Лекционные демонстрации, 6 минут.

Факультативно. Частные решения волнового уравнения.

Общее решение волнового уравнения неизвестно. Общее решение любого линейного уравнения можно представить, как суперпозицию его частных решений. Основной метод поиска частных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных — это метод разделения переменных. Метод разделения переменных позволяет найти решения уравнений многих типов: волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения Шредингера в квантовой механике и других уравнений.

Рассмотрим волновое уравнение для некоторой переменной величины $A(t,\vec{r})$:

$$\Delta A - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0.$$

Будем искать решения этого уравнения в виде произведения двух функций:

$$A(t,\vec{r}) = T(t)\cdot R(\vec{r}),$$

одна из которых зависит только от времени, а другая — только от координат.

Таких решений окажется настолько много, что нам их будет достаточно. Любая линейная комбинация этих решений тоже будет решением, что следует из линейности уравнения относительно неизвестной функции A.

Подставим $A = TR$ в волновое уравнение для величины A и получим:

$\Delta(TR) - \dfrac{1}{V^2}\cdot\left(\ddot{TR}\right) = 0$, где две точки — это обозначение второй производной по времени.

Вынесем функцию времени T за вторые производные по координатам в операторе Лапласа Δ, а функцию координат R вынесем за вторую производную по времени:

$$T\Delta R - \frac{1}{V^2}R\ddot{T} = 0.$$

Разделим это равенство на произведение TR и получим:

$$\frac{\Delta R}{R} - \frac{1}{V^2}\cdot\frac{\ddot{T}}{T} = 0.$$

Здесь первое слагаемое зависит только от радиус-вектора $\vec{r}$, а второе — только от времени t. Это возможно только в том случае, если каждое из слагаемых равно одной и той же константе.

Обозначим эту константу, как $\left(-k^2\right)$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta R}{R} = -k^2 \\ \dfrac{1}{V^2} \cdot \dfrac{\ddot{T}}{T} = -k^2 \end{cases} \qquad => \qquad \begin{cases} \Delta R + k^2 R = 0 \\ \ddot{T} + (kV)^2 T = 0 \end{cases}.$$

В случае, если константа $\left(-k^2\right)$ окажется положительной, будем считать, что k — чисто мнимое число. Так при рассмотрении вопроса о полном внутреннем отражении, одна из проекций вектора $\vec{k}$ действительно окажется мнимой.

Для пространственной части решения волнового уравнения получим

$\Delta R + k^2 R = 0$ — уравнение Гельмгольца.

А для временной части получим

$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$ — уравнение гармонических колебаний, где для краткости введено обозначение $\omega \equiv kV$.

Комплексные решения этих уравнений выглядят проще, чем вещественные решения. Поэтому обычно ищут комплексные решения, а затем рассматривают вещественную часть комплексного решения. Для линейного дифференциального уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть комплексного решения является вещественным решением.

Будем комплексные величины обозначать волной над соответствующей величиной, тогда $\tilde{T}$ в наших обозначениях — комплексная величина, а T — вещественная величина.

Общее комплексное решение уравнения гармонических колебаний имеет следующий вид:

$\tilde{T} = \tilde{T}_{01} e^{i\omega t} + \tilde{T}_{02} e^{-i\omega t}$, где $\tilde{T}_{01}$ и $\tilde{T}_{02}$ — произвольные комплексные константы интегрирования.

Общее решение уравнения гармонических колебаний можно получить, как линейную комбинацию решений вида:

$\tilde{T} = \tilde{T}_0 e^{-i\omega t}$, где ω принимает два возможных значения с одинаковым модулем, но разными знаками. Знак минус в показателе мнимой экспоненты — это вопрос соглашения, $\tilde{T}_0$ — произвольная комплексная константа интегрирования, различная для положительного и отрицательного значений ω.

