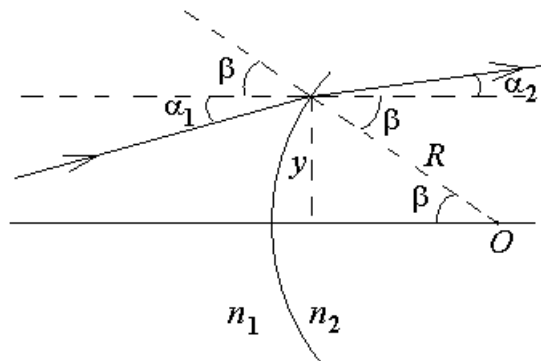


Лекционные демонстрации, 11 минут.

Экзамен. Преломление света на сферической границе.

Рассмотрим преломление на сферической границе двух сред.



Здесь $(\alpha_1 + \beta)$ — угол падения света на сферическую границу раздела двух сред, $(\alpha_2 + \beta)$ — угол преломления.

По закону Снеллиуса: $n_1 \sin(\alpha_1 + \beta) = n_2 \sin(\alpha_2 + \beta)$.

В приближении параксиальной оптики все углы малы, тогда:

$$n_1(\alpha_1 + \beta) = n_2(\alpha_2 + \beta) \quad \Rightarrow$$

$$n_2\alpha_2 = n_1\alpha_1 - (n_2 - n_1)\beta.$$

Для малого угла β получаем $\beta = \frac{y}{R}$, где R — радиус кривизны сферической границы двух сред, тогда

$n_2\alpha_2 = n_1\alpha_1 - \frac{n_2 - n_1}{R}y$ — уравнение преломления луча на сферической границе.

Экзамен. Координаты луча. Матрица трансляции. Матрица преломления на сферической границе.

Уравнение трансляции луча и уравнение преломления луча на сферической границе могут быть выражены через такие параметры луча, как y и $n\alpha$. Эти параметры будем называть координатами луча.

Сформируем из двух координат луча вектор $\begin{pmatrix} y \\ n\alpha \end{pmatrix}$ в некотором абстрактном двумерном пространстве.

Рассмотрим, как новые координаты луча выражаются через его старые координаты при трансляции луча и при преломлении на сферической границе.

При трансляции луча:

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + \frac{L}{n}n_1\alpha_1 \\ n_2\alpha_2 = n_1\alpha_1 \end{cases}.$$

Индекс 1 относится к параметрам луча в первой опорной плоскости, а индекс 2 — во второй.

Уравнения для трансляции луча можно переписать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2 \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Назовем матрицу $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицей трансляции.

Заметим, что коэффициенты матрицы не зависят от координат луча y и $n\alpha$. То есть матрица одинакова для всех лучей связывающих две опорные плоскости.

Теперь обсудим изменение координат луча при преломлении на сферической границе.

Будем считать, что две опорные плоскости для преломления луча на сферической границе расположены вплотную с двух сторон сферической границы. Тогда y координата луча почти не изменяется при переходе от одной опорной плоскости к другой.

Преломление на сферической границе следующим образом изменяет координаты луча

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ n_2 \alpha_2 = -\frac{n_2 - n_1}{R} y_1 + n_1 \alpha_1 \end{cases}.$$

Уравнения преломления луча на сферической границе тоже можно переписать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2 \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Назовем матрицу $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$ матрицей преломления на

сферической границе.

Заметим, что, как и для матрицы трансляции, все коэффициенты матрицы преломления на сферической границе не зависят от координат луча y и $n\alpha$. То есть матрица преломления на сферической границе также одинакова для всех лучей связывающих две опорные плоскости.

Экзамен. Матричная оптика.

Одна и та же матрица преобразует координаты любого луча при переходе от одной опорной плоскости к другой. Будем называть эту матрицу матрицей перехода от первой опорной плоскости ко второй.

В центрированной оптической системе с лучом могут происходить только две вещи: трансляция и преломление на сферической границе. Любая оптическая схема может быть представлена, как несколько последовательно включенных элементов, каждый из которых либо трансляция, либо преломление на сферической границе.

