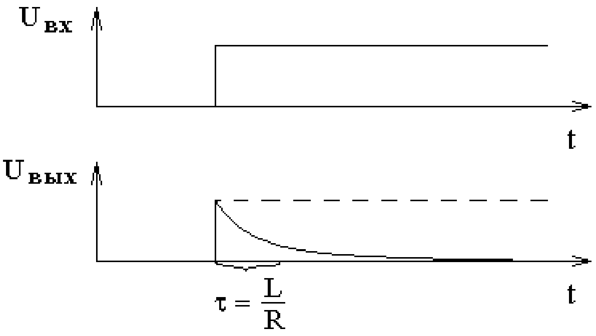
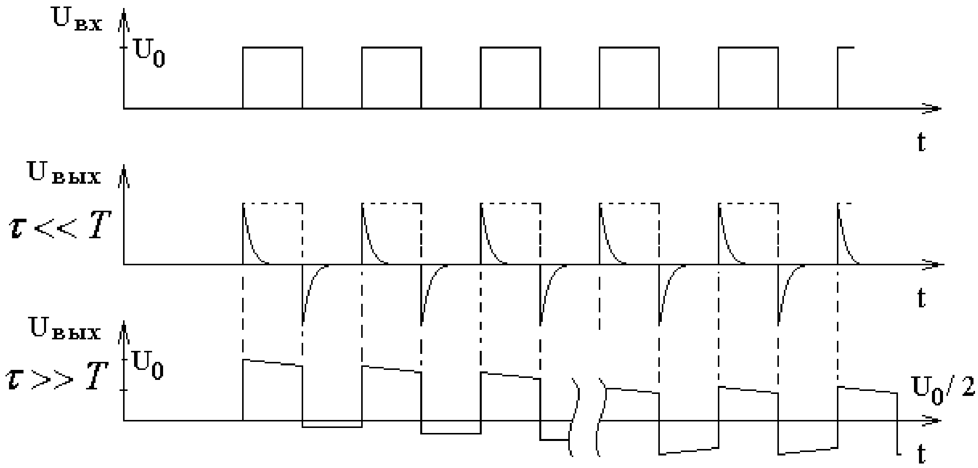
Реакция RL-цепочки на ступеньку напряжения (продолжение).

$$U_{вых} = L\dot{I} = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$



Факультативная вставка.

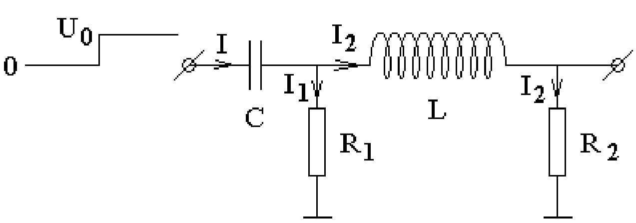
Если на вход схемы подать последовательность прямоугольных импульсов, то



Здесь T — период прямоугольников, $\tau = \dfrac{L}{R}$ — постоянная времени RL-цепочки.

Конец факультативной вставки.

Реакция более сложной схемы на ступеньку напряжения.



На схему в нулевой момент времени подают ступеньку напряжения с амплитудой U_0. Нужно найти напряжение на выходе схемы, как функцию времени.

Для трех неизвестных токов I, I_1, I_2 напишем два уравнения Кирхгофа для контуров и одно уравнение для узла:

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{q}{C} + R_1 I_1 \\ 0 = L\dot{I}_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 \\ I = I_1 + I_2 \end{cases},$$

Здесь I — входной ток схемы, I_1 — сила тока через сопротивление R_1, I_2 — сила тока через катушку индуктивности L и сопротивление R_2.

$I = \dot{q}$, где q — заряд на конденсаторе.

