Гипотеза Максвелла о токах смещения.

Не путайте токи смещения со связанными токами намагниченных сред.

Рассмотрим дивергенцию равенства $rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j}$.

Дивергенция левой части равенства равна нулю:

$$div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right) = \left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]\right) = \left(\vec{H},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right) = 0.$$

Дивергенция правой части равенства $rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j}$

$$div\left(\vec{j}\right) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

не равна нулю при $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$.

Чтобы обобщить равенство $rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j}$ на случай $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$ можно предположить, что

$rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \vec{X}$, где $\vec{X}$ — необходимая поправка к уравнению магнитостатики.

$rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \vec{X}$ =>

$0 = div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right) = div\left(\vec{j} + \vec{X}\right) = div\left(\vec{j}\right) + div\left(\vec{X}\right)$ =>

$$div\left(\vec{X}\right) = -div\left(\vec{j}\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Учтем теперь, что $\rho = div\left(\vec{D}\right)$ и получим

$div\left(\vec{X}\right) = \frac{\partial\left(div\left(\vec{D}\right)\right)}{\partial t} = div\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$ =>

$$div\left(\vec{X} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = 0.$$

Из того, что дивергенция некоторого поля равна нулю, вовсе не следует, что само поле равно нулю. Например, $div\left(\vec{B}\right) = 0$ не означает равенства нулю магнитного поля $\vec{B}$.

Максвелл сделал предположение, что $\vec{X} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$ =>

$\vec{X} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, которое не обязательно следует из того, что $div\left(\vec{X}\right) = div\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$.

Таким образом Максвелл получил

$$rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

В системе СГС Гаусса $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$.

Максвелл ввел понятие токов смещения $\vec{j}_{см}\equiv\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, тогда

$$rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\vec{j}_{см}$$

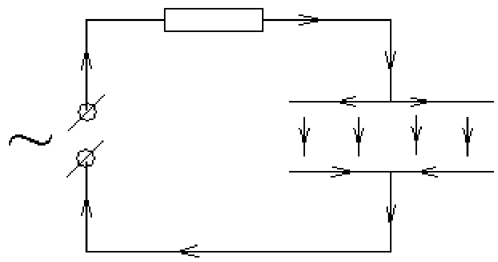
В системе СГС Гаусса $\vec{j}_{см}\equiv\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ и $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}+\vec{j}_{см}\right)$.

Токи смещения, потому что они выражаются через вектор электрического смещения $\vec{D}$. Аналогично $\mathcal{E}_{инд}=-\frac{d\Phi_B}{dt}$ — ЭДС индукции, которая выражается через вектор магнитной индукции $\vec{B}$.

$$\begin{cases} rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\vec{j}_{см} \\ div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \quad div\left(\vec{j}+\vec{j}_{см}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\vec{j}+\vec{j}_{см}}=0$$ —

поток вектора $\vec{j}+\vec{j}_{см}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю. Тогда линии суммы токов проводимости и токов смещения замкнуты (не рвутся).

Например, в следующей схеме линии токов проводимости замыкаются линиями токов смещения внутри конденсатора.



Система уравнений Максвелла.

(основной вопрос курса)

Уравнения Максвелла справедливы для переменных электромагнитных полей.

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=\rho \\ rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

— система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

В системе СГС Гаусса $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$.

Для решения задач обычно удобнее использовать те же уравнения Максвелла только в интегральной форме:

$$\begin{cases} \oint\limits_S\left(\vec{D},d\vec{S}\right)=Q \\ \oint\limits_l E_l dl=-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right) \\ \oint\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=0 \\ \oint\limits_l H_l dl=I+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S\left(\vec{D},d\vec{S}\right) \end{cases}.$$

В системе СГС Гаусса $\begin{cases} \oint\limits_S\left(\vec{D},d\vec{S}\right)=4\pi Q \\ \oint\limits_l E_l dl=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right) \\ \oint\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=0 \\ \oint\limits_l H_l dl=\frac{4\pi}{c}I+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S\left(\vec{D},d\vec{S}\right) \end{cases}$.

Прокомментируем каждое из 4-х уравнений.