Рассмотрим два последовательных элемента оптической схемы и три соответствующие им опорные плоскости. Пусть $\hat{M}_1$ — матрица перехода от первой опорной плоскости ко второй, $\hat{M}_2$ — матрица перехода от второй опорной плоскости к третьей. Тогда

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_2 \\ n_2 \alpha_2 \end{pmatrix} = \hat{M}_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_3 \\ n_3 \alpha_3 \end{pmatrix} = \hat{M}_2 \begin{pmatrix} y_2 \\ n_2 \alpha_2 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_3 \\ n_3 \alpha_3 \end{pmatrix} = \hat{M}_2 \cdot \hat{M}_1 \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \alpha_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\hat{M} = \hat{M}_2 \hat{M}_1$ — матрица перехода от первой опорной плоскости к третьей.

Следовательно, матрицы последовательных элементов оптической системы перемножаются. Причем сомножители матриц элементов оптической схемы расположены в обратном порядке по отношению к расположению элементов оптической схемы вдоль луча.

Перемножая матрицы оптических элементов, можно найти матрицу перехода между двумя любыми опорными плоскостями. Таким образом, любой оптической схеме можно сопоставить матрицу.

Экзамен. Оптическая сила сферической границы. Оптическая сила тонкой линзы.

Будем обозначать оптическую силу буквой Φ .

Для сферической границы двух сред по определению:

$$\Phi \equiv \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Тогда матрицу сферической границы можно переписать в новом виде:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим две близко расположенные друг к другу сферические границы:

$$\hat{M} = \hat{M}_2 \hat{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 - \Phi_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из правой части равенства видно, что две близко расположенных границы имеют такую же матрицу, как и одна сферическая граница с

суммарной оптической силой. В этом смысле оптические силы близко расположенных сферических границ складываются $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

Рассмотрим тонкую линзу в вакууме.

Линза — это две сферические границы. Для одной сферической границы оптическая сила $\Phi = \frac{n_2 - n_1}{R}$.

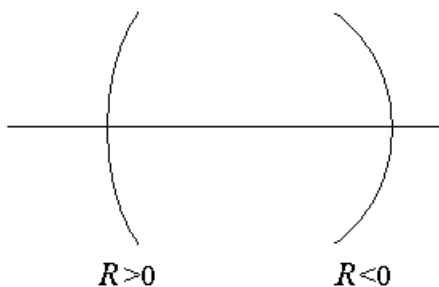
Для тонкой линзы в вакууме:

$$\Phi = \frac{n-1}{R_1} + \frac{1-n}{R_2} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \text{ тогда}$$

$$\Phi = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \text{ — оптическая сила тонкой линзы в вакууме, где}$$

$$\text{для двояковыпуклой линзы} \begin{cases} R_1 > 0 \\ R_2 < 0 \end{cases}.$$

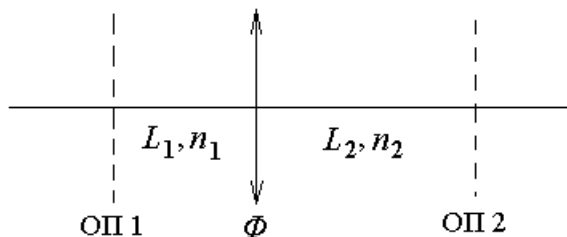
Введем правило знаков для радиуса кривизны сферической границы.



Будем считать, что $R > 0$, если центр сферы находится справа от сферической границы, то есть имеет положительную координату вдоль оптической оси, если начало координат принять в месте расположения сферической границы.

Экзамен. Изображение точечного источника света. Сопряженные плоскости. Формула тонкой линзы.

Рассмотрим линзу с оптической силой Φ и опорные плоскости с двух сторон линзы на расстоянии L_1 и L_2 от линзы. Пусть n_1, n_2 — показатели преломления среды с двух сторон линзы.



Найдем матрицу перехода от опорной плоскости 1 к опорной плоскости 2, как произведение трех матриц: матрицы перехода от линзы ко второй опорной плоскости, матрицы тонкой линзы и матрицы перехода от первой опорной плоскости к тонкой линзе.