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{q}{C} + R_1 I_1 \\ 0 = L\dot{I}_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 \\ \dot{q} = I_1 + I_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы в ответе получить напряжение на выходе схемы нам понадобиться узнать только ток I_2. Поэтому нам будет удобно выражать и подставлять в другие уравнения другие неизвестные: q и I_1. Переменную I_1 можно выразить из любого из трех уравнений, а переменную q можно выразить только из первого уравнения. Вот и выразим $q = CU_0 - R_1 C I_1$.

Подставим в оставшиеся два уравнения и получим

$$\begin{cases} 0 = L\dot{I}_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 \\ -R_1 C\dot{I}_1 = I_1 + I_2 \end{cases}.$$

Теперь I_1 можно выразить только из нового первого (бывшего второго) уравнения $I_1 = \dfrac{L}{R_1}\dot{I}_2 + \dfrac{R_2}{R_1} I_2$. Тогда получим дифференциальное уравнение для единственной переменной I_2

$$-LC\ddot{I}_2 - R_2 C\dot{I}_2 = \frac{L}{R_1}\dot{I}_2 + \frac{R_2}{R_1} I_2 + I_2 \qquad =>$$

$$\ddot{I}_2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right)\cdot\dot{I}_2 + \frac{R_1 + R_2}{R_1 LC}\cdot I_2 = 0$$

Подставим сюда $I_2 = Ae^{\lambda t}$ и получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right)\lambda + \frac{R_1 + R_2}{R_1 LC} = 0.$$

Два его решения имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right)^2 - \frac{R_1 + R_2}{R_1 L C}}.$$

Общее решение дифференциального уравнения для тока I_2 имеет вид

$$I_2 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Произвольные константы интегрирования A_1 и A_2 можно найти из условий: $\begin{cases} q(0) = 0 \\ I_2(0) = 0 \end{cases}$. Чтобы найти A_1 и A_2 нам нужно знать I_2 и $\dot{I}_2$ в нулевой момент времени. Подставим $q(0) = 0$ в первое уравнение системы (1) и получим $I_1(0) = \frac{U_0}{R_1}$. Подставим это значение и $I_2(0) = 0$ во второе уравнение системы (1) и получим $0 = L\dot{I}_2(0) + 0 - U_0$. Откуда $\dot{I}_2(0) = \frac{U_0}{L}$. Тогда

$$\begin{cases} I_2(0) = 0 \\ \dot{I}_2(0) = \dfrac{U_0}{L} \end{cases}.$$

Подставим в эти условия общее решение $I_2 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$ для I_2 и получим

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \dfrac{U_0}{L} \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{U_0}{L \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)} \\ A_2 = -\dfrac{U_0}{L \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)} \end{cases}$$

Подставим эти значения произвольных констант интегрирования в общее решение $I_2 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$ и получим

$$I_2 = \frac{U_0}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) \quad =>$$

$$U_{вых} = R_2 I_2 = \frac{R_2 U_0}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)$$

Заметим, что $U_{вых}(t)$ — вещественная функция даже при комплексных λ_1 и λ_2, так как в этом случае λ_1 и λ_2 — комплексно сопряженные величины.

Если λ_1 и λ_2 вещественные, то напряжение на выходе схемы — разность двух затухающих экспонент. Если λ_1 и λ_2 комплексные, то напряжение на выходе схемы — произведение затухающей экспоненты на синусоиду.

Реакция произвольной линейной схемы на ступеньку напряжения

(на функцию Хевисайда).

Постановка задачи. Внешний источник подает на схему ступеньку напряжения в нулевой момент времени. Найти токи и напряжения на элементах схемы, как функции времени.

Этапы решения задачи:

1. Внешний источник напряжения рассмотрим, как ЭДС, зависящую от времени.

2. Напишем уравнения Кирхгофа 1-го и 2-го рода, которые окажутся дифференциальными уравнениями для токов.

3. Исключая переменные, перейдем от системы дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению более высокого порядка.

4. Решим это уравнение, а затем через его решение найдем все токи.

