

Лекционные демонстрации, 10 минут.

Экзамен. Циркулярно поляризованный свет или свет круговой поляризации.

Свет поляризован по кругу, если вектор $\vec{E}$ вращается вокруг луча.

Факультативная вставка.

В разных учебниках по оптике один и тот же свет называют то светом левой, то светом правой круговой поляризации. Если для вас важно, какую из двух круговых поляризаций называть левой, то вы должны сами дать определение левой и правой круговой поляризации.

В учебнике Бутикова и в монографии Борна и Вольфа дано следующее определение света левой круговой поляризации. Если вы смотрите навстречу лучу и конец вектора $\vec{E}$ вращается налево, против часовой стрелки, то вы видите свет левой круговой поляризации.

Логика такого определения состоит в том, что если вы смотрите на вращающийся электрический диполь, то диполь, вращающийся налево, излучает в вашем направлении свет левой круговой поляризации.

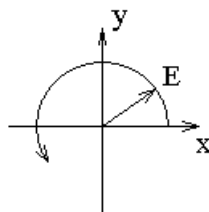
Заметим, что в таком случае направление вращения вектора $\vec{E}$ образует правый винт с направлением света. По этой причине в курсе теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица такой свет называют светом правой круговой поляризации.

Примем определение левой круговой поляризации в соответствии с учебником Бутикова и монографией Борна и Вольфа.

Конец факультативной вставки.

Рассмотрим свет, который распространяется вдоль оси z , тогда $\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_z$.

Пусть ось z направлена на нас. Для левой круговой поляризации вектор $\vec{E}$ вращается налево, против часовой стрелки.



Тогда в фиксированной пространственной точке электрическое поле имеет следующий вид:

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos(\omega t) \\ E_y = E_0 \cdot \sin(\omega t) = E_0 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

Круговая поляризация — это сумма двух линейных поляризаций со сдвигом фаз $\frac{\pi}{2}$.

Тогда в комплексном представлении плоская световая волна левой круговой поляризации имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = E_0 \cdot e^{i(kz - \omega t + \varphi_0)} \\ \tilde{E}_y = E_0 \cdot e^{i\left(kz - \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \varphi_0\right)}, \end{cases} \quad \text{где } (\vec{k}, \vec{r}) = kz, \text{ так как } \vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_z.$$

Объединим две комплексных проекции вектора $\vec{E}$ в один комплексный вектор и получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{E}} &= \tilde{E}_x \vec{e}_x + \tilde{E}_y \vec{e}_y = E_0 \vec{e}_x e^{i(kz - \omega t + \varphi_0)} + E_0 \vec{e}_y e^{i\left(kz - \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \varphi_0\right)} = \\ &= E_0 \vec{e}_x e^{i(kz - \omega t + \varphi_0)} + E_0 \vec{e}_y e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i(kz - \omega t + \varphi_0)} = E_0 (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) \cdot e^{i(kz - \omega t + \varphi_0)}. \end{aligned}$$

Здесь удобно ввести единичный вектор круговой поляризации. Вектор $(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$ не вполне для этого подходит, так как его длина не равна единице.

Найдем длину вектора $(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$. Квадрат длины вектора равен скалярному произведению вектора самого на себя. Скалярное произведение двух произвольных комплексных векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ выражается через комплексные проекции этих векторов следующим образом:

$$(\vec{A}, \vec{B}) = A_x B_x^* + A_y B_y^* + A_z B_z^*.$$

Пусть в этом равенстве векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ равны друг другу $\vec{A} = \vec{B} = \vec{e}_x + i\vec{e}_y$, тогда

$$|\vec{A}|^2 = (\vec{A}, \vec{A}) = (\vec{e}_x + i\vec{e}_y, \vec{e}_x + i\vec{e}_y) = 1 \cdot 1^* + i \cdot (i)^* + 0 \cdot 0^* = 1 \cdot 1 + i \cdot (-i) = 2.$$

Следовательно, длина вектора $(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$ равна $\sqrt{2}$. Разделим вектор на его длину и получим единичный вектор.

$$\begin{cases} \vec{e}_+ \equiv \frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \\ \vec{e}_- \equiv \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{— единичные векторы левой и правой круговых}$$

поляризаций света, распространяющегося вдоль оси z .

Вернемся к рассмотрению плоской световой волны левой круговой поляризации:

$$\tilde{\vec{E}} = E_0 (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) \cdot e^{i(kz - \omega t + \varphi_0)} = \sqrt{2} \cdot E_0 \cdot \vec{e}_+ \cdot e^{i(kz - \omega t + \varphi_0)}, \quad \text{где } E_0 \text{ —}$$

вещественная амплитуда каждой линейной поляризации.

Будем называть величину $\sqrt{2}E_0$ вещественной амплитудой волны круговой поляризации.