Первое из уравнений Максвелла можно записать в виде $\Phi_D=Q$. Для полей независящих от времени — это электростатическая теорема Гаусса. Для переменных полей теорема не может быть доказана, но Максвелл предположил, что равенство остается верным и для переменных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом.

Второе уравнение $rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ — интерпретация Максвелла половины закона электромагнитной индукции Фарадея $\mathcal{E}_{инд}=-\frac{d\Phi_B}{dt}$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Заметим, что закон Фарадея содержит полную производную, а уравнение Максвелла в интегральной форме $\oint\limits_l E_l dl=-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)$ содержит частную производную от потока $\Phi_B=\int\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)$ по времени. Дело в том, что изменение потока при перемещении контура дает вклад в ЭДС индукции $\mathcal{E}_{инд}=\mathcal{E}\equiv\oint\limits_l\left(\vec{E}_{стор},d\vec{l}\right)$ через силы Лоренца $\vec{F}_Л$, которые рассматриваются, как сторонние силы с напряженностью $\vec{E}_{стор} = \dfrac{\vec{F}_Л}{q} = \left[\vec{V}, \vec{B}\right]$, но перемещение контура никак не влияет на циркуляцию $\oint\limits_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$ поля $\vec{E}$, вычисленную в один момент времени. Отличная от нуля циркуляция поля $\vec{E}$ появляется только при изменении магнитного поля $\vec{B}$, поэтому вклад в циркуляцию поля $\vec{E}$ дает только частная производная по времени от потока $\Phi_B = \int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ при неизменных координатах, а изменение потока при перемещении контура не дает вклад в циркуляцию поля $\vec{E}$.

Конец факультативной вставки.

Третье уравнение $\Phi_B = 0$ означает отсутствие магнитных зарядов.

Четвертое уравнение $\oint\limits_l H_l dl = I + \dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right)$ представляет собой теорему о циркуляции поля в магнитостатике дополненное токами смещения Максвелла.

Чтобы решать систему уравнений Максвелла относительно электрического и магнитного полей, нужно дополнить уравнения так называемыми материальными связями

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \end{cases}.$$

Кроме того, заряды и токи связаны уравнением непрерывности

$$div\left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

В некоторых случаях уравнения можно дополнить законом Ома $\vec{j} = \lambda \vec{E}$, если он выполнятся, и если токи не заданы явным образом, например, в пучке электронов в вакууме.

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}.$

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ div\left(\vec{j}\right) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{j} = \lambda \vec{E} \end{cases}.$

Факультативная вставка.

Система уравнений Максвелла избыточна. В ней есть лишние уравнения.

Дело в том, что уравнения $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=\rho \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \end{cases}$ не нужны, так как являются следствием другой пары уравнений $\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$.

И действительно. Рассмотрим дивергенцию от уравнения $rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Дивергенция ротора любого поля равна нулю:

$div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right)=\left(\vec{E},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right)=\left(\vec{E},0\right)=0$, где использовано то, что циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно–векторном произведении $\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right)$ не изменяет его величину. Тогда

$$0=div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=div\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{B}\right) \qquad =>$$

$\dfrac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{B}\right)=0 \qquad => \qquad div\left(\vec{B}\right)=const$ — дивергенция поля $\vec{B}$ в каждой точке пространства не изменяется во времени.

Если когда-то в рассматриваемой области не было магнитного поля $\vec{B}$, то и его дивергенция была равна нулю $div\left(\vec{B}\right)=0$, а затем дивергенция не могла измениться. Следовательно

$$div\left(\vec{B}\right)=0.$$

Аналогично взяв дивергенцию от уравнения $rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ с учетом равенства $div\left(\vec{j}\right)+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$ можно получить, что

$$div\left(\vec{D}\right)=\rho.$$

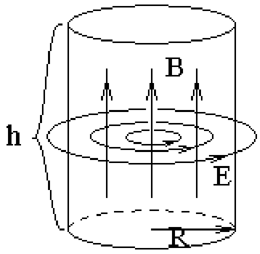
Конец факультативной вставки.

Токи Фуко.

Токи Фуко — это те же токи индукции только в сплошном проводнике, а не в проводящем контуре, как обычные токи индукции.

