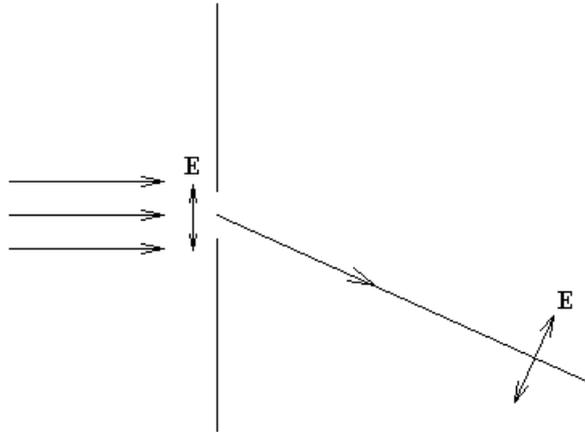


Факультативно. Трудности теории дифракции Кирхгофа.

Пусть свет падает перпендикулярно отверстию, и свет имеет линейную поляризацию в плоскости рисунка.



В падающем на экран свете нет горизонтальной составляющей напряженности поля E , так как световое поле поперечно. Свет, ушедший далеко от отверстия вправо, тоже должен быть поперечен. Поэтому в дифрагированном свете должна появиться горизонтальная составляющая поля E .

Это с одной стороны, а с другой стороны для каждой проекции поля E можно применить интеграл Кирхгофа.

Применим интеграл Кирхгофа для горизонтальной составляющей поля E . В падающей волне нет горизонтальной составляющей поля E , тогда ей неоткуда появиться и в дифрагированной волне, которую можно найти, как интеграл Кирхгофа по плоскости отверстия.

Дело в том, что теория дифракции Кирхгофа не обеспечивает ортогональность световых волн. Она и не могла обеспечивать, потому что она выведена из волнового уравнения, а не из уравнений Максвелла. Кроме того при выводе формулы Кирхгофа рассматривался невозможный для поперечных

волн точечный источник света $\tilde{E}_0(\vec{r}_0) = A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$.

В теории Кирхгофа не учитывается характер взаимодействия светового поля с экраном. Видимо, на самом деле, пренебречь излучением края отверстия нельзя.

Факультативно. Формулы Стрэттона — Чу.

В строгой теории дифракции векторных электромагнитных полей получается формула Стрэттона — Чу. Эту теорию можно найти в книге: А. Дж. Стрэттон. Теория электромагнетизма. М.; Л.: ОГИЗ, 1948, на стр.410 формулы (19, 20). Несколько в более простом и понятном изложении формулу Стрэттона — Чу можно найти, например, в книге В.П. Якубов. Электродинамика. 2006. Томск, на стр.83 формула (3.10).

Поле в некотором объеме можно выразить, как поле излучения реальных источников внутри объема и поле излучения вторичных источников на границе

объема. Причем вторичные источники таковы, что поле их излучения вместе с излучением реальных источников внутри объема за пределами границ объема равно нулю в каждой точке пространства и в каждый момент времени. В качестве вторичных источников нужно рассмотреть поверхностные заряды и поверхностные токи не только электрических зарядов, но и магнитных зарядов, которых на самом деле не бывает.

Если в объеме, который охватывает поверхность, нет источников поля, то

$$\tilde{E}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ i\omega\mu_0\mu \left[\vec{n}, \tilde{H} \right] \frac{e^{ikr}}{r} + \left[\vec{n}, \tilde{E} \right], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] + \left(\vec{n}, \tilde{E} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS,$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \tilde{E}_P = \frac{1}{4\pi S} \left\{ i\frac{\omega}{c} \mu \left[\vec{n}, \tilde{H} \right] \frac{e^{ikr}}{r} + \left[\vec{n}, \tilde{E} \right], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] + \left(\vec{n}, \tilde{E} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS.$$

где \vec{n} — единичный вектор внутренней нормали поверхности, μ — магнитная проницаемость среды, если она отлична от единицы. Здесь каждое из трех слагаемых под интегралом можно рассматривать, как излучение некоторых вторичных источников света, расположенных на поверхности. Вторичные источники имеют такую величину, чтобы электрическое и магнитное поле снаружи рассматриваемого объема было равно нулю. Тогда из граничных условий для поля получим: $\left[\vec{n}, \tilde{H} \right] = \tilde{i}$, где \tilde{i} — плотность поверхностных токов;

$$\text{В системе СГС Гаусса } \left[\vec{n}, \tilde{H} \right] = \frac{4\pi\tilde{i}}{c}.$$

$\left[\vec{n}, \tilde{E} \right] = -\tilde{i}_m$, где \tilde{i}_m — плотность поверхностных токов магнитных зарядов, которых на самом деле не бывает;

$$\text{В системе СГС Гаусса } \left[\vec{n}, \tilde{E} \right] = -\frac{4\pi\tilde{i}_m}{c}.$$

$\left(\vec{n}, \tilde{E} \right) = \frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon_0\varepsilon}$, где $\tilde{\sigma}$ — поверхностная плотность свободных зарядов, ε — диэлектрическая проницаемость среды, если она отлична от единицы.

$$\text{В системе СГС Гаусса } \left(\vec{n}, \tilde{E} \right) = \frac{4\pi\tilde{\sigma}}{\varepsilon}.$$

$$\tilde{H}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ i\omega\varepsilon_0\varepsilon \left[\vec{n}, \tilde{E} \right] \frac{e^{ikr}}{r} - \left[\vec{n}, \tilde{H} \right], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] - \left(\vec{n}, \tilde{H} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS,$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \tilde{H}_P = \frac{1}{4\pi S} \left\{ i\frac{\omega}{c} \varepsilon \left[\vec{n}, \tilde{E} \right] \frac{e^{ikr}}{r} - \left[\vec{n}, \tilde{H} \right], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] - \left(\vec{n}, \tilde{H} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS.$$

где $\left(\vec{n}, \tilde{H} \right) = \frac{\tilde{\sigma}_m}{\mu_0\mu}$ и $\tilde{\sigma}_m$ — поверхностная плотность магнитных зарядов, которых на самом деле не бывает.

$$\text{В системе СГС Гаусса } \left(\vec{n}, \tilde{H} \right) = \frac{4\pi\tilde{\sigma}_m}{\mu}.$$

Совсем факультативная вставка (мои непроверенные соображения).