Вернемся теперь к рассмотрению пространственной части решения волнового уравнения — к уравнению Гельмгольца:

$$\Delta R(\vec{r}) + k^2 R(\vec{r}) = 0.$$

Продолжим поиск частных решений волнового уравнения методом разделения переменных. Будем теперь искать решение уравнения Гельмгольца методом разделение переменных в декартовых координатах. Ищем решение уравнения Гельмгольца для пространственной части решения волнового уравнения в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной пространственной координаты:

$$R(\vec{r}) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z).$$

Подставим $R = XYZ$ в уравнение Гельмгольца и получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(XYZ) + k^2 XYZ = 0.$$

Вынесем за знак производной по x-координате функции Y и Z, величины которых не зависят от переменной x. Аналогично поступим с производными по y и z. Тогда получим:

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + k^2 XYZ = 0,$$

где двумя штрихами обозначена вторая производная в каждом случае по своей переменной величине.

Разделим это равенство на произведение функций XYZ и получим

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0,$$

где первое слагаемое зависит только от x-координаты, второе — только от y, третье — только от z. Это возможно только в том случае, если каждое из этих слагаемых — константа. Обозначим эти константы, как $\left(-k_x^2\right)$, $\left(-k_y^2\right)$, $\left(-k_z^2\right)$. Тогда

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2,$$

и величины k_x, k_y, k_z можно рассматривать, как проекции некоторого вектора $\vec{k}$.

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = -k_x^2 \\ \dfrac{Y''}{Y} = -k_y^2 \\ \dfrac{Z''}{Z} = -k_z^2 \end{cases}$$

Рассмотрим подробнее первое из трех уравнений.

$\dfrac{X''}{X} = -k_x^2$ => $X'' + k_x^2 X = 0$ — это уравнение гармонических колебаний только не от времени, а от пространственной координаты x.

$\tilde{X} = \tilde{X}_{01} e^{ik_x x} + \tilde{X}_{02} e^{-ik_x x}$ — общее комплексное решение этого уравнения.

Общее решение уравнения гармонических колебаний можно получить, как линейную комбинацию решений вида:

$\tilde{X} = \tilde{X}_0 \, e^{ik_x x}$, где k_x принимает два возможных значения с одинаковым модулем, но разными знаками. То, что выбрано слагаемое без минуса в экспоненте — это вопрос соглашения.

Аналогично:

$$\begin{cases} \tilde{Y} = \tilde{Y}_0\, e^{ik_y y} \\ \tilde{Z} = \tilde{Z}_0\, e^{ik_z z} \end{cases}.$$

Подставим $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ в $\tilde{R}$ и получим:

$$\tilde{R} = \tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z} = \tilde{X}_0\, e^{ik_x x}\, \tilde{Y}_0\, e^{ik_y y}\, \tilde{Z}_0\, e^{ik_z z} =$$

$$= \tilde{X}_0 \tilde{Y}_0 \tilde{Z}_0\, e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} = \tilde{R}_0\, e^{i\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)} = \tilde{R}_0\, e^{i\left(\vec{k},\vec{r}\right)}$$

— это частное решение уравнения Гельмгольца.

Вернемся к решению волнового уравнения $\Delta A - \dfrac{1}{V^2}\dfrac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$:

$$\tilde{A}\left(t,\vec{r}\right) = \tilde{R}\tilde{T} = \tilde{R}_0\, e^{i\left(\vec{k},\vec{r}\right)} \cdot \tilde{T}_0\, e^{-i\omega t} = \tilde{A}_0\, e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right) - \omega t\right)},$$

где $\tilde{A}_0 = \tilde{R}_0 \tilde{T}_0$ — произвольная комплексная константа интегрирования.

$\tilde{A} = \tilde{A}_0\, e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right) - \omega t\right)}$ — частное комплексное решение волнового уравнения в виде плоских монохроматических волн.

То, что эта волна плоская, будет видно из анализа решения в последующих вопросах. Монохроматическая волна — это волна, в каждой пространственной точке которой колебания происходят только на одной частоте ω. Напомним, что величины k и ω не являются независимыми, так как произведение kV было нами обозначено как $\omega = kV$, где для электрического $\Delta\vec{E} - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ и магнитного $\Delta\vec{B} - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$ поля $V = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — параметр волнового уравнения.

Есть причина, по которой решение в виде плоских монохроматических волн играет большую роль в оптике. Дело в том, что с помощью преобразования Фурье по времени и координатам можно любую функцию этих переменных разложить по плоским монохроматическим волнам, если функция достаточно быстро спадает на временных и пространственных бесконечностях и не имеет особых точек.