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_1}{n_1} \\ -\Phi & 1 - \frac{L_1}{n_1} \Phi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{L_2}{n_2} \Phi & \frac{L_1}{n_1} + \frac{L_2}{n_2} - \frac{L_1}{n_1} \cdot \frac{L_2}{n_2} \cdot \Phi \\ -\Phi & 1 - \frac{L_1}{n_1} \Phi \end{pmatrix}.$$

Из равенства $\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2 \alpha_2 \end{pmatrix} = \hat{M} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \alpha_1 \end{pmatrix}$ найдем y_2 через y_1 и $n_1 \alpha_1$:

$$y_2 = \left(1 - \frac{L_2}{n_2} \cdot \Phi \right) \cdot y_1 + \left(\frac{L_1}{n_1} + \frac{L_2}{n_2} - \frac{L_1}{n_1} \cdot \frac{L_2}{n_2} \cdot \Phi \right) \cdot n_1 \alpha_1.$$

Изображение точечного источника в линзе — точка пересечения всех лучей, выходящих из источника и прошедших линзу.

Сопряженные плоскости — это плоскость предмета и плоскость изображения. Подразумевается, что обе плоскости перпендикулярны оптической оси.

Пусть опорные плоскости 1 и 2 являются сопряженными плоскостями тонкой линзы.

Если в опорной плоскости 1 находится точечный источник света, то из этой точки в предметной плоскости ОП 1 под любыми углами α_1 к оптической оси выходят лучи. Если плоскость ОП 2 — плоскость изображения, то лучи после прохождения линзы соберутся в одной точке y_2 плоскости ОП 2. В этом случае y_2 не зависит от α_1 . Для того чтобы y_2 не зависело от α_1 необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при α_1 в выражении для y_2 был бы равен нулю:

$$\frac{L_1}{n_1} + \frac{L_2}{n_2} - \frac{L_1}{n_1} \cdot \frac{L_2}{n_2} \cdot \Phi = 0.$$

Выразим из этого равенства оптическую силу линзы Φ и получим

$$\Phi = \frac{n_2}{L_2} + \frac{n_1}{L_1}.$$

Вместо расстояний L_1 и L_2 введем координаты сопряженных плоскостей линзы относительно самой линзы: a — координата предметной плоскости, b — координата плоскости изображения. Тогда

$$\begin{cases} a = -L_1 \\ b = L_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Phi = -\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} \quad \text{— формула тонкой линзы, где } a \text{ и } b \text{ — координаты}$$

предметной плоскости и плоскости изображения, n_1 и n_2 — показатели преломления среды с двух сторон линзы, Φ — оптическая сила линзы.

$$\text{Обычно } \begin{cases} n_1 = n_2 = 1 \\ a < 0 \\ b > 0 \end{cases} . \text{ В этом случае } \Phi = \frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} .$$

Заметим, что b (x -координата изображения) не зависит от y -координаты источника. Это означает, что для предметной опорной плоскости, перпендикулярной оптической оси, изображение будет тоже в некоторой плоскости перпендикулярной оптической оси (в плоскости изображения). То есть исходное предположение о сопряженных опорных плоскостях было правильным предположением.

Экзамен. Фокальная плоскость линзы. Фокус. Фокусное расстояние.

Фокальная плоскость линзы — плоскость, сопряженная к бесконечно удаленной плоскости.

Фокус — точка пересечения фокальной плоскости с оптической осью.

Фокусное расстояние — координата фокуса относительно линзы.

Передняя фокальная плоскость — это плоскость, сопряженная к бесконечно удаленной плоскости изображения. Пусть переднее фокусное расстояние равно f_1 . Тогда

$$\Phi = -\frac{n_1}{f_1} + \frac{n_2}{+\infty} \Rightarrow \Phi = -\frac{n_1}{f_1} .$$

Рассмотрим теперь фокусное расстояние за линзой или заднее фокусное расстояние f_2 . Задняя фокальная плоскость — это плоскость, сопряженная к бесконечно удаленной предметной плоскости. Тогда

$$\Phi = -\frac{n_1}{-\infty} + \frac{n_2}{f_2} \Rightarrow \Phi = \frac{n_2}{f_2} .$$