Переобозначим $\sqrt{2}E_0$ за новое E_0 , тогда в новых обозначениях:

$\vec{\tilde{E}} = E_0 \vec{e}_+ e^{i(kz - \omega t + \varphi_0)}$, где $\frac{E_0}{\sqrt{2}}$ — длина вращающегося вектора

электрического поля и вещественная амплитуда каждой линейной поляризации, E_0 — вещественная амплитуда круговой поляризации.

Новые обозначения удобны тем, что выражение для интенсивности света $I = \frac{\varepsilon_0 c n}{\mu} \langle E^2 \rangle_t = \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} E_0^2$ оказывается справедливым и для линейной и для круговой поляризации света.

В системе СГС Гаусса: $I = \frac{cn}{4\pi\mu} \langle E^2 \rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu} E_0^2$.

Экзамен. Эллиптическая поляризация света.

Направим ось z вдоль луча, тогда $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$.

Сложим две волны, линейно поляризованные вдоль осей x и y . Пусть разность фаз этих волн произвольна. Суммарную волну можно записать в виде:

$\vec{\tilde{E}} = E_0 \vec{e}_p e^{i(kz - \omega t + \varphi_0)}$, где

$\vec{e}_p$ — единичный комплексный вектор эллиптической поляризации.

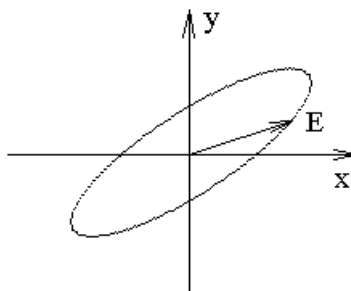
$$\vec{e}_p \perp \vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{e}_p, \vec{e}_z) = 0$$

$$\vec{e}_p = \frac{\tilde{a}\vec{e}_x + \tilde{b}\vec{e}_y}{\sqrt{|\tilde{a}|^2 + |\tilde{b}|^2}}, \text{ где } \tilde{a} \text{ и } \tilde{b} \text{ — произвольные комплексные числа для}$$

произвольной эллиптической поляризации.

$\vec{e}_p$ — единичный вектор, что следует из равенства $(\vec{e}_p, \vec{e}_p) = 1$, которое можно проверить, расписав скалярное произведение в декартовых координатах.

В эллиптически поляризованной волне конец вектора $\vec{E}$ движется по эллипсу в плоскости перпендикулярной лучу.



Для каждой эллиптической поляризации $\vec{e}_{p1}$ существует ортогональная к ней поляризация $\vec{e}_{p2}$:

$$(\vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p2}) = 0.$$

Любую монохроматическую волну, направленную вдоль оси z , можно представить, как сумму двух не интерферирующих волн: двух ортогональных

линейных поляризаций $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$, двух ортогональных круговых поляризаций $\vec{e}_+$ и $\vec{e}_-$ или двух ортогональных эллиптических поляризаций $\vec{e}_{p1}$ и $\vec{e}_{p2}$.

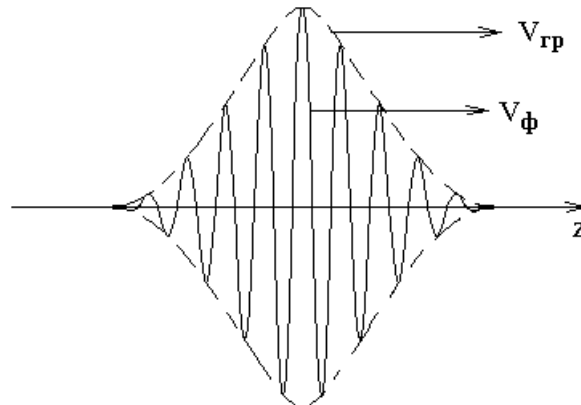
Для света эллиптической поляризации выполняется тоже соотношение между интенсивностью света и амплитудой волны $I = \frac{\varepsilon_0 c n}{\mu} \langle E^2 \rangle_t = \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} E_0^2$, что и для света линейной и круговой поляризации.

$$\text{В системе СГС Гаусса: } I = \frac{cn}{4\pi\mu} \langle E^2 \rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu} E_0^2.$$

Неполяризованный или как говорят естественный свет — это обязательно не совсем монохроматический свет. Если неполяризованный свет почти монохроматический, то это свет эллиптически поляризованный, но параметры эллипса случайным образом медленно изменяются во времени. Характерное время изменения параметров эллипса поляризации равно $\frac{1}{\Delta\omega}$, где $\Delta\omega$ — ширина спектра источника света. Пример неполяризованного света — солнечный свет. Свет лампы накаливания тоже не поляризован. В лампе накаливания источником света является проводящая ток нить, добела разогретая током. Для солнечного света и света лампы накаливания $\Delta\omega \approx \omega$.

