Силы, действующие на линейный магнетик в магнитном поле.

Аналогично объемной плотности сил в диэлектрике

$$\vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{\nabla}\left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right)_T \tau E^2\right) - \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\vec{\nabla}\varepsilon$$

можно доказать формулу для объемной плотности сил в намагниченной среде

$$\vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{\mu_0}{2}\vec{\nabla}\left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial \tau}\right)_T \tau H^2\right) - \frac{\mu_0 H^2}{2}\vec{\nabla}\mu,$$ где τ — плотность среды.

Приближенному выражению для силы в электрическом поле

$$\vec{f} \approx \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{2}\vec{\nabla}\left(E^2\right)$$

соответствует аналогичное выражение для силы в магнитном поле

$$\vec{f} \approx \frac{\mu_0(\mu - 1)}{2}\vec{\nabla}\left(H^2\right).$$

Из формулы $\vec{f} \approx \frac{\mu_0(\mu - 1)}{2}\vec{\nabla}\left(H^2\right)$ видно, что ферромагнетики втягиваются в магнитное поле, так как для них $\mu >> 1$. Чуть втягиваются в магнитное поле парамагнетики $\mu > 1$, и чуть выталкиваются диамагнетики $\mu < 1$.

В системе СГС Гаусса:

$$\vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{1}{8\pi}\vec{\nabla}\left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right)_T \tau E^2\right) - \frac{E^2}{8\pi}\vec{\nabla}\varepsilon \qquad \vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{1}{8\pi}\vec{\nabla}\left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial \tau}\right)_T \tau H^2\right) - \frac{H^2}{8\pi}\vec{\nabla}\mu$$

$$\vec{f} \approx \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\vec{\nabla}\left(E^2\right) \qquad \vec{f} \approx \frac{\mu - 1}{8\pi}\vec{\nabla}\left(H^2\right)$$

Силы, действующие на постоянный магнит в магнитном поле.

Намагниченность однозначно определяет связанные токи на поверхности магнита: $M_\tau = i'$.

На связанные токи в магнитном поле действует сила Ампера $d\vec{F} = I'\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$. Эти силы и представляют собой силы, действующие на постоянный магнит в магнитном поле. Во многих случаях нас не интересуют внутренние силы между связанными токами одного твердого тела, так как они уравновешены упругими силами внутри твердого тела. Тогда достаточно учесть силы Ампера со стороны внешнего магнитного поля $d\vec{F} = I'\left[d\vec{l}, \vec{B}_{внешнее}\right]$.

Другой и, как правило, наиболее простой способ найти силы, действующие на постоянный магнит в магнитном поле, состоит в том, чтобы найти силы, действующие на магнитные заряды, которых на самом деле нет.

Сила, действующая на заряд, равна произведению величины заряда на напряженность поля. Если не учитывать внутренние силы, то $\mu_0 \vec{H}_{внешнее} = \vec{B}_{внешнее}$:

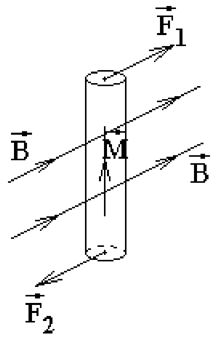
$$\vec{F} = \mu_0 q'_m \vec{H}_{внешнее} = \mu_0 M_n S \vec{H}_{внешнее} = M_n S \vec{B}_{внешнее}.$$

Здесь M_n — нормальная составляющая намагниченности; S — площадь участка поверхности магнита. Здесь можно рассматривать магнитное поле не только внешнее по отношению к магнитному заряду, но и ко всему магниту, если внутренние силы между магнитными зарядами нас не интересуют.

Рассмотрим два примера сил, действующих на намагниченную среду.

Пример 1. Силы, действующие на стрелку компаса.

Пусть для простоты стрелка имеет форму длинного цилиндра.