Рассмотрим проводящий цилиндр в однородном переменном магнитном поле $B=B_0\cdot\cos\left(\omega t\right)$, которое направлено вдоль оси цилиндра.

Переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля



$$rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad <=> \qquad \oint_l E_l dl = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \qquad =>$$

$$E \cdot 2\pi r = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\pi r^2 B\right) \qquad =>$$

$$E = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial\left(B_0 \cdot \cos(\omega t)\right)}{\partial t} = \frac{B_0 \omega}{2} r \sin(\omega t) \qquad =>$$

$$E = \frac{B_0 \omega}{2} r \sin(\omega t).$$

Это электрическое поле вызывает токи Фуко

$$j = \lambda E = \frac{\lambda B_0 \omega}{2} r \sin(\omega t).$$

В системе СГС Гаусса: $j = \lambda E = \frac{\lambda B_0 \omega}{2c} r \sin(\omega t)$.

Интересно рассмотреть среднюю мощность ленц-джоулева тепла, идущего на нагрев цилиндра.

Пусть $\langle \nu \rangle$ — среднее по времени и по объему значение объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла.

$\nu = \left(\vec{j}, \vec{E}\right) = \lambda E^2 = \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{4} r^2 \sin^2(\omega t)$ — объемная плотность мощности в соответствии с законом Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.

Усреднение по времени сомножителя синус в квадрате дает: $\left\langle \sin^2(\omega t) \right\rangle_t = \frac{1}{2}$. И действительно, $\sin$ и $\cos$ отличаются только сдвигом фаз на $\frac{\pi}{2}$, тогда средние значения их квадратов равны, а сумма средних значений квадратов равна единице, так как $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$.

Тогда

$\langle \nu \rangle_t = \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{8} r^2$ — среднее по времени значение объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла. Осталось усреднить эту величину по объему цилиндра.

$$\langle \nu \rangle = \int\limits_V \langle \nu \rangle_t \frac{dV}{V} = \frac{\int\limits_V \langle \nu \rangle_t \, dV}{V}$$

Для вычисления интеграла мысленно разобьем объем цилиндра цилиндрическими поверхностями с близкими радиусами, тогда

$$\int\limits_V \langle \nu \rangle_t \, dV = \int\limits_0^R \langle \nu \rangle_t \cdot h \cdot 2\pi r \, dr = \int\limits_0^R \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{8} r^2 \cdot h \cdot 2\pi r \, dr =$$

$$= \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{4} \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{4} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{16} R^4 \qquad =>$$

$$\langle \nu \rangle = \frac{1}{V} \int\limits_V \langle \nu \rangle_t \, dV = \frac{1}{h \cdot \pi R^2} \cdot \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{16} R^4 = \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{16} R^2 \sim R^2 \qquad =>$$

чем больше радиус цилиндра R, тем сильнее нагрев в единице объема.

Качественно такой результат можно объяснить тем, что в случае большого радиуса цилиндра токам Фуко есть, где разбежаться.

Железный сердечник трансформатора делают наборным из большого числа тонких пластин, чтобы уменьшить потери на нагрев сердечника токами Фуко.

Дело в том, что если в первичную обмотку трансформатора подать переменное напряжение, то в сердечнике возникает переменное магнитное поле и токи Фуко.

В наборном сердечнике им трудно разбежаться.

В системе СГС Гаусса: $\langle \nu \rangle = \frac{\lambda {B_0}^2 \omega^2}{16 c^2} R^2$.

Вектор Пойнтинга.

(вектор Умова — Пойнтинга)

Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии электромагнитного поля или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения энергии.

Энергия в некотором объеме уменьшается, если она вытекает через границу объема.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля в линейной среде равна сумме энергий электрического и магнитного полей:

$$w = \frac{(\vec{D}, \vec{E})}{2} + \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2}.$$

Рассмотрим изменение энергии, например, электрического поля:

$$dw_э = d\left(\frac{(\vec{D}, \vec{E})}{2} \right) = \frac{1}{2} \left\{ (\vec{D}, d\vec{E}) + (\vec{E}, d\vec{D}) \right\}.$$

Два слагаемых в этой сумме одинаковы по величине не только в случае изотропной среды, но даже для анизотропной среды.