Если рассмотреть линейно поляризованный свет, который нормально падает на плоский непрозрачный экран с отверстием, то, интегрируя вторичные источники формулы Стрэттона — Чу только по поверхности отверстия, получим, что при дифракции под углом к нормали экрана поле не будет поперечным. Возможно причина в том, что поверхностные заряды и поверхностные токи в плоскости отверстия должны удовлетворять уравнению неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$. В таком случае поверхностные токи вторичных источников по поверхности отверстия на краю отверстия должны создавать линейный заряд, который тоже должен излучать.

Пусть в отверстии есть составляющая поля \vec{H} направленная по касательной к поверхности отверстия $\vec{H}_{\parallel} = [\vec{n}, \vec{H}]$ и $\vec{H}_{\parallel} = \tilde{i}$,

$$\text{В системе СГС Гаусса } \vec{H}_{\parallel} = \frac{4\pi}{c} \tilde{i}.$$

что означает появление вторичных источников излучения в виде поверхностного тока \tilde{i} электрических зарядов по поверхности отверстия. Составляющая этих токов перпендикулярная краю отверстия \tilde{i}_{\perp} создает на краю отверстия заряды с линейной плотностью $\tilde{\lambda}$ такие, что $\tilde{i}_{\perp} + \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial t} = 0$. Тогда $\tilde{i}_{\perp} - i\omega\tilde{\lambda} = 0$, где i — мнимая единица, и $\tilde{\lambda} = -\frac{i}{\omega}\tilde{i}_{\perp}$. Переменные заряды на краю отверстия излучают.

Аналогичные рассуждения справедливы для $\vec{E}_{\parallel} = -\tilde{i}_m$ и линейного магнитного заряда $\tilde{\lambda}_m$ по краю отверстия.

$$\text{В системе СГС Гаусса } \vec{E}_{\parallel} = -\frac{4\pi}{c} \tilde{i}_m.$$

Тогда к интегралу Стрэттона — Чу по поверхности отверстия

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ i\omega\mu_0\mu [\vec{n}, \vec{H}] \frac{e^{ikr}}{r} + \left[[\vec{n}, \vec{E}], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] + (\vec{n}, \vec{E}) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \vec{E}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{i\omega}{c} \mu [\vec{n}, \vec{H}] \frac{e^{ikr}}{r} + \left[[\vec{n}, \vec{E}], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] + (\vec{n}, \vec{E}) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS.$$

нужно добавить излучение линейного электрического и магнитного заряда по краю отверстия. Пусть $\vec{\tau}$ — единичный вектор по касательной к границе отверстия. Тогда $\tilde{i}_{\perp} = \left(\vec{\tau}, [\vec{n}, \vec{H}] \right)$ и $\tilde{\lambda} = \frac{-i}{\omega} \left(\vec{\tau}, [\vec{n}, \vec{H}] \right)$.

$$\text{В системе СГС Гаусса } \tilde{i}_{\perp} = \frac{c}{4\pi} \left(\vec{\tau}, [\vec{n}, \vec{H}] \right) \text{ и } \tilde{\lambda} = \frac{-ic}{4\pi\omega} \left(\vec{\tau}, [\vec{n}, \vec{H}] \right).$$

К интегралу для \vec{E}_P по поверхности отверстия нужно добавить интеграл по краю отверстия

$$\frac{-i}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega} \oint_l \left\{ \left(\vec{\tau}, [\vec{n}, \vec{H}] \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dl.$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \frac{1}{4\pi l} \oint_l \left\{ \frac{-ic}{\varepsilon \omega} \left(\vec{\tau}, [\vec{n}, \vec{H}] \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dl.$$

К интегралу

$$\vec{H}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ i\omega \varepsilon_0 \varepsilon [\vec{n}, \vec{E}] \frac{e^{ikr}}{r} - \left[[\vec{n}, \vec{H}], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] - (\vec{n}, \vec{H}) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \vec{H}_P = \frac{1}{4\pi S} \oint_S \left\{ i \frac{\omega}{c} \varepsilon [\vec{n}, \vec{E}] \frac{e^{ikr}}{r} - \left[[\vec{n}, \vec{H}], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] - (\vec{n}, \vec{H}) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS.$$

нужна аналогичная добавка

$$\frac{i}{\mu_0 \mu \omega} \oint_l \left\{ \left(\vec{\tau}, [\vec{n}, \vec{E}] \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dl.$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \frac{1}{4\pi l} \oint_l \left\{ \frac{ic}{\mu \omega} \left(\vec{\tau}, [\vec{n}, \vec{E}] \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dl.$$

Вероятно, должна быть еще одна добавка к электрическому и магнитному полю, связанная с тем, что изменение поверхностной плотности заряда $\tilde{\sigma}$ в плоскости отверстия приводит в соответствии с уравнением неразрывности к появлению на краю отверстия линейной плотности тока \tilde{i}'_{\perp} перпендикулярной краю отверстия. Например, для круглого отверстия $\frac{d(\tilde{\sigma}\pi r^2)}{dt} + \tilde{i}'_{\perp} 2\pi r = 0$. С

учетом $\frac{d\tilde{\sigma}}{dt} = -i\omega\tilde{\sigma}$ получаем $\tilde{i}'_{\perp} = \frac{i}{2}\omega\tilde{\sigma}r$. Эти токи тоже должны излучать.