Объединяя формулу тонкой линзы и две формулы для фокусных расстояний, получим:

$$\Phi = -\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = -\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} \Rightarrow$$

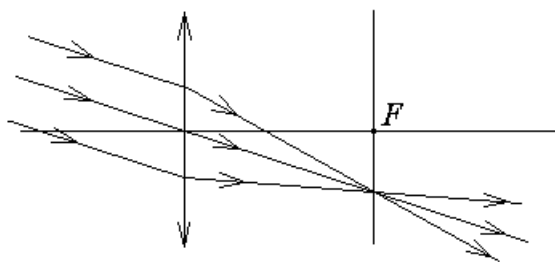
$$-\frac{n_1}{f_1} = -\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2}{f_2} \quad \text{— это тоже формулы тонкой линзы.}$$

В простейшем случае $\frac{1}{|f|} = \frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|}$, когда $n_1 = n_2 = 1$.

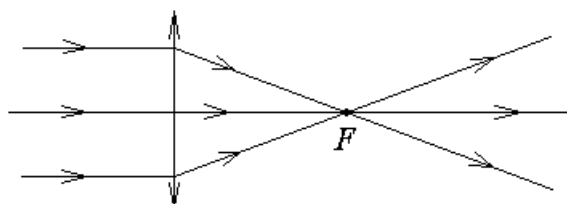
Если точечный источник света расположен очень далеко, то радиус фронта волны очень большой, и волна почти плоская. Плоской световой волне соответствует параллельный пучок лучей.

Рассмотрим падающий на линзу параллельный пучок лучей. Можно считать, что этот пучок лучей выходит из точечного источника, расположенного бесконечно далеко слева от линзы. Сопряженная бесконечно удаленному источнику плоскость совпадает с фокальной плоскостью линзы по определению фокальной плоскости.

Следовательно, параллельный пучок лучей линза собирает в одну точку в фокальной плоскости.



Пучок лучей параллельный оптической оси в соответствии с осевой симметрией задачи собирается в фокусе линзы.

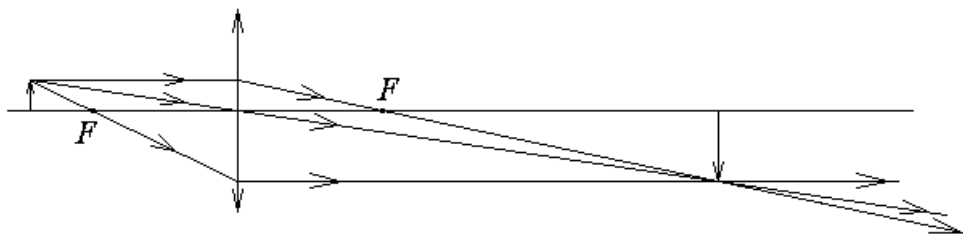


Экзамен. Построение изображений в тонкой линзе. Действительное и мнимое изображение.

Изображение действительное, если оно расположено за линзой. Изображение мнимое, если лучи за линзой не пересекаются, а пересекаются лишь их продолжения в область перед линзой.

В соответствии с этим, если в плоскость действительного изображения поместить экран, то на экране будет видно изображение, если же экран поместить в плоскость мнимого изображения, то на экране изображения не будет.

Пример построения действительного изображения приведен на рисунке ниже:



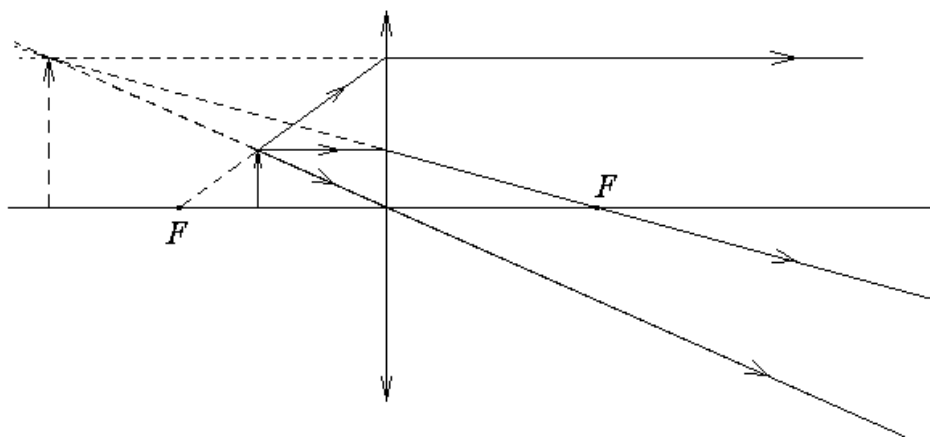
Для построения изображения точечного источника в тонкой линзе достаточно найти пересечение двух любых лучей, выходящих из точечного источника. Для этой цели есть три удобных луча.