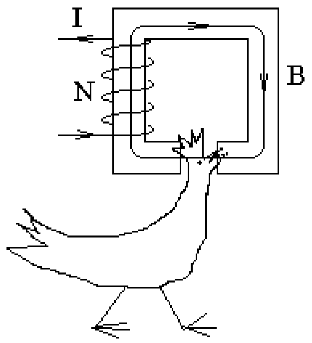


Здесь $\vec{F}_1 = \mu_0 q'_m \vec{H} = \mu_0 M S \vec{H} = M S \vec{B}$, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

Стрелка стремится повернуться по полю.

Пример 2.

Голова петуха в магнитном поле.



<u>Квазистационарное электромагнитное поле.</u>
<u>Закон электромагнитной индукции Фарадея.</u>

$\mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$ — закон электромагнитной индукции Фарадея. При изменении потока Φ_B магнитного поля $\vec{B}$ через контур в контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_{инд}$.

В системе СГС Гаусса: $\mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{d\Phi_B}{dt}$.

ЭДС возникает, если поток Φ_B изменяется по любым причинам. ЭДС возникает, если контур перемещается, поворачивается, деформируется, и если контур неподвижен, а поток Φ_B изменяется за счет изменения магнитного поля $\vec{B}$.

Половину закона можно доказать. Пусть поле $\vec{B}$ не зависит от времени, а контур перемещается, поворачивается или деформируется. При перемещении элемента контура свободные заряды проводника перемещаются вместе с ним. На движущиеся заряды в магнитном поле действует сила Лоренца.

Пусть $d\vec{l}\,'$ — отрезок вдоль контура или элемент контура, пусть $d\vec{l}$ — перемещение отрезка $d\vec{l}\,'$. И пусть для простоты $d\vec{l} \perp d\vec{l}\,'$ и $\vec{B} \perp d\vec{l}\,'$. Тогда сила Лоренца направлена вдоль проводника $\vec{F}_L = q\left[\vec{V},\vec{B}\right] = q\left[\frac{d\vec{l}}{dt},\vec{B}\right] \parallel d\vec{l}\,'$. Если рассматривать эту силу как стороннюю, то интеграл по контуру от напряженности этой силы равен ЭДС — ЭДС индукции.

Рассмотрим то же самое количественно.

Пусть теперь поле $\vec{B}$ и перемещение $d\vec{l}$ произвольно ориентированы относительно элемента контура $d\vec{l}\,'$.

$$\vec{E}_{стор} \equiv \frac{\vec{F}_{стор}}{q} = \frac{\vec{F}_L}{q} = \frac{q\left[\vec{V},\vec{B}\right]}{q} = \left[\vec{V},\vec{B}\right] \qquad =>$$

$$\mathcal{E}_{инд} = \mathcal{E} \equiv \oint_{l'}\left(\vec{E}_{стор},d\vec{l}\,'\right) = \oint_{l'}\left(\left[\vec{V},\vec{B}\right],d\vec{l}\,'\right)$$

Здесь $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ — скорость движения свободных зарядов, $\vec{V}_1$ — скорость движения проводника, $\vec{V}_2$ — скорость движения зарядов относительно проводника. Хаотическая тепловая скорость движения зарядов относительно проводника в среднем равна нулю и не дает вклад в ЭДС индукции $\mathcal{E}_{инд}$. Поэтому в качестве $\vec{V}_2$ будем учитывать только дрейфовую составляющую скорости зарядов относительно проводника. Эта дрейфовая скорость направлена вдоль проводника $\vec{V}_2 \parallel d\vec{l}\,'$, тогда

$$\left[\vec{V}_2,\vec{B}\right] \perp \vec{V}_2 \parallel d\vec{l}\,' \qquad => \qquad \left(\left[\vec{V}_2,B\right],d\vec{l}\,'\right) = 0 \qquad =>$$