Экзамен. Групповая скорость волн.

Рассмотрим световой импульс. Импульс имеет огибающую — относительно медленную функцию координат и времени, и имеет заполнение в виде относительно высокочастотной синусоиды, которую еще называют несущей.



Групповая скорость $V_{гр}$ — это скорость движения огибающей светового импульса.

Фазовая скорость $V_{ф}$ — это скорость движения заполнения светового импульса, скорость движения несущей.

Групповая скорость волн отличается от фазовой скорости только в том случае, когда фазовая скорость зависит от частоты ω . Зависимость фазовой скорости от частоты называют дисперсией для волн любой природы. Для

световой волны $V_\phi = \frac{c}{n}$, то есть $V_{gp} \neq V_\phi$ при условии $n(\omega) \neq const$.

Зависимость показателя преломления света от частоты или длины волны называют дисперсией света.

Групповая скорость — понятие не очень строгое. Это связано с тем, что световой импульс в процессе распространения в среде несколько деформируется, а скорость огибающей при деформации импульса теряет смысл. Чтобы не утонуть в возникающих при этом математических затруднениях, рассмотрим нестрогий вывод формулы для групповой скорости.

Пусть две плоские волны с частотами ω_1 и ω_2 распространяются в направлении оси z . Пусть разность частот мала: $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$. Пусть вещественные амплитуды двух волн одинаковы и равны A_0 .

Рассмотрим волны в вещественном представлении:

$$\begin{aligned} A(t, z) &= A_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t) + A_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t) = \\ &= 2 A_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \end{aligned}$$

где использовано соотношение

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} \frac{k_1 + k_2}{2} = k \\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \omega_2 - \omega_1 = \delta\omega \\ k_2 - k_1 = \delta k \end{cases}.$$

$$\text{Тогда} \quad \begin{cases} \frac{k_1 - k_2}{2} = -\frac{\delta k}{2} = -\frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{\delta\omega}{2} \\ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = -\frac{\delta\omega}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k_1 - k_2}{2} = -\frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{\delta\omega}{2} \\ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = -\frac{\delta\omega}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} A(t, z) &= 2 A_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) = \\ &= 2 A_0 \cos\left(-\frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{\delta\omega}{2} z + \frac{\delta\omega}{2} t\right) \cdot \cos(kz - \omega t) = \\ &= 2 A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right) \frac{\delta\omega}{2}\right) \cdot \cos(kz - \omega t). \end{aligned}$$

Здесь $2 A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right) \frac{\delta\omega}{2}\right)$ — огибающая, которая медленно

изменяется при изменении t или z , так как $|\delta\omega| \ll \omega$.

$\cos(kz - \omega t)$ — несущая.

Для рассматриваемой формы огибающей $2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega}z - t\right)\frac{\delta\omega}{2}\right)$ можно

сказать, что $\left(\frac{dk}{d\omega}z - t\right)\frac{\delta\omega}{2}$ — это фаза огибающей. Тогда групповую скорость или скорость движения огибающей можно найти, как скорость движения поверхности равных фаз огибающей.

С этой целью продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз огибающей:

$\left(\frac{dk}{d\omega}z - t\right)\frac{\delta\omega}{2} = \text{const}$, где переменные величины только z и t , и получим

$$\left(\frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{dz}{dt} - \frac{dt}{dt}\right) \cdot \frac{\delta\omega}{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\frac{dz}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$ — скорость движения поверхности равных фаз огибающей или

скорость движения огибающей, она же по определению равна групповой скорости волн V_{gp} . Тогда

$V_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$ — групповая скорость для волны любой природы, не только для

световой волны. Выражение для групповой скорости $V_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$ напоминает

выражение для фазовой скорости $V_{\phi} = \frac{\omega}{k}$.

Групповая скорость — это скорость передачи информации, поэтому она не может быть больше скорости света в пустоте $V_{gp} \leq c$. Формально

неравенство $\frac{d\omega}{dk} > c$ возможно, но при этом условии световой импульс расплывается быстрее, чем перемещается, и понятие групповой скорости теряет смысл.

Факультативно. Обычно групповая скорость света меньше фазовой скорости.

Это следует из неравенства $\frac{dn}{d\omega} > 0$, которое называют условием нормальной дисперсии. Это неравенство будет обосновано позднее. Напомним, что дисперсия света — это зависимость показателя преломления от частоты или от длины волны.

$$V_{\phi} = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n\omega}{c}, \text{ тогда}$$

$$V_{zp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{n\omega}{c}\right)} = c \frac{d\omega}{d(n\omega)} = \frac{c}{\frac{d(n\omega)}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} < \frac{c}{n} = V_{\phi} \quad \Rightarrow$$

$$V_{zp} < V_{\phi} \text{ при условии нормальной дисперсии } \frac{dn}{d\omega} > 0.$$

Экзамен. Стоячие световые волны.

