

Экзамен. Твердотельные лазеры с нелинейным кристаллом.

Генерация зеленого света с длиной волны 532 нм.

Мощный лазерный диод с длиной волны 808 нм создает оптическую накачку для лазера с длиной волны 1064 нм. Активной средой этого лазера является стекло с примесью атомов неодима Nd, между уровнями которого создается инверсия заселенности. Длина волны излучения зеленого лазера получается в результате удвоения частоты на нелинейном кристалле $1064 \text{ нм} / 2 = 532 \text{ нм}$. Удвоение частоты, оно же генерация второй гармоники, относится к эффектам нелинейной оптики.

Факультативная вставка.

Для более дорогих и качественных лазеров вместо стекла используется кристалл иттрий-алюминиевого граната $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ опять же с примесью атомов Nd. Для удвоения частоты генерации лазера его излучение пропускают через оптически нелинейный кристалл (титанила-фосфата калия KTiOPO_4 , сокращённо КТР).

Конец факультативной вставки.

Можно сказать, что удвоение частоты в кристалле происходит в результате поглощения двух фотонов с длиной волны 1064 нм и излучения вместо них одного фотона 532 нм с энергией равной сумме энергий двух фотонов. Частота света удваивается, длина волны — уполовинивается.

Факультативная вставка.

Поглощение двух фотонов и излучение одного — это не совсем правильное описание. Нелинейный кристалл прозрачен для соответствующего света, нет уровней энергии соответствующих поглощениям двух фотонов.

Конец факультативной вставки.

Это же явление можно описать с волновой точки зрения без рассмотрения фотонов. Поляризация среды пропорциональна напряженности электрического поля $P = \chi E$, но это только в слабом световом поле. В сильном поле зависимость нелинейная (нелинейная оптика) и эту зависимость можно разложить в ряд Тейлора

$$P = \chi_1 E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 + \dots$$

Подставим световое поле $E = E_0 \cos(\omega t)$ во второе слагаемое суммы и получим

$$\chi_2 E^2 = \chi_2 E_0^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} \chi_2 E_0^2 + \frac{1}{2} \chi_2 E_0^2 \cos(2\omega t).$$

Таким образом, в поляризации среды появляется слагаемое на удвоенной частоте. Поляризация — это объемная плотность дипольного момента. То есть диполи среды осциллируют не только на частоте вынуждающего поля, но и на удвоенной частоте. Осциллирующие диполи излучают свет с этой удвоенной частотой, излучают вторую гармонику.

Слагаемое $\chi_3 E^3$ позволяет получить излучение утроенной частоты, но только в более сильном световом поле.

К нелинейной оптике относится также генерация суммарной частоты при сложении двух сильных световых полей разных частот. В частности по такой схеме происходит генерация желтых полупроводниковых лазеров.

Суммарная частота (в других случаях — разностная частота), подобно генерации второй гармоники, возникает за счет слагаемого $\chi_2 E^2$ в поляризации среды:

$$\begin{aligned}\chi_2 E^2 &= \chi_2 (E_{01} \cos(\omega_1 t) + E_{02} \cos(\omega_2 t))^2 = \\ &= \chi_2 (E_{01}^2 \cos^2(\omega_1 t) + 2E_{01}E_{02} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) + E_{02}^2 \cos^2(\omega_2 t)) \\ 2\chi_2 E_{01}E_{02} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) &= \chi_2 E_{01}E_{02} \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + \chi_2 E_{01}E_{02} \cos((\omega_1 - \omega_2)t)\end{aligned}$$

Факультативная вставка.

В лазере на неодимовом стекле кроме генерации с длиной волны 1064 нм возникают более слабые генерации с длинами волн 1319 нм и 1342 нм. Длина волны желтого лазера получается при одновременном пропускании излучения с двумя длинами волн через нелинейный кристалл по следующей схеме

$$808 \text{ нм} \xrightarrow[\text{оптическая накачка}]{} \left\{ \begin{array}{l} 1064 \text{ нм} \\ 1342 \text{ нм} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{сложение частот}]{} 593.5 \text{ нм}. \text{ Энергия одного фотона}$$

1064 нм в сумме с энергией одного фотона 1342 нм дает энергию одного фотона 593.5 нм. Аналогично $808 \text{ нм} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1064 \text{ нм} \\ 1319 \text{ нм} \end{array} \right\} \rightarrow 589 \text{ нм}.$

Конец факультативной вставки.