дрейфовая скорость $\vec{V}_2$ тоже не дает вклад в ЭДС индукции. Следовательно,

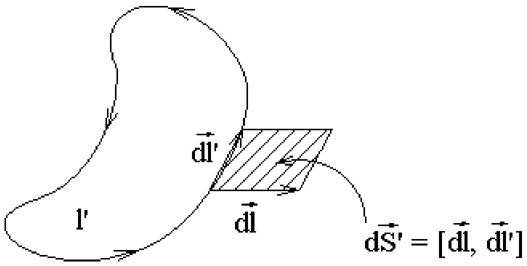
$$\mathcal{E}_{инд} = \oint_{l'}\left(\left[\vec{V}_1,\vec{B}\right],d\vec{l}\,'\right).$$

Подставим сюда $\vec{V}_1 = \frac{d\vec{l}}{dt}$, где $d\vec{l}$ — перемещение элемента контура $d\vec{l}\,'$.

$$\mathcal{E}_{инд} = \oint_{l'}\left(\left[\frac{d\vec{l}}{dt},\vec{B}\right],d\vec{l}\,'\right) = \frac{1}{dt}\oint_{l'}\left(\left[d\vec{l},\vec{B}\right],d\vec{l}\,'\right) = \frac{1}{dt}\oint_{l'}\left(\left[d\vec{l}\,',d\vec{l}\right],\vec{B}\right).$$

Здесь в последнем равенстве сделана циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно–векторном произведении, которая не изменяет его величину.

$\left[d\vec{l}\,',d\vec{l}\right] = -d\vec{S}\,'$, так как



$$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{1}{dt}\oint_{l'}\left(\vec{B}, d\vec{S}'\right)$$

С учетом того, что $d\Phi_B = \left(\vec{B}, d\vec{S}'\right)$, получим

$$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{1}{dt}\oint_{l'} d\Phi_B .$$

Здесь сумма изменений потока магнитного поля для каждого из элементов контура равна изменению потока магнитного поля для всего контура:

$\oint_{l'} d\Phi_B = d\Phi_B$, тогда

$\mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$ — одна половина закона Фарадея доказана.

Вторую половину закона при неподвижном контуре и переменном магнитном поле мы доказать не можем. Вторая половина — опытный факт, поэтому — закон Фарадея, а не теорема.

Парадокс.

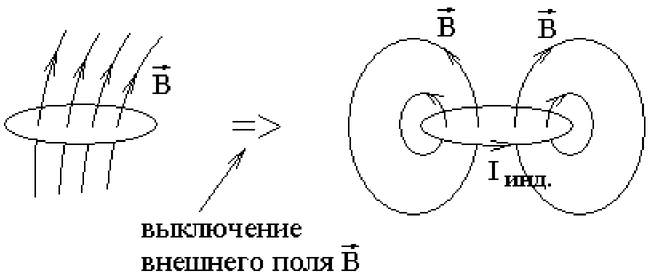
По теореме о потоке магнитного поля $\Phi_B = 0$ => $\mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} = 0$ — ЭДС индукции всегда равна нулю, то есть никакой ЭДС индукции не бывает?

Разрешение парадокса в том, что в теореме о потоке магнитного поля поток равен нулю $\Phi_B = 0$ только для замкнутой поверхности. А в выражении для ЭДС индукции рассматривается поток магнитного поля через незамкнутую поверхность, опирающуюся краями на контур, в котором возникает ЭДС индукции. Этот поток может быть отличен от нуля и не зависит от формы поверхности, которая опирается на контур, что следует из равенства потока нулю для замкнутой поверхности.

Правило Ленца.

Индукционный ток имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, вызывающей индукционный ток.

В частности, при выключении магнитного поля в проводящем контуре возникает ток индукции, который стремится сохранить поток Φ_B.



Интерпретация Максвелла половины закона электромагнитной индукции Фарадея.

Максвелл предположил, что изменение магнитного поля вызывает появление вихревого электрического поля, и это поле приводит к появлению $\mathcal{E}_{инд}$.

Рассмотрим два выражения для ЭДС индукции.