Конец совсем факультативной вставки.

Факультативно. Теория дифракции Френеля. Построения Гюйгенса.

До создания скалярной теории Кирхгофа Френелем была разработана своя теория дифракции, в которой аналогично теории Кирхгофа рассматривается дифракция монохроматических световых волн.

В основе теории Френеля лежит принцип Гюйгенса — Френеля. Согласно этому принципу каждый участок фронта световой волны является вторичным источником волн. В точке наблюдения складываются комплексные амплитуды световых волн, пришедших от различных вторичных источников.

Амплитуда света, пришедшего от вторичного источника пропорциональна площади вторичного источника, пропорциональна амплитуде светового поля в области вторичного источника и обратно-пропорциональна расстоянию от вторичного источника до точки наблюдения. Кроме того, свет в точке наблюдения должен иметь множитель e^{ikr} , который отражает запаздывание по фазе на величину kr фазы в точке наблюдения относительно фазы вторичного источника.

Все это соответствует более поздней и более строгой скалярной теории Кирхгофа. Можно сказать, что теория Кирхгофа является математическим обоснованием теории Френеля. Дело в том, что все перечисленные выше свойства света, приходящего от вторичного источника в точку наблюдения, в теории Френеля были просто бездоказательной догадкой.

В теории Френеля не было коэффициента наклона, хотя Френель и догадывался, что какая-то зависимость излучения вторичного источника от направления должна быть. Френель рассматривал вторичные источники только на поверхности равной фазы, а не на любой замкнутой поверхности вокруг точки наблюдения, как в теории Кирхгофа. В теории Кирхгофа

$$\tilde{E}_P = -\frac{i}{2\lambda} \int_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot (\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)) \cdot dS.$$

По теории Френеля

$$\tilde{E}_P \sim \int_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot dS.$$

Название принципа Гюйгенса-Френеля связано с тем, что до теории Френеля огибание светом препятствий объяснялось с помощью построений Гюйгенса. В теме "Кристаллооптика" мы рассматривали эти построения факультативно. Согласно построениям Гюйгенса каждая точка фронта волны является вторичным источником света. Новое положение фронта световой волны через некоторый промежуток времени τ может быть получено, как граница множества точек, до которых достигает свет от любой из точек старого фронта волны за рассматриваемое время τ .

Экзамен. Зоны Френеля.

Зоны Френеля полезны только при рассмотрении дифракции в задаче с осевой симметрией, когда на одной оси находятся источник света, круглое отверстие в непрозрачном экране и точка наблюдения.

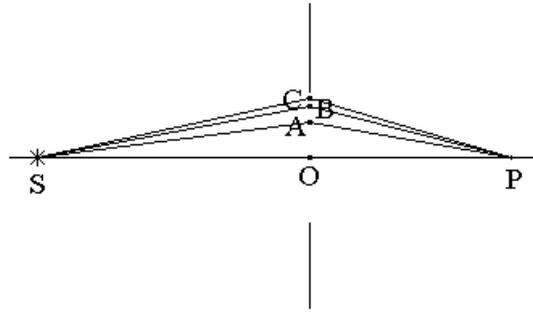
Зоны Френеля — это кольца, на которые мысленно разбивают плоскость отверстия со вторичными источниками света. В дополнение к определению зоны Френеля требуется, чтобы разность хода лучей, идущих через внешний и внутренний край кольца зоны Френеля, была бы равна $\frac{\lambda}{2}$.

Е. И. Бутиков в книге "Оптика" предлагает разбивать на зоны Френеля не поверхность отверстия, а поверхность равных фаз — сферу с центром в источнике света, точнее часть сферы, которая опирается на край отверстия. Это разбиение строго соответствует теории Френеля, но дает менее точный результат.

Мы будем разбивать на зоны Френеля плоскость отверстия.

Радиусом зоны Френеля называют внешний радиус кольца.

Пусть OA, OB, OC — радиусы зон Френеля.



Если r_m — радиус m -ой зоны Френеля, то

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = r_1 \\ OB = r_2 \\ OC = r_3 \\ \vdots \end{array} \right.$$

По определению зоны Френеля разность хода лучей, идущих через внешний и внутренний край кольца зоны Френеля, равна $\frac{\lambda}{2}$. Тогда

$$\left. \begin{array}{l} (SA + AP) - (SO + OP) = \frac{\lambda}{2} \\ (SB + BP) - (SA + AP) = \frac{\lambda}{2} \\ (SC + CP) - (SB + BP) = \frac{\lambda}{2} \\ \vdots \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} (SA + AP) - (SO + OP) = 1 \frac{\lambda}{2} \\ (SB + BP) - (SO + OP) = 2 \frac{\lambda}{2} \\ (SC + CP) - (SO + OP) = 3 \frac{\lambda}{2} \\ \vdots \end{array} \right\}.$$

Пусть $r_m = OM$ — радиус m -ой зоны Френеля. Тогда

$$(SM + MP) - (SO + OP) = m \frac{\lambda}{2}.$$

Обозначим

$L_1 \equiv SO$ — расстояние от источника света до отверстия,

$L_2 \equiv OP$ — расстояние от отверстия до точки наблюдения.