1-ый луч — это луч, который до линзы идет параллельно оптической оси. После линзы этот луч проходит через задний фокус линзы.

2-ой луч до линзы проходит через передний фокус. После линзы этот луч проходит параллельно оптической оси.

3-ий луч проходит через центр тонкой линзы. После линзы этот луч проходит без изменения направления, если показатель преломления среды до и после линзы один и тот же. Дело в том, что центральная часть тонкой линзы похожа на плоскопараллельную пластинку, которая не изменяет направления проходящего через нее луча.

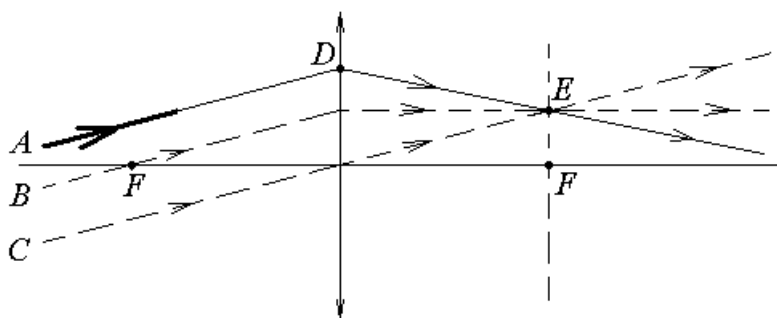
Пример построения мнимого изображения с теми же тремя лучами приведен на рисунке приведенном ниже:



Экзамен. Построение хода произвольного луча при прохождении тонкой линзы.

При анализе оптической схемы часто возникает потребность понять ход конкретного луча, который не проходит ни через фокус линзы, ни через ее центр. Будем считать, что с обеих сторон тонкой линзы среда имеет одинаковый показатель преломления.

Пусть перед линзой произвольно задан луч A , и мы хотим построить ход именно этого луча после линзы.



Продлим луч A до линзы и получим на линзе точку D , через которую проходит луч A .

Для построения хода луча A за линзой достаточно найти еще хотя бы одну точку E за линзой, кроме точки D , через которую луч A обязан пройти. Через две точки D и E луч A пройдет за линзой единственным возможным образом.

Рассмотрим ход через линзу некоторых вспомогательных лучей, которые на самом деле могут отсутствовать.

Можно рассмотреть луч B , который проходит через передний фокус линзы и параллелен заданному лучу A , или рассмотреть луч C проходящий через центр линзы и тоже параллельный лучу A .

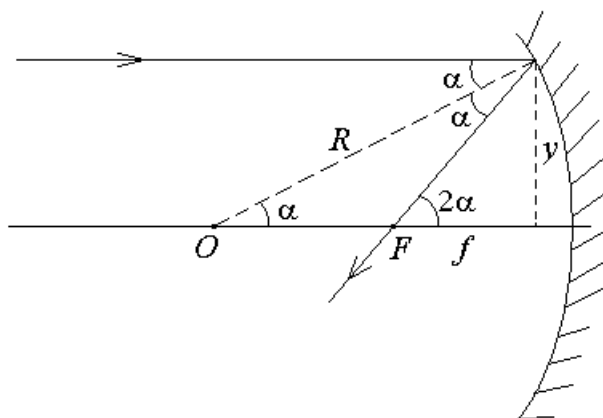
Луч B , проходящий через передний фокус линзы, после линзы пойдет параллельно оптической оси. Луч C проходит через центр линзы без изменения направления. Найдем точку пересечения E любого из этих двух лучей (B или C), прошедшего линзу, и задней фокальной плоскости линзы. Лучи A , B , C перед линзой параллельны друг другу, тогда после линзы они обязаны собраться в одной точке в фокальной плоскости. Следовательно, интересующий нас луч A обязан пройти точку E пересечения задней фокальной плоскости лучами B или C .