Длины волн лазера на атомах Nd определяются уровнями энергии атома и от температуры не зависят. Соответственно, длина волны генерации зеленого лазера и желтых лазеров не изменяется при изменении температуры лазера.

Экзамен. Центр инверсии. Хиральность. Оптическая активность.

Казалось бы, при изменении знака напряженности электрического поля световой волны знак наведенной полем поляризации просто изменится без изменения модуля поляризации. То есть зависимость поляризации среды от напряженности светового поля — нечетная функция даже в случае нелинейной зависимости. Это в свою очередь означает, что в ряду Тейлора для поляризации должны остаться только слагаемые с нечетными степенями. Удвоенная частота не образуется на нечетных степенях косинуса основной частоты. На нечетных степенях косинуса образуются только нечетные гармоники.

Можно доказать, что эти рассуждения справедливы только в том случае, если среда обладает центром инверсии. Центр инверсии — это такая точка, что если в эту точку поместить начало координат, то при изменении знака радиус-вектора любого атома получается радиус-вектор другого такого же атома. Преобразование инверсии — замена $\vec{r}$ на $-\vec{r}$. Существуют кристаллы, у которых нет центра инверсии. Если кристалл обладает хиральностью, то это гарантирует отсутствие центра инверсии кристалла и дает возможность генерации на нем света второй гармоники.

Хиральность предмета означает, что при зеркальном отражении предмета получается другой предмет, который никакими поворотами нельзя совместить с первым предметом. Рука человека хиральна. Хиральны кристаллы кварца, сахара, ниобата лития LiNbO_3 и др.

Если у кристалла есть центр инверсии, то преобразование инверсии оставляет кристалл без изменения. Преобразование инверсии эквивалентно повороту на 180° и отражению в зеркале перпендикулярном оси поворота. Хиральный кристалл после отражения превращается в другой кристалл, который нельзя поворотами совместить с исходным кристаллом. То есть хиральный кристалл не имеет центра инверсии, следовательно, на хиральном кристалле возможно получение генерации второй гармоники.

Факультативная вставка.

При распространении в кристалле линейно поляризованного света перед поляризацией как бы стоит вопрос, а не повернуться ли несколько вокруг луча в ту или иную сторону. В хиральном кристалле право и лево неравноправны, поэтому происходит поворот плоскости поляризации света. Можно сказать, что хиральность кристалла, в котором право и лево неравноправны, означает его некоторую спиральность.

Конец факультативной вставки.

Если линейно поляризованный свет пропустить через среду из хиральных молекул, то по мере прохождения среды плоскость поляризации света поворачивается. Поворот плоскости поляризации в среде называют явлением естественной оптической активности. Например, плоскость поляризации света поворачивается при прохождении света через раствор сахара в воде.

Экзамен. Условие фазового синхронизма.

Генерация второй гармоники — это частный случай более общего нелинейного взаимодействия света со средой, при котором из двух фотонов (в общем случае — разных частот) формируется один фотон. Условие фазового синхронизма в этом более общем случае выглядит следующим образом $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$, где $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ — волновые векторы складываемых фотонов 1 и 2, а $\vec{k}_3$ — волновой вектор суммарного фотона 3. Условие фазового синхронизма похоже на закон сохранения импульса, так как в вакууме импульс фотона $\vec{p} = \hbar \vec{k}$. Тогда $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ эквивалентно закону сохранения импульса $\vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. К этому закону сохранения импульса добавляют закон сохранения энергии $\hbar \omega_3 = \hbar \omega_1 + \hbar \omega_2$, где энергия связана с частотой соотношением $E = \hbar \omega$.

Условием фазового синхронизма называют либо условие $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$, либо два

$$\text{условия} \begin{cases} \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \\ \vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \end{cases}.$$

В еще более общем случае частоты, как и волновые векторы, могут не только складываться, но и вычитаться. Складываться могут не только два

фотона, но и большее количество фотонов, и в результате взаимодействия может получаться больше одного фотона.

Факультативная вставка.