Тогда

$$\left(\sqrt{L_1^2 + r_m^2} + \sqrt{L_2^2 + r_m^2} \right) - (L_1 + L_2) = m \frac{\lambda}{2}.$$

Будем рассматривать зоны Френеля только с малыми номерами, когда выполняются приближения параксиальной оптики, то есть $r_m \ll L_i$. Тогда

$$\sqrt{L_1^2 + r_m^2} = L_1 \sqrt{1 + \frac{r_m^2}{L_1^2}} \approx L_1 \left(1 + \frac{r_m^2}{2L_1^2} \right) = L_1 + \frac{r_m^2}{2L_1} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{L_1^2 + r_m^2} - L_1 = \frac{r_m^2}{2L_1}.$$

Аналогично

$$\sqrt{L_2^2 + r_m^2} - L_2 = \frac{r_m^2}{2L_2}.$$

Подставим в равенство

$$\left(\sqrt{L_1^2 + r_m^2} + \sqrt{L_2^2 + r_m^2} \right) - (L_1 + L_2) = m \frac{\lambda}{2}$$

и получим

$$\frac{r_m^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = m \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow$$

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}} \quad \text{— внешний радиус } m\text{-ой зоны Френеля.}$$

В частном случае, когда на экран падает плоская волна, можно считать, что источник волны находится бесконечно далеко $L_1 = \infty \Rightarrow$

$$r_m = \sqrt{m\lambda L_2}.$$

Если в формуле отсутствует расстояние L_1 , то L_2 можно переобозначить за L . Тогда

$$r_m = \sqrt{m\lambda L} \quad \text{— радиус } m\text{-ой зона Френеля для плоской падающей волны.}$$

Экзамен. Векторные диаграммы для зон Френеля.

Зоны Френеля имеют примерно одинаковые площади. И действительно

$$S_m = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \pi \left(m\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} - (m-1)\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \right) = \pi\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

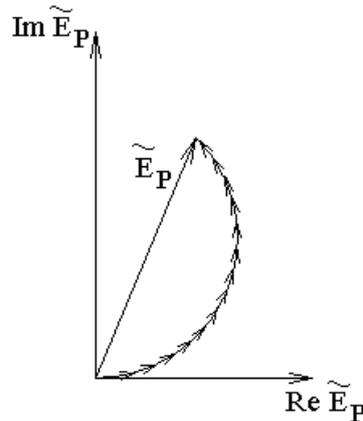
Здесь правая часть равенства не зависит от m , значит и площади зон Френеля S_m не зависят от m .

Разобьем отверстие на более мелкие кольца. Пусть кольца такие, что разность хода для двух лучей, проходящих через внешнюю и внутреннюю границы кольца, одна и та же для любого кольца. Тогда площади колец будут одинаковы. Это можно доказать, рассуждая аналогично рассмотрению зон Френеля.

Одинаковые разности хода эквивалентны одинаковым разностям фаз, так как

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\delta\varphi}{2\pi}.$$

Сдвиг фазы — это поворот комплексной амплитуды на комплексной плоскости. То есть векторные вклады от разных колец будут развернуты на одинаковые углы на комплексной плоскости. Длины этих векторов будут одинаковы, так как одинаковы площади колец вторичных источников. Следовательно, эти векторы будут лежать на дуге окружности.



Суммарная комплексная амплитуда света в точке наблюдения P — это хорда.

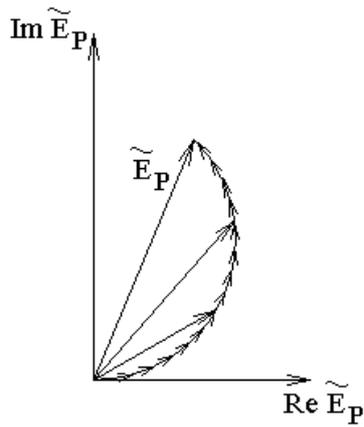
В этих рассуждениях мы пренебрегли зависимостью амплитуды от расстояния $\sim \frac{1}{r}$ и пренебрегли зависимостью коэффициента наклона от угла дифракции. Такие приближения справедливы, если радиус отверстия в экране гораздо меньше расстояния от экрана до источника света и расстояния от экрана до точки наблюдения $r_m \ll L_i$.

Напомним, что в электричестве комплексные напряжения и токи пропорциональны $e^{i\omega t}$, а в оптике напряженность электрического поля пропорциональна $e^{-i\omega t}$. В результате этой разницы поворот комплексной амплитуды на комплексной плоскости, например, против часовой стрелки в электричестве означает опережение по фазе, а в оптике — отставание по фазе.

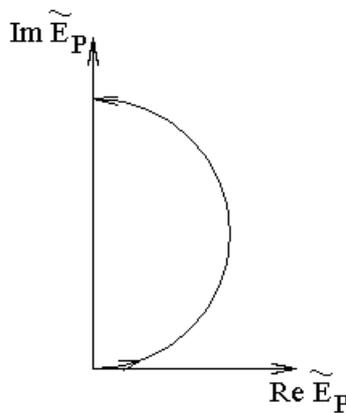
Напомним, что комплексная амплитуда $\tilde{E}_0(\vec{r})$ — это величина, входящая в выражение для вещественного поля $E(t, \vec{r})$:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \text{Re} \left\{ \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \vec{e}_p \cdot e^{-i\omega t} \right\}$$

Рассмотрим изменение картины сложения амплитуд на комплексной плоскости при изменении радиуса отверстия и сохранении остальных параметров.

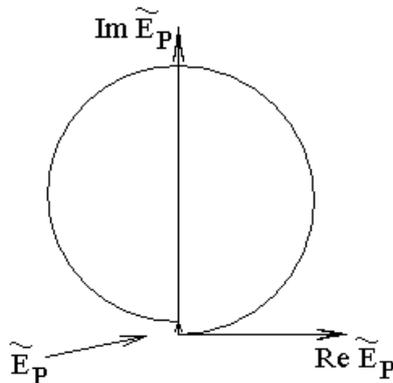


Если для точки наблюдения отверстие открывает одну зону Френеля, то картина сложения амплитуд имеет следующий вид:



Для внутреннего и внешнего края зоны Френеля по определению зоны Френеля разность хода равна $\Delta = \frac{\lambda}{2}$, что соответствует разности фаз $\delta\varphi = \pi$ и соответствует повороту вектора на комплексной плоскости на угол π . Если вклад от начала первой зоны смотрит направо, то от конца первой зоны — налево. Следовательно, картина сложения амплитуд на комплексной плоскости — половина окружности.