5. Зная токи, найдем напряжения на всех элементах схемы.

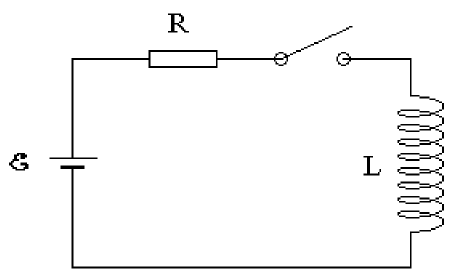
6. Произвольные константы интегрирования обычно можно найти из условий:

$q(0)=0$ для каждого конденсатора, так как заряд конденсатора в нулевой момент времени не может измениться скачком. Такое изменение означало бы бесконечную силу тока.

$I(0)=0$ для каждой катушки индуктивности, так как ток катушки в нулевой момент времени не может измениться скачком. Такое изменение тока означало бы бесконечное напряжение на катушке.

Экстраток размыкания.

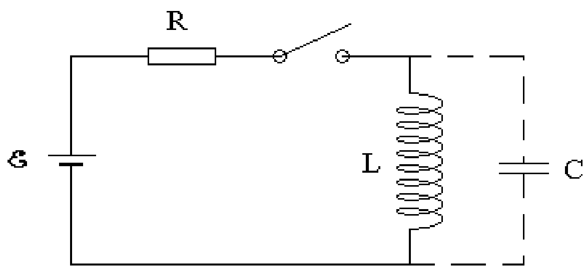
Рассмотрим схему, в которой последовательно включены постоянная ЭДС $\mathcal{E}$, резистор R, ключ и катушка индуктивности L.



Пусть ключ долгое время был замкнут, тогда в цепи установится постоянный ток. Для постоянного тока $\dot{I}=0$ напряжение на индуктивности $U_L = L\dot{I}$ равно нулю, поэтому ток схемы $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$.

При размыкании ключа ток в индуктивности должен скачком измениться до нуля, при этом производная от тока по времени обращается в бесконечность, и на индуктивности возникает бесконечное напряжение $U_L = L\dot{I}$. Это напряжение пробивает ключ. Напряженность пробоя $E_0 = 30$ кВ/см. Ток, возникающий во время пробоя ключа, называют экстратоком размыкания.

Чтобы оценить, при каких условиях наступает пробой ключа в реальной схеме, нужно учесть паразитные емкости между витками катушки индуктивности. Объединяя эти последовательные включенные емкости, можно считать, что параллельно катушке индуктивности включен конденсатор с очень малой емкостью C.



После размыкания ключа в контуре из индуктивности и емкости возникают электрические колебания. В начальный момент в катушке течет ток $I_{\max} = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Напряжение на катушке, как и на конденсаторе почти нулевое. В катушке индуктивности при этом запасена энергия магнитного поля. Ток катушки заряжает конденсатор. При максимальном напряжении на конденсаторе ток равен нулю, и вся энергия превращается в энергию электрического поля конденсатора. Тогда

$$\frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{CU_{\max}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad U_{\max} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_{\max}.$$

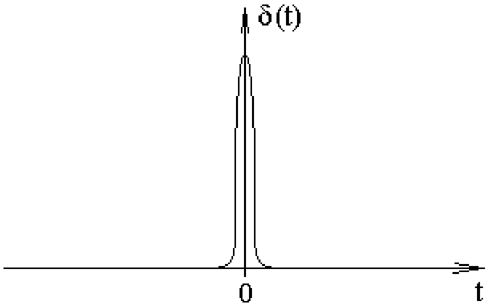
Емкость C — мала, следовательно, $U_{\max}$ — велико; $\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ — так называемое волновое сопротивление колебательного контура, $I_{\max} = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

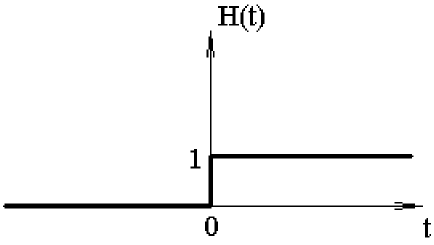
Напряжение на выходе линейной схемы при произвольной зависимости напряжения на входе схемы от времени.