При генерации второй гармоники с учетом нормальной дисперсии света $\frac{dn}{d\omega} > 0$ на большей частоте (на удвоенной частоте) свет имеет большее

значение показателя преломления n и меньшую фазовую скорость $\frac{c}{n}$. Пусть на

входе света в нелинейную среду разность фаз излучения первой и второй гармоник равна нулю. По мере распространения первой и второй гармоники с разной фазовой скоростью, на некотором расстоянии от входа в среду разность фаз изменится и станет равной π . В этом месте излучение второй гармоники будет по-прежнему формироваться в фазе с излучением первой гармоники. Но это новое излучение второй гармоники окажется в противофазе с излучением второй гармоники, пришедшим из начала среды. То есть новое излучение диполей будет уменьшать суммарное излучение второй гармоники. В результате, по мере продвижения излучения в среде мощность излучения второй гармоники сначала усиливается, затем ослабляется до нуля, затем снова усиливается, изменяясь периодически. Это явление мешает получить излучение второй гармоники с большой амплитудой.

Обойти это препятствие можно за счет явления двулучепреломления света в кристалле (будет рассмотрено позднее в кристаллооптике). Двулучепреломлением называется явление, когда две ортогональные линейные поляризации света имеют два разных показателя преломления. Дело в том, что в кристалле в каждом направлении могут распространяться две волны с разной поляризацией и разной фазовой скоростью, причем показатели преломления зависят от направления света относительно кристалла. У второй гармоники показатель преломления больше, а фазовая скорость меньше, чем у первой гармоники. Но если из двух лучей первой гармоники взять луч с большим показателем преломления, а из двух лучей второй гармоники рассмотреть луч с меньшим показателем преломления, то поворачивая кристалл относительно луча можно добиться того, что показатели преломления первой и второй гармоники станут одинаковыми. При этом фазовая скорость $V_\phi = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k}$ двух

гармоник тоже окажется одинаковой, здесь для второй гармоники удваивается ω , и удваивается $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

При равенстве показателей преломления амплитуда второй гармоники будет непрерывно возрастать вдоль направления распространения света в среде, так как генерация второй гармоники в каждой точке среды будет иметь ту же фазу, что и излучение второй гармоники сгенерированное в предыдущих точках среды и пришедшее в эту точку. Это равенство фаз является основной частью условия фазового синхронизма, которое необходимо для получения излучения второй гармоники с большой амплитудой.

Для генерации второй гармоники при условии $n_{2\omega} = n_{\omega}$ волновое число $k_{2\omega} = \frac{n_{2\omega} 2\omega}{c} = \frac{n_{\omega} \omega}{c} + \frac{n_{\omega} \omega}{c} = k_{\omega} + k_{\omega}$, что соответствует условию фазового синхронизма $k_{2\omega} = k_{\omega} + k_{\omega}$.

Конец факультативной вставки.

Условие фазового синхронизма при генерации второй гармоники — это условие, при котором излучение удвоенной частоты формируется синфазно излучению удвоенной частоты, которое приходит из других точек среды.

Условие $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ означает, что световая волна $\vec{k}_3$ в каждой точке среды генерируется в той же фазе (фазовый синхронизм), что и волна $\vec{k}_3$, пришедшая в эту точку и сгенерированная в предыдущих точках среды. Условие $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ означает баланс энергий фотона новой волны из двух фотонов старых волн.

В лазере на неодимовом стекле условия синхронизма выполняются либо для генерации второй гармоники зеленого излучения 532 нм, либо для излучения одного из желтых лазеров 589 нм или 593.5 нм. Для подбора условия синхронизма, нужно несколько повернуть нелинейный кристалл относительно лазерного луча. При таких поворотах изменяется показатель преломления и скорость необыкновенного луча.

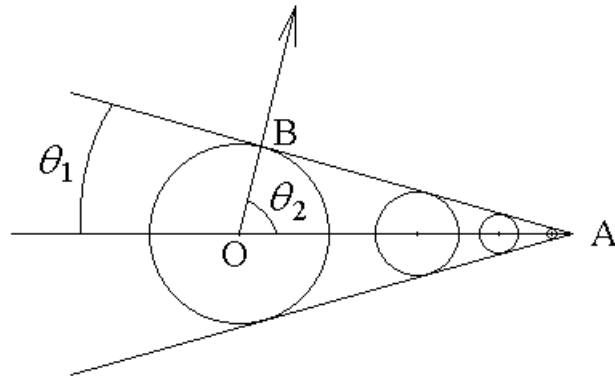
Экзамен. Излучение Вавилова — Черенкова. Черенковский счетчик.