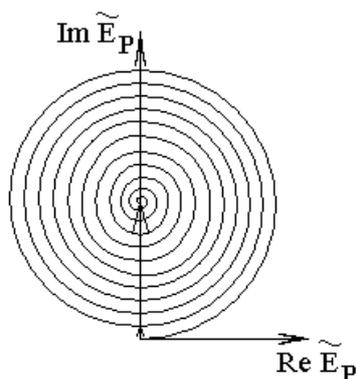
Аналогично для отверстия, которое открывает для точки наблюдения две зоны Френеля, картина сложения амплитуд — целая окружность. Суммарная амплитуда света E_P в этом случае очень мала.



Отличие амплитуды от нуля вызвано тем, что коэффициент наклона для второй зоны Френеля в среднем чуть меньше, чем для первой зоны, и расстояние от вторичных источников второй зоны до точки наблюдения чуть больше, чем для первой зоны.

Аналогично для отверстия с четным числом зон Френеля амплитуда почти нулевая, а для нечетного числа зон Френеля — максимальна.

Если отверстие открывает всю плоскость, то картина сложения амплитуд имеет примерно следующий вид:



На самом деле шаг спирали при приближении к центру окружности становится меньше и меньше.

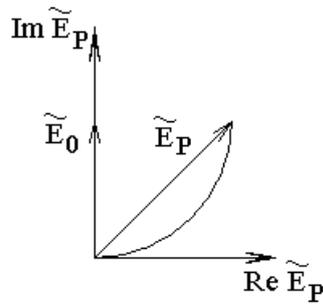
При этом суммарная амплитуда \tilde{E}_0 — вертикальный радиус окружности. Любопытно, что начальный вклад от центральной части первой зоны Френеля направлен вдоль вещественной оси, а суммарная амплитуда — вдоль мнимой оси. Это означает, что излучение плоскости диполей отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от излучения одного ближайшего к точке наблюдения диполя.

Амплитуда $\tilde{E}_1 = 2\tilde{E}_0$ при открытой первой зоне Френеля — диаметр окружности. Здесь \tilde{E}_0 — амплитуда волны, падающей на экран с отверстием или амплитуда поля в точке наблюдения, если открыта вся плоскость вторичных источников.

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, следовательно $I_1 = 4I_0$. Интенсивность света при открытой первой зоне Френеля в 4 раза больше, чем интенсивность света падающего на экран.

Для четного числа открытых зон интенсивность близка к нулю, для нечетного числа — близка к $4I_0$.

Если в какой-либо задаче говорится о дробной части зоны Френеля, то имеется в виду соответствующая часть площади отверстия одной зоны, а не радиуса одной зоны. На картине сложения комплексных амплитуд получается соответствующая часть дуги половины окружности. Так для половины первой зоны Френеля картина сложения амплитуд имеет вид четверти окружности:

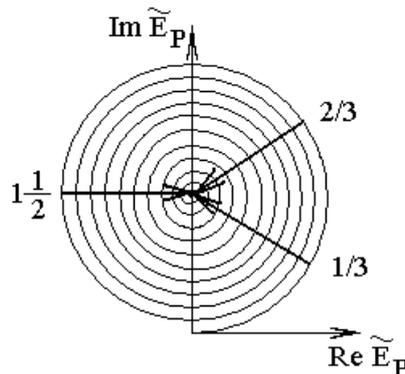


В этом случае $E_P = \sqrt{2}E_0$ и, соответственно, $I_P = 2I_0$.

Экзамен. Пятно Пуассона.

Если на пути плоской световой волны расположен непрозрачный диск или шар, то в центре геометрической тени есть светлое пятно — пятно Пуассона.

Рассмотрим три варианта картины сложения амплитуд на комплексной плоскости, когда непрозрачный диск закрывает $\frac{1}{3}$ зоны Френеля, $\frac{2}{3}$ зоны Френеля, $1\frac{1}{2}$ зоны Френеля:



В каждом случае часть дуги соответствующая непрозрачному диску не участвует в картине сложения амплитуд на комплексной плоскости, поэтому вектор оставшейся суммарной амплитуды начинается из конца соответствующей дуги.

Здесь в каждом случае комплексная амплитуда поля в точке наблюдения изображена соответствующим вектором. Как видно из рисунка длины трех векторов практически одинаковы и равны радиусу окружности, что соответствует амплитуде света от всей открытой плоскости вторичных источников. Тогда одинаковыми будут и соответствующие интенсивности, так как они пропорциональны квадратам длины или модуля векторов. Интенсивность света в центре пятна Пуассона примерно равна интенсивности света I_0 падающей на диск волны.

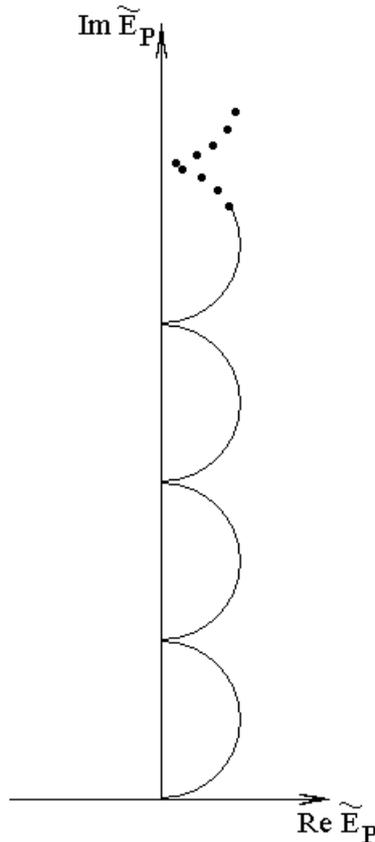
Пятно Пуассона появляется независимо от величины длины волны света. Следовательно, пятно Пуассона появляется и в белом свете.