При нормальном падении света на зеркало свет отражается обратно.

Две встречные волны одинаковой амплитуды образуют стоячую волну.

Рассмотрим встречные волны, направленные вдоль оси z . Пусть волны линейно поляризованы вдоль оси y . Запишем встречные волны в вещественном представлении:

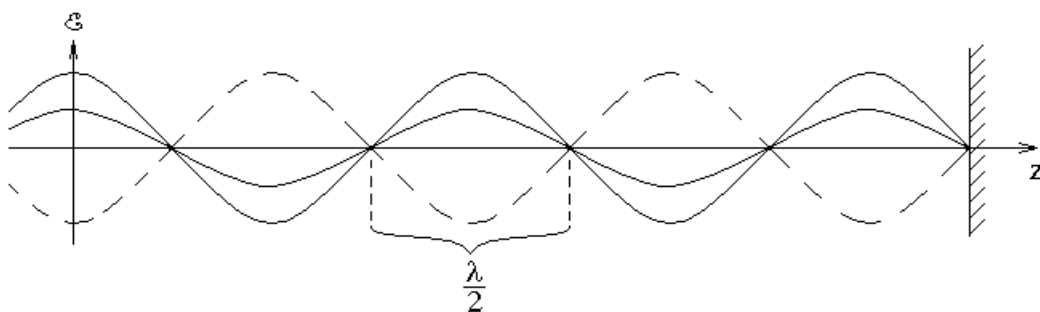
$$E_y(t, z) = E_0 \cos(kz - \omega t) + E_0 \cos(-kz - \omega t).$$

Второе слагаемое описывает встречную волну, так как в нем z заменено на $(-z)$. И действительно, если первая волна распространяется вдоль оси z , то вторая волна — вдоль оси $(-z)$.

Преобразуем сумму косинусов в произведение согласно формуле $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ и получим

$$E_y(t, z) = E_0 \cos(kz - \omega t) + E_0 \cos(-kz - \omega t) = 2E_0 \cos(kz) \cdot \cos(\omega t)$$

Построив эту функцию от z в разные моменты времени t , мы увидим, что в некоторых точках $\cos(kz) = 0$ суммарная волна остается равной нулю в любой момент времени. Эти точки называются узлами стоячей волны. Они расположены на расстоянии $\frac{\lambda}{2}$ друг от друга.



Посередине между узлами стоячей волны колебания суммарной волны максимальны. Эти точки называются пучностями стоячей волны.

Оказывается, что в узлах поля $\vec{E}$ находятся пучности поля $\vec{B}$ и наоборот. Дело в том, что если в некоторой точке электрические поля встречных волн синфазны и усиливают друг друга, то магнитные поля противофазны. И действительно. Векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$ образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов. Если один из тройки векторов $\vec{E}$ направления не меняет, а второй $\vec{k}$ — меняет на противоположное (для встречной волны), то

третий вектор $\vec{B}$ тоже обязан изменить знак для сохранения правой тройки векторов. Значит, если в некоторой точке в некоторый момент времени векторы $\vec{E}$ встречных волн синфазны и образуют пучность поля $\vec{E}$, то в этой точке в этот же момент векторы $\vec{B}$ противофазны и образуют узел поля $\vec{B}$.

При отражении света от металлического зеркала на зеркале образуется узел поля $\vec{E}$, как на рисунке и пучность поля $\vec{B}$. Чтобы понять, почему так происходит, рассмотрим отражение от идеального металлического зеркала.

Сверхпроводник — это идеальное зеркало для радиоволн и электромагнитного излучения более низких частот.

Пусть свет падает на зеркало нормально. Световые волны поперечны, поэтому на зеркале будут присутствовать только тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей. Нормальные составляющие равны нулю.

Рассмотрим граничные условия для тангенциальных составляющих полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$:

$$\begin{cases} E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \mu_0 i \end{cases}$$

$$\text{В системе СГС Гаусса: } \begin{cases} E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{cases}$$

В сверхпроводнике нет ни электрического поля $\vec{E}$, ни магнитного поля $\vec{B}$. Тогда для полей над поверхностью сверхпроводника справедливы следующие граничные условия:

$$\begin{cases} E_{\tau} = 0 \\ B_{\tau} = \mu_0 i \end{cases}$$

Следовательно, на поверхности идеального зеркала поле $\vec{E}$ обращается в ноль, а поле $\vec{B}$ может быть отлично от нуля, и это приведет только к появлению поверхностных токов i . Это и означает, что на зеркале находится узел поля $\vec{E}$ и пучность поля $\vec{B}$.