Единичная ступенька напряжения в нулевой момент времени или функция Хевисайда $H(t)$ связана с дельта-функцией Дирака $\delta(t)$ соотношениями:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')dt' \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta(t) = \frac{dH(t)}{dt}$$

Напомним, что дельта-функция Дирака — это очень узкий и одновременно очень высокий пик вначале координат, площадь под графиком которого равна единице $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$.





Рассмотрим какую-либо конкретную линейную схему. Если напряжение на входе — единичная ступенька $U_{вх}(t)=H(t)$, то мы умеем решать такую задачу.

Пусть ее решение — некоторая функция $F(t)$: $\quad U_{вых}(t)=F(t)$

Схема линейная, поэтому если

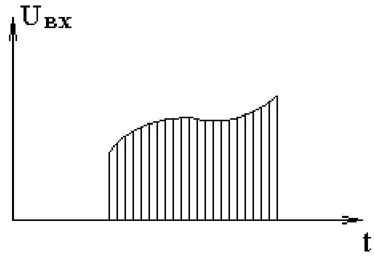
$U_{вх}(t)=\delta(t)=\dfrac{dH(t)}{dt}$, то

$U_{вых}(t)=\dfrac{dF(t)}{dt}\equiv G(t)$ — функция Грина для данной задачи.

Функция Грина — отклик на дельта-функцию Дирака. В нашем случае — отклик электрической схемы на дельта-функцию Дирака на входе схемы.

Если $U_{вх}(t)=\delta(t-t_0)$, то $U_{вых}(t)=G(t-t_0)$.

Произвольная зависимость напряжения на входе схемы может быть представлена интегралом, как большая сумма узких прямоугольников, каждый из которых похож на дельта-функцию Дирака с некоторым весом.



Рассмотрим один из прямоугольников около точки $t=t_0$. Высота прямоугольника $U_{вх}(t_0)$, ширину обозначим, как dt_0. Тогда площадь прямоугольника $U_{вх}(t_0)dt_0$. Площадь под дельта-функцией равна единице, следовательно, рассматриваемый прямоугольник, как функция времени t примерно равен $U_{вх}(t_0)dt_0\,\delta(t-t_0)$.

Вся функция $U_{вх}(t)$ может быть представлена, как сумма таких прямоугольников:

$$U_{вх}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}U_{вх}(t_0)\,\delta(t-t_0)\,dt_0$$

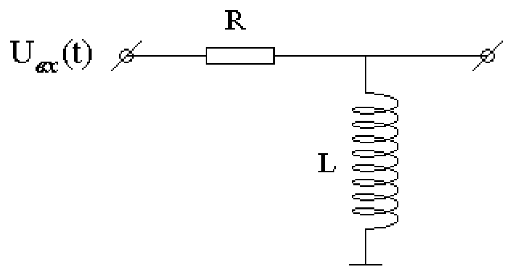
Если напряжение на входе — сумма дельта функций $\delta(t-t_0)$, то напряжение на выходе — сумма функций Грина $G(t-t_0)$ с теми же весовыми множителями $U_{вх}(t_0)dt_0$:

$$U_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t_0)\, G(t-t_0)\, dt_0 .$$

Это и есть решение для напряжения на выходе схемы $U_{вых}(t)$ при произвольной зависимости входного напряжения $U_{вх}(t)$ от времени.

Здесь $G(t)=\dfrac{dF(t)}{dt}$, где $F(t)$ — реакция схемы на единичную ступеньку напряжения на входе $U_{вх}(t)=H(t)$.