Излучение Вавилова — Черенкова возникает, когда электрически заряженная элементарная частица пролетает прозрачную для света среду, например — стекло, со скоростью большей скорости света в этой среде $V > \frac{c}{n}$.

Излучение, которое возникает в разных частях среды, складывается в одинаковой фазе в некоторых направлениях. Именно в этих направлениях и возникает излучение.

Летающий с большой скоростью заряд вызывает ускоренное смещение электронов в атомах среды. Ускоренно движущиеся электроны среды излучают. Направление излучения перпендикулярно фронту волны, а фронт волны в каждый момент времени получается, как граница множества точек, до которых к этому моменту успела дойти электромагнитная волна. На рисунке ниже изображено движение заряда с большой скоростью $V > \frac{c}{n}$ слева направо.

Окружностями изображены сферы, до которых излучение успевает дойти со скоростью $\frac{c}{n}$ от той точки, где оно возникает при прохождении этой точки движущимся зарядом.

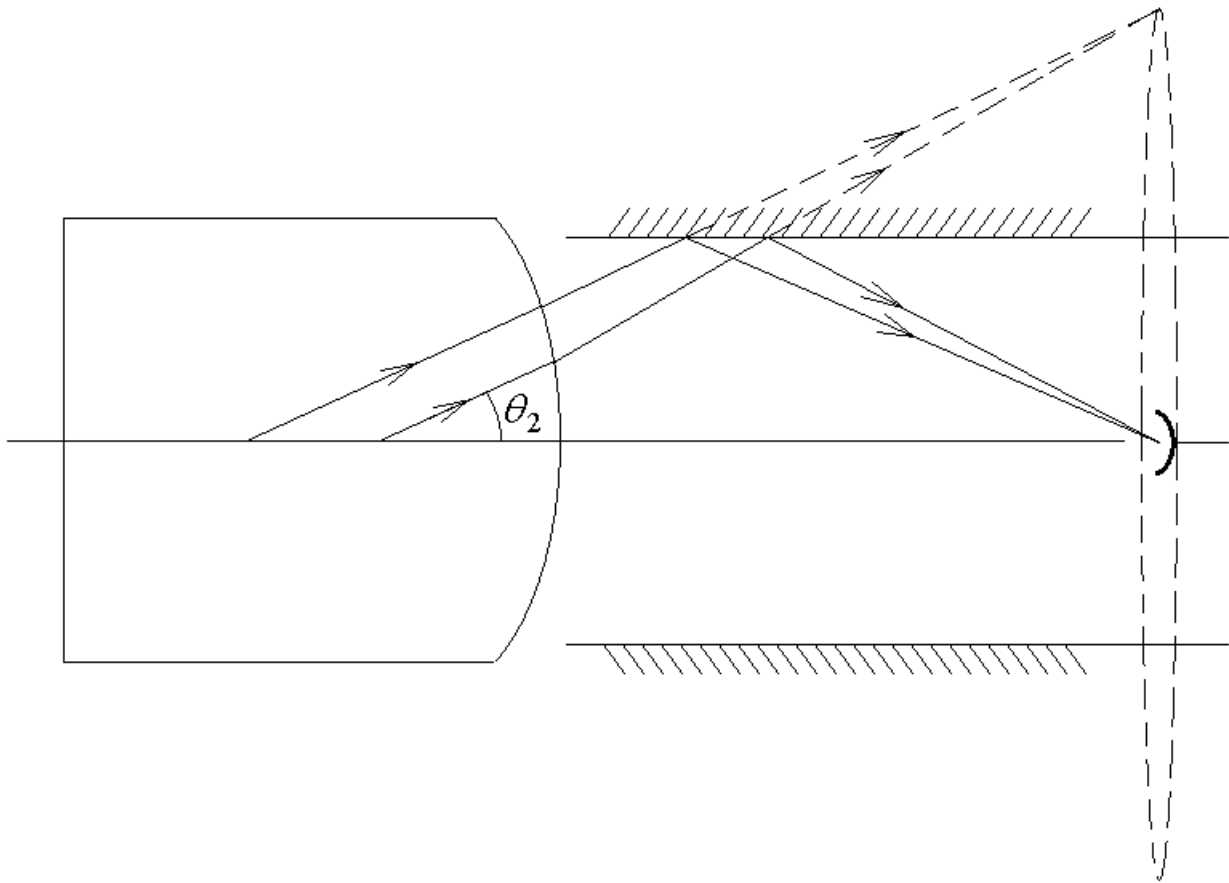


Излучение среды идет в некоторый конус с угловым радиусом θ_2 . Поверхность равных фаз тоже представляет собой конус с угловым радиусом θ_1 , причем $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Если рассмотреть сферическую волну, которая была излучена раньше изображенного на рисунке момента на время τ (в точке O), то радиус сферы $OB = \tau \frac{c}{n}$, а расстояние от точки излучения до вершины конуса (до текущего положения заряженной частицы) $OA = V\tau$, где V — скорость частицы, n — показатель преломления среды. Тогда

$$\cos(\theta_2) = \frac{OB}{OA} = \frac{\tau \frac{c}{n}}{V\tau} = \frac{c}{nV}.$$

Для звуковых волн аналог эффекта Вавилова — Черенкова — это полет самолета со сверхзвуковой скоростью.

Это излучение используется, в частности, для регистрации быстрых заряженных частиц в так называемых черенковских детекторах (черенковских счетчиках). Чтобы собрать черенковское излучение на приемник малого размера нужно поставить на пути лучей собирающую линзу и цилиндрическое зеркало.



После линзы свет, который идет в конус, должен собраться в окружность в фокальной плоскости линзы. Цилиндрическое зеркало, радиус которого вдвое меньше радиуса окружности, отразит лучи в точку приемника.

Совсем факультативная вставка.