Любое явление, такое как отражение, преломление, рассеяние, поглощение света, можно сначала рассмотреть для плоской монохроматической волны, а затем для любого света, как суперпозиции плоских волн.

Есть еще одна причина, по которой плоские монохроматические волны играют большую роль в оптике. Взаимодействие любой световой волны с веществом с хорошей точностью такое же, как и взаимодействие плоской световой волны. Это справедливо в том случае, если радиусы кривизны поверхности равных фаз световой волны достаточно велики. Велики по сравнению с чем? Есть два параметра с размерностью длины — это длина волны и размер атома. Характерный размер атома составляет десятую долю нанометра, что в тысячи раз меньше длины волны света, а саму длину волны света в оптике рассматривают, как малый параметр по сравнению с геометрическими размерами предметов. В этом смысле в оптике любую световую волну в малом объеме можно рассматривать как плоскую волну. В этом малом объеме световую волну можно считать почти плоской при рассмотрении отражения, преломления, поглощения или рассеяние света.

Плоская симметрия решений связана с тем, что в уравнении Гельмгольца мы разделяли переменные в декартовой системе координат. Если при решении уравнения Гельмгольца разделять переменные в цилиндрической системе координат, то получатся решения волнового уравнения в виде цилиндрических волн. Интересно, что среди этих волн есть волны, которые бегут вдоль оси и одновременно вокруг нее. На большом расстоянии от оси волна почти плоская и распространяется почти вдоль оси. В связи с этим у фотона образуется так называемый орбитальный угловой момент $m\hbar$, где m — целое число:

http://igorivanov.blogspot.ru/2011/04/oam.html

Если разделять переменные в сферической системе координат, то получатся сферические волны; если в трехмерной эллиптической системе — гауссовы пучки, похожие на лазерные пучки лучей, которые мы кратко рассмотрим позднее.

Экзамен. Параметры плоской монохроматической волны.

$\tilde{A}(t,\vec{r}) = \tilde{A}_0 e^{i\left((\vec{k},\vec{r})-\omega t\right)}$ — плоская монохроматическая волна в комплексной форме.

Если эту плоскую монохроматическую волну подставить в волновое уравнение $\Delta\tilde{A} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial t^2} = 0$, то оно превращается в тождество при условии $\omega = kV$ или $k = \frac{\omega}{V}$. Результат подстановки является доказательством того, что рассматриваемая плоская монохроматическая волна является решением волнового уравнения.

Можно доказать, что для любого линейного уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть комплексного решения является вещественным решением.

Тогда $\mathrm{Re}\left(\tilde{A}_0 e^{i\left((\vec{k},\vec{r})-\omega t\right)}\right)$ — плоская монохроматическая волна в вещественной форме, она является решением волнового уравнения при условии $k = \frac{\omega}{V}$.

Величину $\tilde{A}_0$ называют комплексной амплитудой волны. Если представить величину комплексной амплитуды $\tilde{A}_0$, как комплексное число в экспоненциальной форме $\tilde{A}_0 = A_0 e^{i\varphi_0}$, то

A_0 — вещественная амплитуда волны,

φ_0 — начальная фаза волны.

$$\tilde{A}(t,\vec{r}) = \tilde{A}_0\, e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = A_0\, e^{i\varphi_0} e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = A_0\, e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)} =$$

$$= A_0\, e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\varphi_0\right)} e^{-i\omega t} = \tilde{A}_0\, e^{i\left(\vec{k},\vec{r}\right)} e^{-i\omega t}$$

здесь $\tilde{A}_0\, e^{i\left(\vec{k},\vec{r}\right)}$ — комплексная амплитуда колебаний в точке с радиус-вектором $\vec{r}$,

$\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\varphi_0\right)$ — начальная фаза колебаний в точке с радиус-вектором $\vec{r}$,

$\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)$ — фаза волны,

ω — циклическая частота волны, которую для краткости обычно будем просто называть частотой волны,

$\omega = 2\pi\nu$, где ν — частота волны.