Рассмотрим, например, реакцию RL-цепочки на единичную ступеньку напряжения:



Как мы выяснили раньше в вопросе "Реакция RL-цепочки на ступеньку напряжения" напряжение на выходе схемы для единичной ступеньки на входе:

$$F(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\cdot H(t) \quad\Rightarrow\quad G(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\delta(t)-\frac{R}{L}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\cdot H(t),$$

— функция Грина для данной задачи, полученная как производная от произведения.

Следовательно

$$U_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t_0)\left\{\delta(t-t_0)-\frac{R}{L}\, e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} H(t-t_0)\right\} dt_0 .$$

Интеграл распадается на сумму двух интегралов, первый из которых можно взять в явном виде, а во втором оставить пределы интегрирования только по области, в которой отлична от нуля функция Хевисайда, и сделать замену переменной интегрирования $t'=t-t_0$. Тогда

$$U_{вых}(t)=U_{вх}(t)-\frac{R}{L}\int\limits_{0}^{+\infty} U_{вх}(t-t')\, e^{-\frac{R}{L}t'} dt'.$$

<u>Комплексные токи и напряжения.</u>

Комплексные токи и напряжения вводят для рассмотрения гармонически изменяющихся токов и напряжений. Комплексные токи и напряжения позволяют заменить дифференциальные уравнения Кирхгофа для токов комплексными алгебраическими уравнениями Кирхгофа.

Рассмотрим вещественное напряжение:

$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, где U_0 — вещественная амплитуда, ω — циклическая частота, φ_0 — начальная фаза.

Будем называть соответствующим комплексным напряжением величину:

$\widetilde{U}(t) = U_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)}$, где волной сверху $\widetilde{U}$ будем обозначать, что величина комплексная.

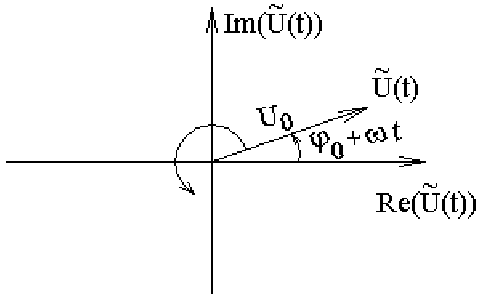
Тогда $\qquad U(t) = \operatorname{Re}\left(\widetilde{U}(t)\right)$

$$\widetilde{U} = U_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} = U_0 e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = \widetilde{U}_0 e^{i\omega t},$$

где $\widetilde{U}_0 \equiv U_0 e^{i\varphi_0}$ — комплексная амплитуда напряжения, U_0 — вещественная амплитуда, φ_0 — начальная фаза или фаза в нулевой момент времени.

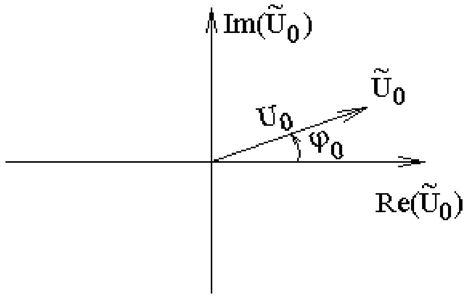
$$\widetilde{U}(t) = \widetilde{U}_0 e^{i\omega t}$$

Гармонически изменяющееся напряжение можно изобразить на комплексной плоскости напряжений.



Напряжение, которое есть на самом деле, — это вещественное напряжение равное проекции комплексного напряжения на вещественную ось $\operatorname{Re}\left(\widetilde{U}(t)\right) = U(t)$.

Комплексная амплитуда напряжения тоже может быть изображена на комплексной плоскости — плоскости комплексных амплитуд. В отличие от комплексного напряжения комплексная амплитуда не изменяется во времени и не вращается на комплексной плоскости.



Аналогично комплексным напряжениям вводятся комплексные токи.

$I(t)=I_0\cos(\omega t+\psi_0)$ — вещественный ток.