Экзамен. Зонная пластинка. Фокус зонной пластинки.

Зонная пластинка — это прозрачная пластинка, на которой непрозрачной краской закрашены все четные или все нечетные зоны Френеля.

Точка, для которой рассчитаны радиусы зон Френеля, называется фокусом зонной пластинки.

Пусть зонная пластинка закрывает все четные зоны Френеля. Рассмотрим картину сложения амплитуд на комплексной плоскости от оставшихся нечетных зон:



Из рисунка видно, что в фокусе зонной пластинки интенсивность света очень велика.

Экзамен. Отношение интенсивностей в фокусах линзы и зонной пластинки.

Рассмотрим вклад в комплексную амплитуду от первых двух зон Френеля.

Линза развернет окружность двух первых зон в прямую линию, так как сделает волны, проходящие через все кольца в плоскости линзы, синфазными. Большая интенсивность в фокусе линзы потому и получается, что свет приходит в фокус синфазно ото всех вторичных источников за линзой.

Если E_0 — радиус окружности на комплексной плоскости сложения амплитуд, то длина окружности равна $2\pi E_0$. Такое значение и будет иметь амплитуда поля в фокусе линзы, если у линзы открыты только две первых зоны.

Для зонной пластинки от двух первых зон открыта будет только первая зона. Амплитуда поля будет равна диаметру окружности на комплексной плоскости сложения амплитуд. Тогда амплитуда равна $2E_0$.

Тогда отношение амплитуд в фокусе линзы и зонной пластинки равно $\frac{2\pi E_0}{2E_0} = \pi$ в случае рассмотрения вклада только от двух первых зон Френеля.

Отношение вкладов от каждой следующей пары будет таким же. Следовательно, для линзы и зонной пластинки с диаметром равным четному числу зон Френеля отношение амплитуд будет таким же. Если диаметр неравен четному числу зон Френеля, но содержит много зон Френеля, то отношение амплитуд будет почти таким же.

Отношение интенсивностей равно отношению квадратов амплитуд, так как интенсивность света пропорциональна квадрату вещественной амплитуды поля.

Следовательно, отношение интенсивностей в фокусе линзы и зонной пластинки равно $\left(\frac{2\pi E_0}{2E_0}\right)^2 = \pi^2$.

Экзамен. Ложные фокусы зонной пластинки.

Кроме основного фокуса зонная пластинка имеет еще и ложные фокусы, интенсивность в которых такая же, как и в основном фокусе. Размер светового пятна в ложном фокусе меньше, чем в основном фокусе.

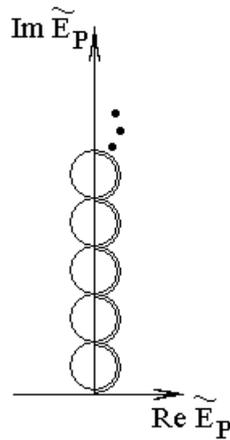
Пусть f — фокусное расстояние зонной пластинки.

Рассмотрим точку наблюдения, которая находится на расстоянии $L = \frac{f}{3}$ от зонной пластинки.

Будем считать, что на пути световой волны стоит изготовленная зонная пластинка с закрытыми, например, четными зонами Френеля. Радиусы зон Френеля $r_m = \sqrt{m\lambda L}$ этой зонной пластинки уже не изменить. Поэтому зафиксируем r_m и заменим $L \rightarrow \frac{L}{3}$, тогда для сохранения равенства $r_m = \sqrt{m\lambda L}$ необходимо заменить $m \rightarrow 3m$.

Следовательно, в одной зоне Френеля зонной пластинки изготовленной для $L = f$ укладываются три зоны Френеля для $L = \frac{f}{3}$.

Для $L = \frac{f}{3}$ картина сложения амплитуд на комплексной плоскости имеет следующий вид:



Когда дуга сворачивается в полторы окружности вместо половины окружности, тогда радиус окружности уменьшается втрое. По этой причине амплитуда поля в ложном фокусе должна быть втрое меньше, чем амплитуда в основном фокусе.

С другой стороны, ложный фокус расположен втрое ближе $L = \frac{f}{3}$ к зонной пластике, чем расположен основной фокус. С учетом зависимости амплитуды поля вторичного источника от расстояния вида $\sim \frac{1}{r}$ амплитуда поля в ложном фокусе должна быть втрое больше, чем амплитуда в основном фокусе.

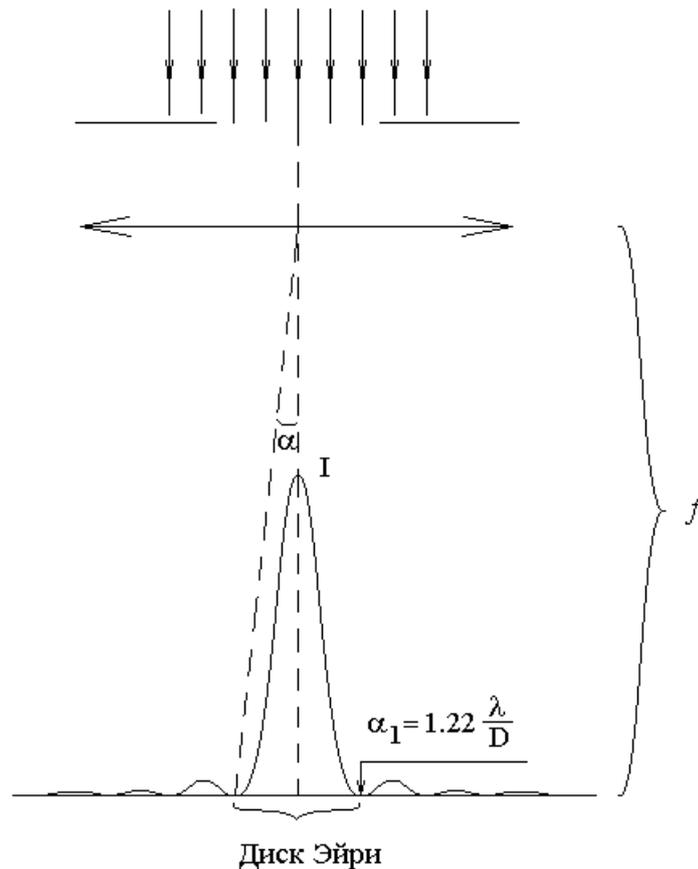
В результате учета обоих факторов амплитуда поля в ложном фокусе равна амплитуде поля в основном фокусе.

