы нужно понимать в смысле главного значения. Подробнее смотрите аналогичный вопрос для электрического поля.

$$\vec{H}\left(\vec{r}\right)=\frac{\vec{B}\left(\vec{r}\right)}{\mu_0}-\vec{M}\left(\vec{r}\right)$$

В системе СГС Гаусса:

$\vec{B}=3\frac{\left(\vec{m},\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{m}}{r^3}+\frac{8}{3}\pi\vec{m}\delta\left(\vec{r}\right)$, $\vec{B}\left(\vec{r}\right)=\int\limits_{V'}\left\{3\frac{\left(\vec{M}\left(\vec{r}'\right),\vec{r}-\vec{r}'\right)\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^5}-\frac{\vec{M}\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\right\}dV'+\frac{8\pi}{3}\vec{M}\left(\vec{r}\right)$ и $\vec{H}\left(\vec{r}\right)=\vec{B}\left(\vec{r}\right)-4\pi\vec{M}\left(\vec{r}\right)$.

Третий способ вычисления магнитного поля намагниченной среды.

Третий способ вычисления магнитного поля — найти напряженность магнитного поля $\vec{H}$ магнитных зарядов, которых на самом деле нет.

Магнитное поле, создаваемое намагниченной средой, во всех отношениях такое, как будто оно создано магнитными зарядами.

По аналогии с электрическим полем можно построить и теорию магнитного поля:

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad => \qquad \vec{H}=\frac{q_m}{4\pi}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{p}=q\vec{l} \qquad => \qquad \vec{m}=q_m\vec{l}$$

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \qquad => \qquad \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \qquad => \qquad M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad => \qquad \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right)$$

В системе СГС Гаусса:

$$\vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad => \qquad \vec{H} = q_m \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{p} = q\vec{l} \qquad => \qquad \vec{m} = q_m \vec{l}$$

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \qquad => \qquad \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \qquad => \qquad M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \qquad => \qquad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$$

На самом деле магнитное поле создается токами, а не зарядами, именно поэтому при усреднении внутриатомного магнитного поля получается поле $\vec{B}$, а не поле $\vec{H}$.

Третий способ вычисления магнитного поля $\vec{B}$ имеет следующий алгоритм: $\vec{M} \to \sigma'_m \to \vec{H} \to \vec{B}$.

Здесь $M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m$ аналогично $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$ для диэлектриков.

$$\vec{H}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \sigma'_m \left(\vec{r}\,'\right) \cdot dS'$$

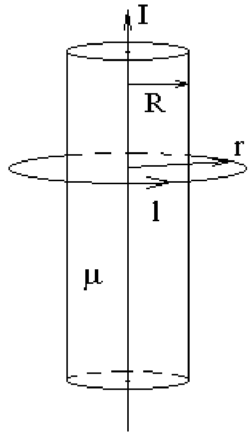
$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right).$$

<u>Примеры решения задач с магнетиками.</u>

<u>1. Магнитное поле длинного провода с током в цилиндрической оболочке из магнитного материала.</u>

$$\vec{B} = \vec{B}_\varphi + \vec{B}_r + \vec{B}_z$$

$$H_\varphi = ?$$



$$\begin{cases} \oint\limits_l H_l dl = I \\ H_l = H_\varphi \end{cases} \quad => \quad H_\varphi l = I \quad => \quad 2\pi r H_\varphi = I \quad =>$$

$H_\varphi = \dfrac{I}{2\pi r}$. Тогда с учетом $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ получим

$B_\varphi = \dfrac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}$ при $r < R$ и $B_\varphi = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ при $r > R$

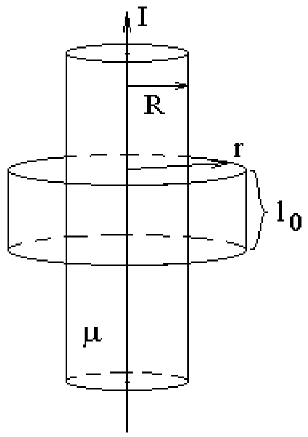
В системе СГС Гаусса $H_\varphi = \frac{2I}{cr}$, $B_\varphi = \frac{2\mu I}{cr}$ при $r<R$ и $B_\varphi = \frac{2I}{cr}$ при $r>R$.

Факультативная вставка.

Докажем, что двух других составляющих магнитного поля нет.

$B_r = ?$

Рассмотрим поток поля $\vec{B}$ через поверхность цилиндра, положение которого соответствует симметрии задачи.