$\nu = \dfrac{1}{T}$, где T — период волны,

$\vec{k}$ — волновой вектор, как будет показано в следующем вопросе, он направлен перпендикулярно поверхности равных фаз,

$k \equiv \left|\vec{k}\right|$ — волновое число,

$k = \dfrac{\omega}{V} = \dfrac{\omega}{\lambda\nu} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, где λ — длина волны или пространственный период волны в направлении вектора $\vec{k}$, фазовая скорость $V = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda\nu$ для волны любой природы.

$\dfrac{1}{\lambda}$ — пространственная частота волны, так как λ — пространственный период.

Тогда $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — циклическая пространственная частота волны,

k_x, k_y, k_z — циклические пространственные частоты вдоль осей x, y, z.

<u>Экзамен. Фазовая скорость волны.</u>

Пусть $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ — единичные векторы вдоль декартовых осей координат.

Рассмотрим волну $\tilde{A}(t,\vec{r}) = \tilde{A}_0\, e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$. Направим ось z вдоль вектора $\vec{k}$. Тогда $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$ => $k_x = k_y = 0$ => $k_z = \left|\vec{k}\right| = k$.

Тогда $\left(\vec{k},\vec{r}\right) = k_x x + k_y y + k_z z = kz$ =>

$\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right) = kz - \omega t + \varphi_0$ — фаза волны.

Зафиксируем момент времени t и приравняем фазу к константе. Получающееся при этом уравнение относительно пространственных координат оказывается уравнением поверхности равных фаз или уравнением поверхности постоянной фазы:

$$\left.\begin{aligned} & kz-\omega t+\varphi_0=const \\ & t=const \end{aligned}\right\} \quad => \quad z=const$$ — уравнение поверхности равных фаз или фазовой поверхности. Поверхность равных фаз называют еще фронтом волны.

Поверхность равных фаз $z=const$ — это плоскость, следовательно, волна $\tilde{A}(t,\vec{r})=\tilde{A}_0\,e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$ действительно плоская. Поверхность $z=const$ перпендикулярна единичному вектору $\vec{e}_z$, направленному вдоль оси z. Вектор $\vec{e}_z$ совпадает по направлению с вектором $\vec{k}$ (направление оси z так было выбрано). Следовательно, для плоской волны фронт волны всегда перпендикулярен волновому вектору $\vec{k}$.

Неплоскую волну в малом объеме можно считать почти плоской, если радиусы кривизны фронта гораздо больше размеров рассматриваемого объема. Тогда направление, перпендикулярное поверхности равных фаз, можно считать направлением волнового вектора и для неплоской волны.

Найдем теперь фазовую скорость волн, под которой будем понимать скорость перемещения поверхности равной фазы, фазы равной некоторой постоянной величине.

Ось z опять направим вдоль вектора $\vec{k}$ и продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз $kz-\omega t+\varphi_0=const$, в котором координату z будем считать функцией времени t.

$$kz-\omega t+\varphi_0=const \qquad \Big| \quad \frac{d\,\cdot}{dt} \quad =>$$

$$k\frac{dz}{dt}-\omega\frac{dt}{dt}=0 \quad => \quad \frac{dz}{dt}=\frac{\omega}{k}$$ — фазовая скорость, обозначим ее, как $V_ф$, тогда

$$V_ф=\frac{\omega}{k},$$ что справедливо для плоской волны любой природы, не только для световой волны.

Поверхность равных фаз движется вдоль оси z, следовательно, туда же направлена фазовая скорость и с учетом $\vec{k}\uparrow\uparrow\vec{e}_z$ получаем

$$\vec{V}_ф\uparrow\uparrow\vec{k}.$$

Напомним, что при поиске решения волнового уравнения мы для краткости ввели обозначение $\omega\equiv kV$. Подставляя его в формулу для фазовой скорости $V_ф=\dfrac{\omega}{k}$, получим $V_ф=V$.

Как было показано в вопросе "Волновые уравнения ... в прозрачной изотропной среде" $V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Тогда фазовая скорость электромагнитных волн равна

$$V_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Из этого равенства можно найти величину показателя преломления n. По определению показателя преломления $V_\phi = \frac{c}{n}$. Сравнивая это равенство с равенством $V_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, получаем

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

В оптике $\mu \approx 1$ => $n \approx \sqrt{\varepsilon}$.