$\tilde{I}(t)=I_0\,e^{i(\omega t+\psi_0)}$ — соответствующий ему комплексный ток.

$I(t)=\mathrm{Re}\left(\tilde{I}(t)\right)$

$\tilde{I}(t)=I_0\,e^{i(\omega t+\psi_0)}=I_0\,e^{i\psi_0}e^{i\omega t}=\tilde{I}_0 e^{i\omega t}$ =>

$\tilde{I}_0\equiv I_0\,e^{i\psi_0}$ — комплексная амплитуда тока, I_0 — вещественная амплитуда тока, ψ_0 — начальная фаза тока или фаза в нулевой момент времени.

$\tilde{I}(t)=\tilde{I}_0\,e^{i\omega t}$

Эффективное напряжение.

Эффективное значение периодического переменного напряжения любой формы равно по величине постоянному напряжению, которое также нагревает резистор, как и рассматриваемое переменное напряжение.

Мощность Ленц-Джоулева тепла $N=\dfrac{U^2}{R}$. Согласно определению эффективного напряжения

$\langle N\rangle=\left\langle\dfrac{U^2}{R}\right\rangle=\dfrac{U_{эфф}^2}{R}$ =>

$U_{эфф}^2\equiv\left\langle U^2(t)\right\rangle$.

Аналогично для тока $N=I^2R$ => $\langle N\rangle=\left\langle I^2R\right\rangle=I_{эфф}^2R$ =>

$I_{эфф}^2\equiv\left\langle I^2(t)\right\rangle$.

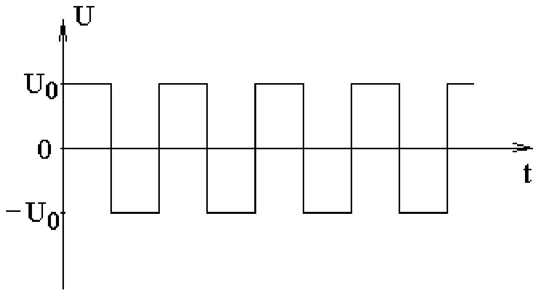
Для гармонически изменяющихся напряжений $U(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi_0)$

$U_{эфф}^2\equiv\left\langle U^2(t)\right\rangle=\left\langle U_0^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)\right\rangle=U_0^2\left\langle\cos^2(\omega t+\varphi_0)\right\rangle=U_0^2\,\dfrac{1}{2}$ =>

$U_{эфф}=\dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$.

Аналогично для гармонически изменяющегося тока: $I_{эфф}=\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$.

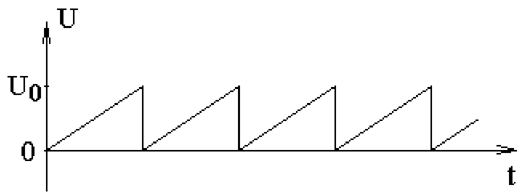
Рассмотрим напряжение (или ток) в форме меандра — прямоугольных импульсов с коэффициентом заполнения $\dfrac{\tau}{T}=\dfrac{1}{2}$, τ — длительность импульса положительной полярности, T — период (со скважностью равной двум $\dfrac{T}{\tau}=2$).



Для меандра:

$$U_{эфф}^2 \equiv \left\langle U^2(t) \right\rangle = \left\langle U_0^2 \right\rangle = U_0^2 \qquad => \qquad U_{эфф} = U_0 .$$

Для пилообразного напряжения



$$U_{эфф}^2 = \left\langle U^2(t) \right\rangle = \int_0^T U^2(t) \frac{dt}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(U_0 \frac{t}{T} \right)^2 dt = \frac{U_0^2}{T^3} \int_0^T t^2 dt = \frac{U_0^2}{3} \qquad =>$$

$$U_{эфф} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}$$

Бытовое напряжение сети переменного тока 220 Вольт — это эффективное значение напряжения.