Рассмотрим генерацию второй гармоники по аналогии с эффектом Вавилова — Черенкова. При нормальной дисперсии света $\frac{dn}{d\omega} > 0$ показатель преломления на удвоенной частоте больше показателя преломления на исходной частоте. Следовательно, фазовая скорость $V_\phi = \frac{c}{n}$ на удвоенной частоте меньше, чем на исходной частоте. То есть источник — излучение основной частоты движется быстрее излучения на удвоенной частоте. Эта ситуация полностью соответствует эффекту Вавилова — Черенкова. В таком случае, казалось бы, удвоенная гармоника должна излучаться в конус. На самом деле этого не происходит, и не должно происходить по условию фазового синхронизма $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$. И действительно, $k = \frac{n\omega}{c}$, тогда при условии нормальной дисперсии $\frac{dn}{d\omega} > 0$ получаем $\frac{n_{2\omega}2\omega}{c} > \frac{n_\omega\omega}{c} + \frac{n_\omega\omega}{c}$ или $k_3 > k_1 + k_2$. При этом $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ невозможно.

Как же так?

Дело в том, что в эффекте Вавилова — Черенкова излучает точечный объект, размер которого гораздо меньше длины волны, а при генерации второй гармоники излучает плоский фронт волны. Плоский фронт волны можно рассматривать, как множество точечных синфазных источников. Излучение разных точечных источников в конус Вавилова — Черенкова не будет синфазным и будет гасить друг друга.

Конец совсем факультативной вставки.

Экзамен. Закон преломления (закон Снеллиуса) и закон отражения света.

Закон Снеллиуса можно доказать с помощью построений Гюйгенса (мы сделаем это при рассмотрении кристаллооптики), с помощью принципа Ферма, а сейчас докажем его иначе.

При отражении и преломлении света длина волны изменяется, а частота — нет. Это связано с тем, что через период падающей световой волны исходные условия полностью повторяются, следовательно, должен повторяться и результат. Заметим, что длина волны света при вхождении света в среду изменяется $\lambda v = \frac{c}{n} \Rightarrow \lambda \sim \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, где λ_0 — длина волны света в вакууме.

Рассмотрим плоскую световую волну, которая падает на плоскую границу двух сред. Плоские условия задачи означают плоские решения. Тогда отраженная и преломленная волны тоже будут плоскими, так как нет выделенной точки для центра кривизны фронта каждой волны.

Введем обозначения для волн:

i — падающая волна (incident — падающий),

r — отраженная волна (reflect — отражать),

t — преломленная волна (transpierce [trens'pies] — пронзать насквозь).