С одной стороны:

$$\mathcal{E}_{инд} \equiv \oint_l \left(\vec{E}_{стор}, d\vec{l}\right) = \oint_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right),$$

где по предположению Максвелла $\vec{E}_{стор} = \vec{E}$. По теореме Стокса $\oint_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \int_S \left(rot\left(\vec{E}\right), d\vec{S}\right)$, тогда

$$\mathcal{E}_{инд} = \int_S \left(rot\left(\vec{E}\right), d\vec{S}\right).$$

С другой стороны по закону Фарадея

$$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t}.$$

Здесь полная производная по времени заменена частной, чтобы подчеркнуть неподвижность контура, неизменность его пространственных координат. Тогда

$$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_B = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S d\Phi_B = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int_S \left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, d\vec{S}\right).$$

Приравняем два выражения для ЭДС индукции и получим

$$\int_S \left(rot\left(\vec{E}\right), d\vec{S}\right) = \int_S \left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, d\vec{S}\right) \quad => \quad \int_S \left(rot\left(\vec{E}\right)\right)_n dS = \int_S \left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_n dS,$$

где S — любая поверхность.

Пусть S — маленькая площадка, тогда можно заменить интеграл одним слагаемым. Заменим в левой и правой части последнего равенства и получим

$$\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)_n \cdot S = \left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_n \cdot S \qquad => \qquad \left(rot\left(\vec{E}\right)\right)_n = \left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_n$$

для проекции на любое направление $\vec{n}$. Следовательно,

$$rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

Это математическая формулировка интерпретации Максвелла второй половины закона электромагнитной индукции Фарадея.

В системе СГС Гаусса $rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\neq 0$ — это только первый шаг к рассмотрению переменных электромагнитных полей. Второй шаг (токи смещения) сделаем позднее.

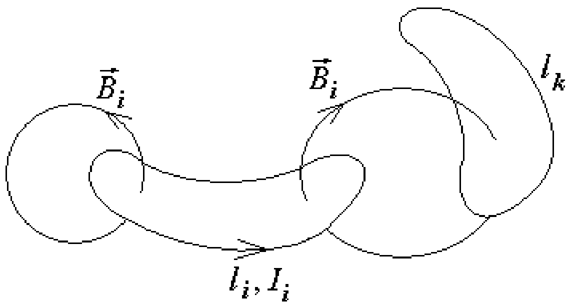
В электростатике $rot\left(\vec{E}\right)=0$. Для переменных полей $rot\left(\vec{E}\right)\neq 0$ и поле $\vec{E}$ — вихревое, не потенциальное поле.

Коэффициент взаимной индукции.

(в присутствии линейных магнетиков)

Линейность магнетика означает, что связь между векторами $\vec{B}$ и $\vec{H}$ линейна: $\vec{B}=\mu_0\mu\vec{H}$.

Рассмотрим систему контуров и два контура из этой системы l_i и l_k.



Пусть в контуре l_i протекает ток I_i. Ток создает магнитное поле $\vec{B}_i$. Это поле пронизывает контур l_k.

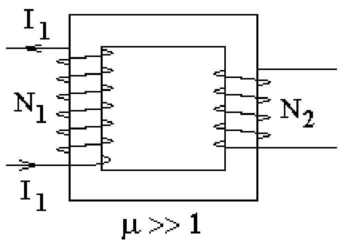
Пусть Φ_{ki} — поток магнитного поля $\vec{B}_i$ через контур l_k.

$\Phi_{ki}\sim B_i\sim I_i$ =>

$\Phi_{ki}=L_{ki}I_i$ — определение коэффициента взаимной индукции L_{ki}.

В системе СГС Гаусса: $\Phi_{ki}=L_{ki}\frac{I_i}{c}$.

Коэффициент взаимной индукции двух катушек на общем сердечнике при $\mu>>1$.



Найдем коэффициент взаимной индукции L_{21}.

Схема решения задачи: $I_1 \to H_1 \to B_1 \to \Phi_{21} \to L_{21}$.

Коэффициент взаимной индукции L_{21} не зависит от величин токов в обеих обмотках.