Обычно в оптике $n > 1$ и соответственно $V_\phi < c$. Однако, в узком диапазоне частот вблизи линии поглощения возможно выполнение условий $0 < n < 1$ и $V_\phi > c$. Наконец, в некоторых экзотических ситуациях (в метаматериалах),
http://ru.wikipedia.org/wiki/Метаматериал
когда одновременно $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$, фазовая скорость оказывается даже отрицательной величиной $V_\phi < 0$ и $n < 0$. Подробнее смотрите работу:

Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ. // УФН. 1967. Т. 92. Вып. 3. С. 517-526.

Экзамен. Поперечность световых волн.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = a$.

Возьмем от него производную и получим $y'' = 0$.

Общее решение второго уравнения имеет вид: $y = Ax + B$.

Не все решения второго уравнения являются решениями первого уравнения. Лишние решения появились в результате дифференцирования первого уравнения, так как при этом часть информации о решениях была утеряна.

Вернемся к рассмотрению волнового уравнения.

Волновое уравнение для вектора $\vec{E}$ было получено в результате дифференцирования, то есть применения операции $rot(\cdot)$, к одному из уравнений системы Максвелла. Следовательно, не все решения волнового уравнения являются решениями системы уравнений Максвелла.

Подставим вещественное решение волнового уравнения для векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в виде плоских монохроматических волн в уравнения Максвелла и проверим, являются ли они решениями уравнений Максвелла.

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\right) = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}\right) \qquad \vec{B} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{B}}\right) = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{B}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}\right)$$

Для нас будет важно, что оба поля зависят от координат и времени только через их комбинацию в виде $\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)$. Обозначим эту комбинацию буквой $\varphi \equiv \left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t$.

φ — это фаза волны без учета начальной фазы φ_0, которая спрятана в комплексных амплитудах $\tilde{\vec{E}}_0$ и $\tilde{\vec{B}}_0$ и может оказаться различной для различных проекций векторов $\vec{E}(\varphi)$ и $\vec{B}(\varphi)$.

Рассмотрим производную по времени, например, от вектора $\vec{E}(\varphi)$:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial t} = -\omega\cdot\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}.$$

То есть для вещественной плоской монохроматической волны все равно электрического или магнитного поля имеем:

$$\frac{\partial\,\cdot}{\partial t} = -\omega\frac{d\,\cdot}{d\varphi}.$$

Рассмотрим теперь производную от вектора $\vec{E}(\varphi)$ по x координате:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial x} =$$

$$= \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)}{\partial x} = k_x\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}$$

Тогда для вещественной плоской монохроматической волны:

$$\frac{\partial\,\cdot}{\partial x} = k_x\frac{d\,\cdot}{d\varphi}.$$

Тогда

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}_x k_x\frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_y k_y\frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_z k_z\frac{d}{d\varphi} = \vec{k}\frac{d}{d\varphi}.$$

Теперь вернемся к рассмотрению уравнений Максвелла для вещественных плоских монохроматических волн.

$$div\left(\vec{D}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\vec{\nabla},\vec{D}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\vec{k}\frac{d}{d\varphi},\vec{D}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{d\varphi}\left(\vec{k},\vec{D}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\vec{k},\vec{D}\right) = const.$$

Константа в правой части равенства не зависит ни от координат, ни от времени. Рассмотрим это равенство в некоторый момент времени, а затем рассмотрим его же в другой момент времени через половину периода световой волны. Каждая проекция вектора $\vec{D}$ через половину периода поменяет знак, вектор $\vec{k}$ от времени не зависит, следовательно, левая часть равенства поменяет знак через половину периода. Правая часть равенства тоже обязана поменять знак через половину периода, но она не может измениться, так как она — константа. Такое возможно только при условии, что константа равна нулю. Тогда $\left(\vec{k},\vec{D}\right)=0$.

Следовательно

$\vec{D}\perp\vec{k}$ => $\vec{E}\perp\vec{k}$.

Аналогично из равенства $div\left(\vec{B}\right)=0$ получаем $\vec{B}\perp\vec{k}$.