Факультативная вставка.

И действительно, для линейного, возможно, анизотропного диэлектрика

$\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E} \qquad => \qquad D_k = \sum_i \varepsilon_{ki} E_i \qquad =>$

$$\left(\vec{D}, d\vec{E}\right) = \sum_k D_k dE_k = \sum_k \left(\sum_i \varepsilon_{ki} E_i\right) dE_k = \sum_{k,i} \varepsilon_{ki} E_i dE_k$$

$$\left(\vec{E}, d\vec{D}\right) = \sum_i E_i dD_i = \sum_i E_i d\left(\sum_k \varepsilon_{ik} E_k\right) = \sum_{k,i} \varepsilon_{ik} E_i dE_k$$

С учетом $\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}$ получаем $\left(\vec{D}, d\vec{E}\right) = \left(\vec{E}, d\vec{D}\right)$.

Конец факультативной вставки.

Тогда

$dw_э = \left(\vec{E}, d\vec{D}\right)$.

Аналогично для энергии магнитного поля $dw_м = \left(\vec{H}, d\vec{B}\right)$.

$dw = \left(\vec{E}, d\vec{D}\right) + \left(\vec{H}, d\vec{B}\right)$ — изменение объемной плотности энергии электромагнитного поля. Эта формула справедлива в более общем случае, чем исходная формула $w = \frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{2} + \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{2}$. Формула $dw = \left(\vec{E}, d\vec{D}\right) + \left(\vec{H}, d\vec{B}\right)$ справедлива и в случае нелинейной зависимости индукции поля от напряженности и в случае гистерезисной зависимости.

Тогда $\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$, куда в правую часть производные по времени можно подставить из уравнений Максвелла

$$\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \qquad =>$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = rot\left(\vec{H}\right) - \vec{j} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -rot\left(\vec{E}\right) \end{cases} \qquad =>$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, rot\left(\vec{H}\right) - \vec{j}\right) + \left(\vec{H}, -rot\left(\vec{E}\right)\right) \qquad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, \vec{j}\right) - \left(\vec{E}, rot\left(\vec{H}\right)\right) + \left(\vec{H}, rot\left(\vec{E}\right)\right) \qquad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{E},\vec{j}\right)-\left(\vec{E},\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{H}}\right]\right)+\left(\vec{H},\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{E}}\right]\right)$$

Здесь подчеркнуты величины, на которые действует оператор дифференцирования $\vec{\nabla}$.

В обоих смешанных скалярно–векторных произведениях сделаем циклические перестановки векторов так, чтобы вектор $\vec{\nabla}$ оказался на первом месте, а затем в первом векторном произведении поменяем местами векторы с изменением знака произведения. Тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+\left(\vec{\nabla},\left[\underline{\vec{E}},\vec{H}\right]\right)+\left(\vec{\nabla},\left[\vec{E},\underline{\vec{H}}\right]\right).$$

Два слагаемых в фигурных скобках можно объединить, как производную от произведения:

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+\left(\vec{\nabla},\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right),$$

где убраны подчеркивания, так как производные берутся от всех величин, которые стоят за знаком производной $\vec{\nabla}$.

Скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на какой-либо другой вектор — это дивергенция другого вектора, тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right).$$

Тогда

$\underline{-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)}$, где $\underline{\vec{S}\equiv\left[\vec{E},\vec{H}\right]}$ — вектор Пойнтинга. Эти два равенства нужно помнить к экзамену.

В системе СГС Гаусса $-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)$ и $\vec{S}\equiv\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$.