Ложные фокусы расположены на следующих расстояниях от зонной пластинки: $\frac{f}{3}$, $\frac{f}{5}$, $\frac{f}{7}$ и так далее.

Экзамен. Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии.

Дифракция Фраунгофера — это дифракция, наблюдаемая на бесконечно удаленном экране.

Дифракционную картину, локализованную на бесконечности, можно наблюдать в фокальной плоскости линзы. Диаметр линзы должен быть заметно больше диаметра отверстия, чтобы линза не диафрагмировала свет. Если диаметр линзы заметно больше диаметра отверстия, то расстояние от отверстия в экране до линзы не изменяет вида дифракционной картины.



Если длина волны света λ гораздо меньше диаметра отверстия D , то угловой радиус первого темного кольца дифракционной картины равен $\alpha_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$. Соответствующий диск внутри первого темного кольца дифракционной картины называют диском Эйри.

Факультативная вставка.

Если вычислить интеграл Френеля (интеграл Кирхгофа, но без коэффициента наклона) для амплитуды поля при дифракции Фраунгофера на круглом отверстии, то для интенсивности, которая пропорциональна квадрату амплитуды, в зависимости от угла дифракции получается следующее выражение

$$I(\alpha) = I_0 \left(\frac{2J_1(U)}{U} \right)^2, \text{ где}$$

$$U = \frac{1}{2} kD \cdot \sin(\alpha),$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ — волновое число,}$$

D — диаметр отверстия,

α — угол дифракции или угол между нормалью к экрану и направлением на точку наблюдения света,

I_0 — интенсивность света в направлении нулевого угла дифракции $\alpha = 0$,

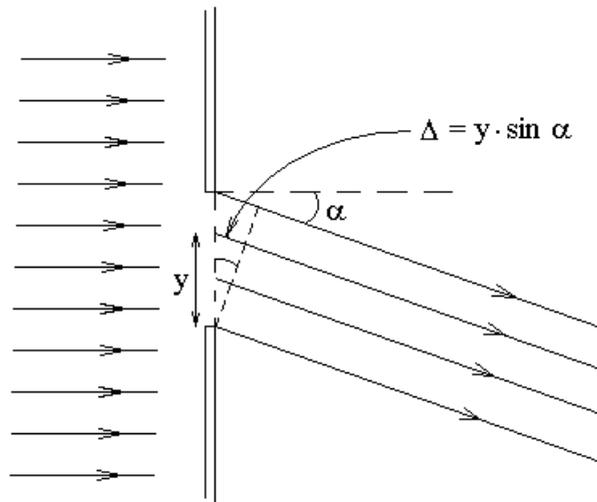
$$J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(mt - z \cdot \sin(t)) \cdot dt \quad \text{— функция Бесселя с целочисленным}$$

значком $m = 0, 1, 2, \dots$. Это одно из возможных эквивалентных определений функции Бесселя.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Дифракция Фраунгофера на одной щели.

Напомним, что дифракция Фраунгофера наблюдается на бесконечно удаленном экране.



Пусть перпендикулярно на экран со щелью падает плоская монохроматическая световая волна.

Мысленно разобьем площадь щели на вторичные источники света в виде тонких полосок вдоль щели.

Факультативная вставка.

Выберем начало координат на нижней границе щели. Будем обозначать координатами x , y и радиус вектором \vec{r} положение вторичных источников света. Положение точки наблюдения будем обозначать радиус-вектором \vec{r}' .

От каждой полоски будет некоторое расстояние до точки наблюдения. Под интегралом Кирхгофа стоит множитель $e^{ikr'}$, где r' — расстояние от точечного вторичного источника до точки наблюдения. В нашем случае разные точки одной тонкой полоски будут находиться на разном расстоянии от точки наблюдения, но мы можем заменить всю тонкую полоску одним вторичным

источником с одним значением $e^{i\frac{\pi}{4}} e^{ikr'}$. Почему так?

При графическом рассмотрении зон Френеля можно заметить, что излучение плоскости вторичных источников отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ относительно излучения ближайшего к точке наблюдения вторичного источника. Плоскость вторичных источников можно мысленно разбить по y координате на тонкие полоски, а затем каждую полоску мысленно разбить по x

координате на почти точечные вторичные источники. Разбиения по x и по y координате очень похожи друг на друга, поэтому отставание по фазе $\frac{\pi}{2}$ для плоскости вторичных источников складывается из двух одинаковых отставаний по фазе по $\frac{\pi}{4}$. Первое — отставание излучения вторичных источников одной полоски от излучения одного точечного источника. Второе — отставание излучения вторичных источников всей плоскости от вторичных источников одной полоски. В результате излучение одной полоски вторичных источников отстает по фазе на $\frac{\pi}{4}$ от излучения одного точечного вторичного источника этой полоски расположенного ближе всего к точке наблюдения.

Соответствующий отставанию фазовый множитель $e^{i\frac{\pi}{4}}$ для нас не будет существенным и будет отброшен в дальнейших рассуждениях, в которых каждую полоску будем рассматривать, как точечный вторичный источник света.