На границе раздела двух сред должны выполняться граничные условия для электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{B}$ полей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = \rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

В системе СГС Гаусса:
$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

для границы раздела принимают следующий вид:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \end{cases}.$$

$$\text{В системе СГС Гаусса: } \begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c}i \end{cases}$$

$$\text{Для прозрачных сред } \begin{cases} \sigma = 0 \\ i = 0 \\ D = \varepsilon_0 \varepsilon E \\ B = \mu_0 \mu H \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1\tau} = H_{2\tau} \end{cases}.$$

$$\text{В системе СГС Гаусса: } \begin{cases} \sigma = 0 \\ i = 0 \\ D = \varepsilon E \\ B = \mu H \end{cases}, \begin{cases} \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1\tau} = H_{2\tau} \end{cases}$$

Выберем направление оси z перпендикулярно границе раздела двух сред.

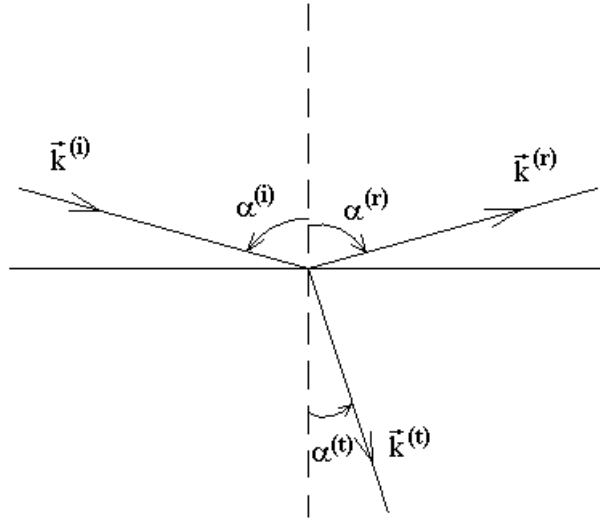
Рассмотрим, например, тангенциальную составляющую электрического поля — составляющую, направленную вдоль границы раздела двух сред. Рассмотрим световое поле на границе раздела сред в один момент времени, тогда k_x и k_y — циклические пространственные частоты горизонтальной составляющей электрического поля. Зависимость этой составляющей от x -координаты на границе раздела сред — это синусоида для каждой из трех волн, а сумма трех синусоид (две синусоиды в среде 1 и одна в среде 2) может дать ноль $E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$, только если их пространственные частоты одинаковы. Следовательно, величина k_x имеет одинаковое значение для падающей, отраженной и преломленной волн. Аналогично, равны друг другу пространственные частоты k_y .

Условие одинаковых пространственных частот трех волн на границе раздела примет вид:

$$\begin{cases} k_x^{(i)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)} \\ k_y^{(i)} = k_y^{(r)} = k_y^{(t)} \end{cases}, \text{ где } i, r, t \text{ — индексы для падающей, отраженной и}$$

преломленной волн.

Выберем направление оси y перпендикулярно плоскости падения света так, чтобы для падающей волны $k_y^{(i)} = 0$, тогда $k_y^{(r)} = k_y^{(t)} = 0$. Следовательно, все три луча и нормаль к границе раздела лежат в плоскости падения x, z — в плоскости следующего рисунка.



Углом падения света называют угол $\alpha^{(i)}$ между нормалью к границе раздела сред и направлением падающего луча $\vec{k}^{(i)}$. Угол отражения $\alpha^{(r)}$ — угол между нормалью и отраженным лучом $\vec{k}^{(r)}$, угол преломления $\alpha^{(t)}$ — угол между нормалью и преломленным лучом $\vec{k}^{(t)}$. На рисунке показаны положительные направления отсчета углов.

Для каждой из трех волн справедливо равенство $k_x = k \cdot \sin(\alpha)$.

Подставим это в равенство пространственных частот $k_x^{(i)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)}$ и получим:

$$k^{(i)} \sin(\alpha^{(i)}) = k^{(r)} \sin(\alpha^{(r)}) = k^{(t)} \sin(\alpha^{(t)})$$

Из двух выражений для фазовой скорости $V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$ получаем, что $k = n \frac{\omega}{c}$. Подставим это выражение для волнового числа k в предыдущую формулу с синусами

$\frac{n_1 \omega}{c} \sin(\alpha^{(i)}) = \frac{n_1 \omega}{c} \sin(\alpha^{(r)}) = \frac{n_2 \omega}{c} \sin(\alpha^{(t)})$, где n_1 и n_2 — показатели преломления двух сред.