Пусть в первичной обмотке протекает ток I_1. Будем считать, что во вторичной обмотке тока нет. В линейном магнетике каждый ток создает свое магнитное поле независимо от других токов. Нас интересует магнитное поле, создаваемое только током I_1.

Рассмотрим теорему о циркуляции напряженности магнитного поля

$$\oint_l H_l dl = I$$

для контура интегрирования вдоль оси сердечника. Поле H во всех сечениях сердечника примерно одинаково и направлено по оси сердечника, поэтому для сердечника длиной l получим:

$$Hl = N_1 I_1 \quad => \quad H = \frac{N_1 I_1}{l} \quad => \quad B = \mu_0 \mu H = \frac{\mu_0 \mu N_1 I_1}{l}$$

Поток магнитного поля через поперечное сечение сердечника $\Phi = BS$ равен потоку через один виток любой обмотки. Тогда поток через вторичную обмотку:

$$\Phi_{21} = BS \cdot N_2 = \frac{\mu_0 \mu N_1 I_1}{l} S \cdot N_2 = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 S}{l} I_1 .$$

С учетом определения коэффициента взаимной индукции $\Phi_{21} = L_{21} I_1$ получим

$$L_{21} = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 S}{l}$$

Заметим, что $L_{21} = L_{12}$.

В системе СГС Гаусса: $\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I$ $\quad B = \mu H \quad \Phi_{21} = L_{21} \frac{I_1}{c} \quad L_{21} = \frac{4\pi\mu N_1 N_2 S}{l}$

Теорема о равенстве коэффициентов взаимной индукции.

(теорема о взаимности)

$$L_{ki} = L_{ik}$$

Докажем это равенство только для токов в вакууме без магнетиков, хотя это равенство справедливо и в присутствии линейных магнитных сред. Заметим, что равенство $C_{ki} = C_{ik}$ тоже называют теоремой о взаимности.

Выразим поток поля $\vec{B}$ через векторный потенциал $\vec{A}$.

$$\Phi_B = \int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$$

Подставим сюда $\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right)$ и получим

$$\Phi_B = \int_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S} \right).$$

По теореме Стокса $\int_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S} \right) = \oint_l \left(\vec{A}, d\vec{l} \right)$, тогда

$$\Phi_B = \oint_l \left(\vec{A}, d\vec{l} \right),$$

где l — контур, ограничивающий площадку S, через которую проходит поток Φ_B.

Рассмотрим теперь поток Φ_{ki} магнитного поля, который создает ток в i-ом контуре через k-ый контур

$$\Phi_{ki} = \oint_{l_k} \left(\vec{A}_i, d\vec{l}_k \right).$$

Подставим сюда определение векторного потенциала $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l}}{r}$ и получим

$$\Phi_{ki} = \oint_{l_k} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_i} \frac{I_i d\vec{l}_i}{\left| \vec{r}_k - \vec{r}_i \right|}, d\vec{l}_k \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_i \oint_{l_k} \oint_{l_i} \frac{\left(d\vec{l}_i, d\vec{l}_k \right)}{\left| \vec{r}_k - \vec{r}_i \right|} = L_{ki} I_i \qquad =>$$

$$L_{ki} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_k} \oint_{l_i} \frac{\left(d\vec{l}_i, d\vec{l}_k \right)}{\left| \vec{r}_k - \vec{r}_i \right|}.$$

При перестановке индексов $i \leftrightarrow k$ правая часть равенства не изменяется, следовательно, не изменяется и левая часть. То есть $L_{ki} = L_{ik}$, что и требовалось доказать.

В системе СГС Гаусса $L_{ki} = \oint_{l_k} \oint_{l_i} \frac{\left(d\vec{l}_i, d\vec{l}_k \right)}{\left| \vec{r}_k - \vec{r}_i \right|}$.

Факультативная вставка.