Конец факультативной вставки.

Рассмотрим вторичный источник света, находящийся на расстоянии y от нижнего края щели. Рассмотрим излучение этого источника в направлении, которое составляет угол α с нормалью к экрану. Все лучи, идущие в направлении α , пересекаются на бесконечно удаленном экране. Нас интересуют именно такие лучи, так как дифракционная картина при наблюдении дифракции Фраунгофера локализована на бесконечности.

На рисунке выше точки пунктирной линии, наклоненной вправо от вертикали на угол α , находятся на одинаковом удалении от точки экрана наблюдения дифракционной картины, в которой пересекается параллельный пучок лучей, дифрагирующий на щели под углом α . Тогда $\Delta = y \cdot \sin(\alpha)$ — разность хода между лучом, который проходит щель на высоте y , и лучом, который проходит через нижний край щели.

Для малых углов дифракции α не будем учитывать зависимость коэффициента наклона от α :

$$-\frac{i}{2\lambda}(1 + \cos(\alpha)) \approx -\frac{i}{\lambda}.$$

Для экрана, удаленного от щели на большое расстояние $r' \gg D$, где D — ширина щели, можно считать, что множитель $\frac{1}{r'}$ в интеграле Кирхгофа постоянен $\frac{1}{r'} \approx const$, не зависит от y -координаты полоски вторичного источника.

Найдем зависимость комплексной амплитуды поля \tilde{E} от угла дифракции α только с точностью до коэффициента пропорциональности, поэтому

постоянные множители в выражении для амплитуды нас интересовать не будут.

В соответствии с теорией дифракции Кирхгофа (как и с теорией дифракции Френеля):

$$\tilde{E}(\alpha) \sim \tilde{E}_0 \int_0^D e^{ikr'} dy.$$

Вместо элемента площади dS вторичного источника под интегралом стоит множитель dy , который надо было бы умножить на длину щели, если длина щели гораздо меньше расстояния от экрана до точки наблюдения. Постоянный множитель перед интегралом нам не важен, и мы его не учитываем. В показателе экспоненты $r' = r_0' + \Delta = r_0' + y \cdot \sin(\alpha)$, где r_0' — расстояние от нижнего края щели до точки наблюдения, до точки на экране, где сходятся лучи дифрагирующие под углом α .

$$\tilde{E}(\alpha) \sim \tilde{E}_0 \int_0^D e^{ikr'} dy \sim \int_0^D e^{ik(r_0' + y \cdot \sin(\alpha))} dy \sim \int_0^D e^{iky \cdot \sin(\alpha)} dy$$

Здесь постоянный множитель $\tilde{E}_0 e^{ikr_0'}$ отброшен, как несущественный. Все отброшенные постоянные множители можно заменить множителем $\frac{\tilde{E}_0'}{D}$, где D — ширина щели, введенная в выражение для согласования размерностей левой и правой частей равенства, \tilde{E}_0' — некоторое значение амплитуды поля, но не в плоскости щели, а как потом выяснится, в максимуме дифракционной картины. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\alpha) &= \frac{\tilde{E}_0'}{D} \cdot \int_0^D e^{iky \cdot \sin(\alpha)} \cdot dy = \\ &= \frac{\tilde{E}_0'}{ikD \cdot \sin(\alpha)} \cdot \int_0^{ikD \cdot \sin(\alpha)} e^{iky \cdot \sin(\alpha)} \cdot d(iky \cdot \sin(\alpha)) = \\ &= \frac{\tilde{E}_0'}{ikD \cdot \sin(\alpha)} \left(e^{ikD \cdot \sin(\alpha)} - 1 \right) \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$U \equiv \frac{1}{2} kD \cdot \sin(\alpha).$$

Тогда

$$\tilde{E}(\alpha) = \frac{\tilde{E}_0'}{2iU} \cdot \left(e^{2iU} - 1 \right).$$

Из этой формулы видно, что $\tilde{E}_0' = \tilde{E}(0)$.

Перейдем от комплексной амплитуды к интенсивности света. Для этого возьмем равенство по модулю, возведем в квадрат и умножим на $\frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu}$. С

учетом $I(\alpha) = \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} |\tilde{E}(\alpha)|^2$ получим

В системе СГС Гаусса $I(\alpha) = \frac{cn}{8\pi\mu} |\tilde{E}(\alpha)|^2$.

$$\begin{aligned}
 I(\alpha) &= I_0 \cdot \left| \frac{e^{2iU} - 1}{2iU} \right|^2 = I_0 \cdot \left| \frac{\cos(2U) + i \cdot \sin(2U) - 1}{2iU} \right|^2 = \\
 &= I_0 \cdot \frac{(1 - \cos(2U))^2 + \sin^2(2U)}{4U^2} = I_0 \cdot \frac{1 - 2\cos(2U) + \cos^2(2U) + \sin^2(2U)}{4U^2} = \\
 &= I_0 \cdot \frac{2 - 2 \cdot \cos(2U)}{4U^2} = I_0 \cdot \frac{2 - 2\cos^2(U) + 2\sin^2(U)}{4U^2} = \\
 &= I_0 \cdot \frac{2\sin^2(U) + 2\sin^2(U)}{4U^2} = I_0 \cdot \left(\frac{\sin(U)}{U} \right)^2
 \end{aligned}$$

Окончательно для дифракции Фраунгофера на одной щели получаем зависимость интенсивности света I от угла дифракции α :

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin(U)}{U} \right)^2,$$

где I_0 — интенсивность света в направлении нулевого угла дифракции $\alpha = 0$, α — угол дифракции или угол между нормалью к экрану и направлением на точку наблюдения света, $U \equiv \frac{1}{2} kD \cdot \sin(\alpha)$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, D — ширина щели.