Сократим формулу на отношение $\frac{\omega}{c}$ и получим

$$n_1 \cdot \sin(\alpha^{(i)}) = n_1 \cdot \sin(\alpha^{(r)}) = n_2 \cdot \sin(\alpha^{(t)}).$$

С учетом неравенства $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha^{(r)} \leq \frac{\pi}{2}$, означающего, что отраженный свет остается выше границы раздела сред, и с учетом монотонности синуса в этом диапазоне углов, получим единственное решение для $\alpha^{(r)}$:

$\alpha^{(i)} = \alpha^{(r)}$ — угол падения равен углу отражения или закон отражения.

Обозначим $\alpha_1 \equiv \alpha^{(i)}$ и $\alpha_2 \equiv \alpha^{(t)}$ и получим закон преломления или закон Снеллиуса:

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2).$$

Заметим, что если параллельных границ между разными средами много, то

$$n \cdot \sin(\alpha) = \text{const} \text{ для всех границ.}$$

Экзамен. Формулы Френеля. Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания.

Можно найти амплитуды отраженной и преломленной волн из граничных

$$\text{условий} \begin{cases} \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1\tau} = H_{2\tau} \end{cases} \quad \text{с учетом поперечности световых волн} \quad \begin{cases} \vec{E} \perp \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{k}, \\ \vec{E} \perp \vec{B} \end{cases}$$

соотношения величин напряженностей электрического и магнитного полей $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$ в бегущей волне и с учетом законов отражения и преломления.

В системе СГС Гаусса: $\sqrt{\varepsilon} E = \sqrt{\mu} H$.

Те же граничные условия должны выполняться и для комплексных величин, тогда

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \tilde{E}_{1n} = \varepsilon_2 \tilde{E}_{2n} \\ \tilde{E}_{1\tau} = \tilde{E}_{2\tau} \\ \tilde{B}_{1n} = \tilde{B}_{2n} \\ \tilde{H}_{1\tau} = \tilde{H}_{2\tau} \end{cases} \quad \text{— граничные условия в комплексном виде.}$$

$$\text{Нам будет достаточно уравнений} \quad \begin{cases} \tilde{E}_{1\tau} = \tilde{E}_{2\tau} \\ \tilde{H}_{1\tau} = \tilde{H}_{2\tau} \\ \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H \end{cases}, \quad \text{поперечности}$$

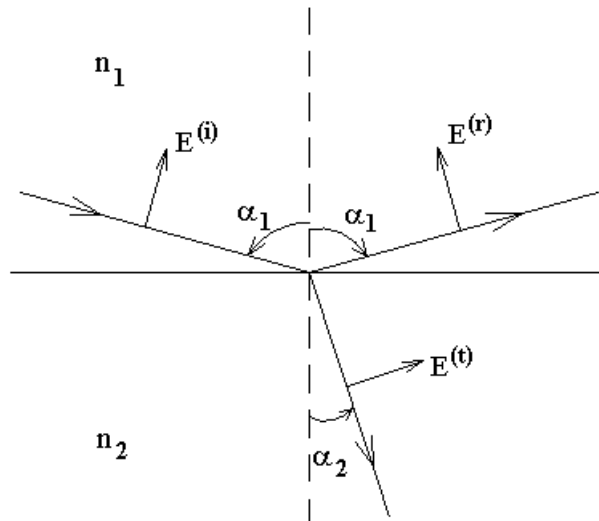
$$\text{световых волн} \quad \begin{cases} \vec{E} \perp \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{k} \\ \vec{E} \perp \vec{B} \end{cases} \quad \text{и условия, что отраженная и преломленная волны лежат}$$

в плоскости падения света.

Далее удобно рассмотреть отдельно вариант поляризации света в плоскости падения $\parallel$ и вариант поляризации перпендикулярной плоскости падения $\perp$.

I). Поляризация $\parallel$ параллельная плоскости падения света.

Выберем положительные направления для векторов $\vec{E}$ в падающей, отраженной и преломленной волнах:



Положительные направления электрического поля трех волн выбраны так, чтобы положительные направления магнитного поля этих волн совпадали друг с другом.