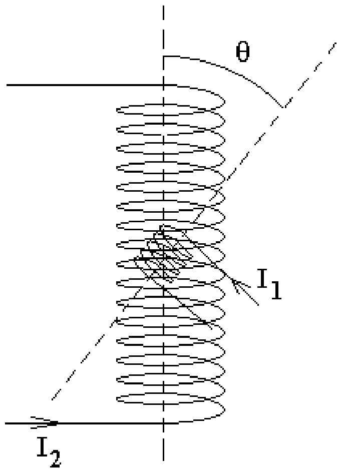
Я не знаю, как доказать равенство $L_{ki} = L_{ik}$ при наличии намагниченных сред. Доказательство аналогичное доказательству равенства $C_{ki} = C_{ik}$ через энергию магнитного взаимодействия системы токов не проходит, так как само выражение для энергии получается с использованием равенства $L_{ki} = L_{ik}$.

Если теорему о равенстве коэффициентов взаимной индукции при наличии магнитных сред доказать невозможно, то равенство можно предположить. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом. Следовательно, предположение справедливо.

Конец факультативной вставки.

Пример решения задачи с помощью теоремы о взаимности.

Пусть в большой и длинной катушке находится маленькая катушка, параметры катушек заданы, и пусть θ — угол между осями катушек. Пусть в маленькой катушке течет ток I_1. Нужно найти поток магнитного поля через большую катушку, $\Phi_{21} = ?$.



Если предварительно найти L_{21}, то поток Φ_{21} можно найти по формуле $\Phi_{21} = L_{21} I_1$. Коэффициент взаимной индукции L_{21} можно найти с помощью теоремы о взаимности $L_{21} = L_{12}$.

И действительно. Рассмотрим другую задачу с этими же двумя катушками. Пусть ток I_2 протекает по большой катушке, а не по малой, как в настоящей задаче. Найдем в этой второй задаче поток магнитного поля через малую катушку.

В большой катушке магнитное поле однородное

$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 \Omega = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 4\pi = \mu_0 i_2 = \mu_0 n_2 I_2$. Поток магнитного поля через один виток маленькой катушки равен $\Phi = BS \cdot \cos(\theta)$, тогда поток через всю маленькую катушку

$\Phi_{12} = N_1 \cdot B_2 S_1 \cdot \cos(\theta) = N_1 \cdot \mu_0 n_2 I_2 \cdot S_1 \cdot \cos(\theta) = L_{12} I_2$ =>

$L_{12} = \mu_0 N_1 n_2 S_1 \cos(\theta)$.

Возвращаясь к исходной задаче, получим

$\Phi_{21} = L_{21} I_1 = L_{12} I_1 = \mu_0 N_1 n_2 S_1 \cos(\theta) \cdot I_1$, где N_1 — число витков в малой катушке, n_2 — число витков на единице длины большой катушки, S_1 — площадь сечения малой катушки, θ — угол между осями двух катушек.

В системе СГС Гаусса для потока $\mu_0 \to \frac{4\pi}{c}$ и $\Phi_{21} = 4\pi S_1 N_1 n_2 \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{I_1}{c}$.

Индуктивность или коэффициент самоиндукции.

По аналогии с определением коэффициента взаимной индукции $\Phi_{ki} = L_{ki} I_i$ можно ввести коэффициент самоиндукции $\Phi_{ii} = L_{ii} I_i$. В этом равенстве рассматривается один i-й контур, поэтому индекс i можно опустить. Присутствие других контуров не влияет на величину коэффициента L_{ii}. Тогда

$\Phi = LI$ — определение индуктивности L или коэффициента самоиндукции. Нужно знать эту формулу к экзамену, хотя весь вопрос факультативный.

Данное определение индуктивности нестрогое.

Определение нестрогое, так как в большинстве задач непонятно, как именно проходит контур, через который нужно вычислять поток в определении индуктивности. Проблема в том, что если провод тонкий, то индуктивность бесконечна, а если провод толстый, то непонятно, как провести контур, через который нужно вычислять поток магнитного поля. Контур проходит не совсем по оси провода. Например, попробуйте найти индуктивность, которая приходится на единицу длины коаксиального кабеля, если радиус центральной жилы кабеля нельзя считать нулевым. Как провести контур для расчета индуктивности?