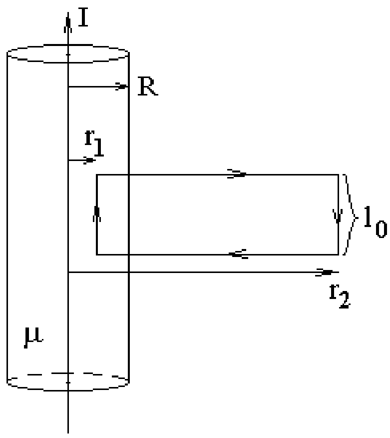
Поток поля $\vec{B}$ может создавать только составляющая B_r. Эта составляющая может создать поток только через боковую поверхность цилиндра. Тогда

$\Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r S = 2\pi r l_0 B_r$

Поток поля $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю $\Phi_B = 0$, следовательно, $B_r = 0$.

$H_z = ?$

Рассмотрим циркуляцию поля $\vec{H}$ по прямоугольному контуру, в плоскости которого лежит провод с током.



$$\oint_l H_l dl = I$$

Правая часть равенства равна нулю, так как нет токов проводимости, пронизывающих контур интегрирования.

В левую часть равенства в циркуляцию магнитного поля дают вклад только вертикальные отрезки контура, так как горизонтальные отрезки направлены радиально, а радиальная составляющая магнитного поля равна нулю $B_r = 0$.

Вклад в циркуляцию на вертикальном отрезке равен произведению вертикальной составляющей магнитного поля на длину вертикального отрезка l_0. На левом вертикальном отрезке $H_l = H_z$, а на правом отрезке $H_l = -H_z$. Тогда

$$\oint_l H_l dl = I \quad \Rightarrow \quad H_l(r_1)\cdot l_0 + H_l(r_2)\cdot l_0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$H_z(r_1)\cdot l_0 - H_z(r_2)\cdot l_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_z(r) = const$$

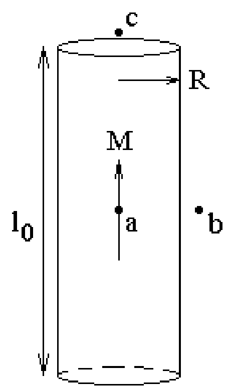
Но $H_z(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$, тогда $H_z(r) = 0$ =>

$B_z = 0$.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

<u>2. Магнитное поле длинного намагниченного цилиндра в трех характерных точках.</u>

Пусть длинный цилиндр намагничен вдоль оси. Найдем магнитное поле в точках a, b, c:

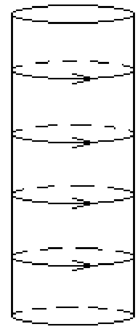


Здесь точка a находится в центре цилиндра, точка b — у боковой поверхности цилиндра в середине его высоты, точка c — непосредственно над серединой торца цилиндра.

В этих трех точках найдем магнитное поле связанных токов.

Можно считать, что есть только связанные токи, а материала магнетика нет, что токи висят в вакууме. Найдем магнитное поле токов.

Связанные токи текут по поверхности цилиндра вокруг вектора намагниченности по правилу правого винта.



Из симметрии задачи следует, что магнитное поле в этих трех точках направлено вдоль оси цилиндра. Для каждой малой площадки с током составляющая вдоль оси цилиндра перпендикулярна току и перпендикулярна нормали к поверхности, по которой течет ток. Следовательно,

$B = B_z = B_\perp = \dfrac{\mu_0}{4\pi} i'\Omega = \dfrac{\mu_0}{4\pi} M\Omega$, где Ω — телесный угол, под которым из точки наблюдения поля видна поверхность с током. Последнее равенство в цепочке определяется равенством $M_\tau = i'$, которое следует из граничных условий для намагниченности $M_{2\tau} - M_{1\tau} = i'$.

Для определения величины магнитного поля B в рассматриваемых трех точках достаточно найти телесный угол Ω, под которым поверхность с током видна из точки наблюдения магнитного поля.

Для точки a телесный угол Ω — это полный телесный угол 4π минус два телесных угла, под каждым из которых видно одно донышко цилиндра из его середины. Этот телесный угол равен отношению площади донышка к квадрату расстояния от точки наблюдения до донышка. Тогда:

$$B_a = \frac{\mu_0}{4\pi} M\Omega_a \approx \frac{\mu_0}{4\pi} M \cdot \left(4\pi - 2\frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} \right) = \left(1 - \frac{2R^2}{l_0^2}\right)\mu_0 M$$

$$H_a = \frac{B_a}{\mu_0} - M \approx -\frac{2R^2}{l_0^2} M .$$

В системе СГС Гаусса $B_a \approx M\left(4\pi - 2\dfrac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} \right)$ и $H_a = B_a - 4\pi M \approx -2\dfrac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} M$.