Магнитное поле каждой из трех волн направлено по касательной к границе раздела сред, поэтому для магнитного поля можно воспользоваться только граничным условием для тангенциальной составляющей: $\tilde{H}_{1\tau} = \tilde{H}_{2\tau}$. Над границей есть магнитное поле падающей и отраженной волн, под границей — только прошедшей волны, тогда

$$\tilde{H}^{(i)} + \tilde{H}^{(r)} = \tilde{H}^{(t)}.$$

С учетом соотношения $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} \tilde{E} = \sqrt{\mu_0 \mu} \tilde{H}$, получим

$$\tilde{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} \tilde{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \mu}{\mu_0 \mu^2}} \tilde{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \frac{n}{\mu}} \tilde{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{n}{\mu}} \tilde{E} = \frac{\varepsilon_0 c n}{\mu} \tilde{E}.$$

$$\text{В системе СГС Гаусса: } \tilde{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \tilde{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\mu^2}} \tilde{E} = \frac{n}{\mu} \tilde{E}$$

Тогда для комплексных амплитуд электрических полей получим:

$$\frac{\varepsilon_0 c n_1}{\mu_1} \tilde{E}^{(i)} + \frac{\varepsilon_0 c n_1}{\mu_1} \tilde{E}^{(r)} = \frac{\varepsilon_0 c n_2}{\mu_2} \tilde{E}^{(t)} \quad \text{или} \quad \frac{n_1}{\mu_1} \tilde{E}^{(i)} + \frac{n_1}{\mu_1} \tilde{E}^{(r)} = \frac{n_2}{\mu_2} \tilde{E}^{(t)}.$$

В системе СГС Гаусса также.

Рассмотрим в качестве второго уравнения для неизвестных амплитуд $\tilde{E}^{(r)}$ и $\tilde{E}^{(t)}$ граничное условие для тангенциальной составляющей электрического поля $\tilde{E}_{1\tau} = \tilde{E}_{2\tau}$, где проекция поля на горизонтальное направление в плоскости рисунка получается умножением напряженности поля на косинус соответствующего угла для каждой из трех волн:

$$\tilde{E}^{(i)} \cos(\alpha_1) - \tilde{E}^{(r)} \cos(\alpha_1) = \tilde{E}^{(t)} \cos(\alpha_2).$$

Решая два уравнения

$$\begin{cases} \frac{n_1}{\mu_1} \tilde{E}^{(i)} + \frac{n_1}{\mu_1} \tilde{E}^{(r)} = \frac{n_2}{\mu_2} \tilde{E}^{(t)} \\ \tilde{E}^{(i)} \cos(\alpha_1) - \tilde{E}^{(r)} \cos(\alpha_1) = \tilde{E}^{(t)} \cos(\alpha_2) \end{cases}$$

с двумя неизвестными $\tilde{E}^{(r)}$ и $\tilde{E}^{(t)}$, находим

$$\begin{cases} \tilde{E}_{\parallel}^{(r)} = \tilde{E}_{\parallel}^{(i)} \cdot \frac{\frac{n_2}{\mu_2} \cdot \cos(\alpha_1) - \frac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos(\alpha_2)}{\frac{n_2}{\mu_2} \cdot \cos(\alpha_1) + \frac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos(\alpha_2)} \\ \tilde{E}_{\parallel}^{(t)} = \tilde{E}_{\parallel}^{(i)} \cdot \frac{2 \cdot \frac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos(\alpha_1)}{\frac{n_2}{\mu_2} \cdot \cos(\alpha_1) + \frac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos(\alpha_2)} \end{cases}$$

— формулы Френеля для амплитуд отраженной и преломленной волн.

В системе СГС Гаусса также.

Здесь значок $\parallel$ у поля E означает, что волна поляризована параллельно плоскости падения света.

Обычно в этих выражениях пренебрегают отличием магнитной проницаемости среды от единицы ($\mu=1$). Тогда окончательно для амплитудных коэффициентов отражения $r \equiv \frac{\tilde{E}^{(r)}}{\tilde{E}^{(i)}}$ и пропускания $\tau \equiv \frac{\tilde{E}^{(t)}}{\tilde{E}^{(i)}}$

получаем следующие выражения

$$\begin{cases} r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)} \\ \tau_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)} \end{cases}$$

— это формулы Френеля для амплитудных коэффициентов отражения и пропускания для поляризации света в плоскости падения.

В системе СГС Гаусса также.