Из равенства $-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)$ виден физический смысл вектора Пойнтинга $\vec{S}$. Чтобы его понять рассмотрим объем, в котором нет потерь на ленц-джоулево тепло, то есть $\left(\vec{j},\vec{E}\right)=0$. Тогда получим равенство $\frac{\partial w}{\partial t}+div\left(\vec{S}\right)=0$. Рассмотрим другое, но очень похожее равенство $\frac{\partial \rho}{\partial t}+div\left(\vec{j}\right)=0$. Последнее равенство следует, из закона сохранения заряда. Если объемная плотность заряда уменьшается, то заряд вытекает из объема, так что $\vec{j}$ — плотность потока заряда, то есть заряд, протекающий в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную току заряда. Равенство $\frac{\partial w}{\partial t}+div\left(\vec{S}\right)=0$ с учетом закона сохранения энергии можно прочитать аналогично. Если объемная плотность энергии уменьшается, то энергия вытекает из объема, так что $\vec{S}$ — плотность потока энергии, то есть энергия, протекающая в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную току энергии.

В системе СГС Гаусса: $\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$.

Факультативная вставка.

Равенство $-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{j},\vec{E}\right) + div\left(\vec{S}\right)$ можно уточнить с учетом возможного присутствия батареек или аккумуляторов со сторонними силами с напряженностью $\vec{E}_{стор}$.

Рассмотрим закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме с учетом сторонних сил

$$\nu = \left(\vec{j},\vec{E}+\vec{E}_{стор}\right) \quad => \quad \left(\vec{j},\vec{E}\right) = \nu - \left(\vec{j},\vec{E}_{стор}\right) \quad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \nu - \left(\vec{j},\vec{E}_{стор}\right) + div\left(\vec{S}\right) \quad => \quad \left(\vec{j},\vec{E}_{стор}\right) - \frac{\partial w}{\partial t} = \nu + div\left(\vec{S}\right).$$

Это же уравнение в интегральной форме примет следующий вид

$$\sum_i \mathcal{E}_i I_i - \frac{\partial W}{\partial t} = N + \oint_S \left(\left[\vec{E},\vec{H}\right], d\vec{S}\right),$$

где в единицу времени энергия ЭДС и энергия поля расходуются на нагрев (ленц-джоулево тепло) и вытекает через границу объема. Здесь $\mathcal{E}_i$ — любые другие ЭДС (батарейки, аккумуляторы), кроме ЭДС индукции, работа которых добавляется к уменьшению энергии электромагнитного поля.

Из последней формулы также следует физический смысл вектора Пойнтинга. Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку перпендикулярную направлению движения энергии.

Заметим, что для одного фотона

$$\left.\begin{aligned} W &= mc^2 \\ p &= mc \end{aligned}\right\} \quad => \quad p = \frac{W}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Из двух равенств $\begin{cases} \vec{S} = \left[\vec{E},\vec{H}\right] \\ p = \dfrac{W}{c} \end{cases}$ следует, что

$\frac{\vec{S}}{c} = \frac{1}{c}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ — плотность потока импульса.

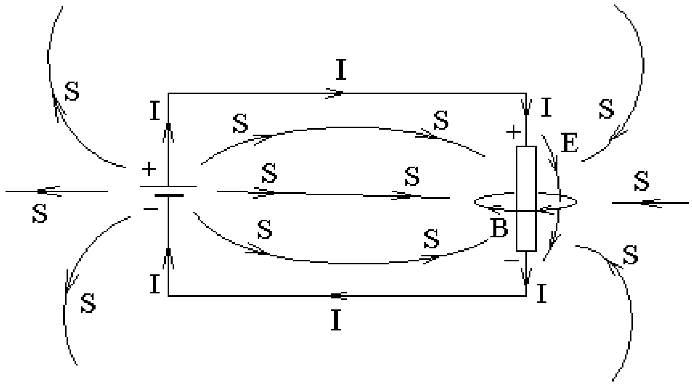
В системе СГС Гаусса $\frac{\vec{S}}{c} = \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$.

Конец факультативной вставки.

Примеры движения энергии электромагнитного поля.

Свет — это частный случай движения электромагнитной энергии, и направление света совпадает с направлением вектора Пойнтинга. Длина волны света мала по сравнению с размерами оптических устройств. В данном же вопросе мы рассмотрим варианты движения электромагнитной энергии, когда длина волны наоборот гораздо больше размеров рассматриваемых устройств.

1. Поле вокруг резистора с током.



$$\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H} \right].$$

Линии поля $\vec{S}$ втекают в резистор со всех сторон, а из батареи ЭДС — вытекают.