После линзы интересующий нас луч A проходит через точки D и E .

Экзамен. Сферическое зеркало.

Для сферического зеркала, как и для тонкой линзы, можно ввести в рассмотрение сопряженные плоскости, фокус и оптическую силу. Мы не будем подробно повторять для сферического зеркала рассуждения подобные рассуждениям, проведенным для тонкой линзы.

Рассмотрим вогнутое сферическое зеркало. Рассмотрим луч, падающий на зеркало параллельно оптической оси. Отраженный луч пересекает оптическую ось в фокусе зеркала (точка F на рисунке).



На рисунке обозначены буквой α три одинаковых угла, которые примыкают к отрезку, обозначенному на рисунке буквой R . Этот отрезок — перпендикуляр к поверхности зеркала в точке касания зеркала лучом. Два верхних угла равны друг другу, как угол падения и угол отражения от зеркальной поверхности.

Верхний и нижний из трех углов α равны друг другу, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых. Напомним, что по условию задачи луч падает на зеркало параллельно оптической оси.

Угол, обозначенный на рисунке как 2α , действительно равен сумме двух верхних углов α , так как два верхних угла вместе образуют угол, который является внутренним накрест лежащим углом по отношению к углу 2α при параллельных прямых.

Нормаль к сферической зеркальной поверхности пересекает оптическую ось в точке O , которая является центром сферической поверхности зеркала. Соответственно, расстояние от точки O до точки касания лучом зеркала равно радиусу зеркала R .

Точка касания лучом зеркала имеет y -координату, величину которой можно выразить двумя способами. С одной стороны $y = R \cdot \sin(\alpha) \approx R\alpha$, с другой стороны $y \approx f \cdot \tan(2\alpha) \approx f 2\alpha$. Приравнявая два выражения для одной и той же величины y , находим, что $f = \frac{R}{2}$ — фокусное расстояние сферического зеркала, где R — радиус кривизны зеркала. Для вогнутого зеркала по принятому нами правилу знаков обе величины отрицательные, так как и центр сферической поверхности зеркала, и фокус зеркала имеют отрицательную x -координату относительно зеркала.

Экзамен. Матрица толстой линзы.

Рассмотрим линзу, толщиной которой нельзя пренебречь по сравнению с радиусами кривизны линзы.

При получении матрицы толстой линзы кроме матриц двух сферических границ линзы нужно учитывать матрицу трансляции луча между сферическими

границами. Тогда матрицу толстой линзы можно найти, как произведение трех соответствующих матриц в обратном порядке:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица второй сферической границы, $\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ —

матрица трансляции, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица первой сферической границы.

Дважды перемножая матрицы по правилу "строка на столбец" получим

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{n}\Phi_1 & \frac{L}{n} \\ \frac{L}{n}\Phi_1\Phi_2 - \Phi_1 - \Phi_2 & 1 - \frac{L}{n}\Phi_2 \end{pmatrix},$$

где $\Phi_1 = \frac{n-1}{R_1}$, $\Phi_2 = \frac{1-n}{R_2}$ — оптические силы двух сферических поверхностей в соответствии с определением оптической силы сферической границы $\Phi \equiv \frac{n_2 - n_1}{R}$, L — толщина линзы, n — показатель преломления линзы.

Экзамен. Главные плоскости центрированной оптической системы.

Главные плоскости оптической системы — это по определению сопряженные плоскости с единичным коэффициентом увеличения $\frac{y_2}{y_1} = 1$.

Для тонкой линзы обе главные плоскости находятся в месте расположения тонкой линзы.

Главные плоскости позволяют построить ход лучей, не рассматривая преломления лучей на реальных сферических границах оптической системы. Для построения хода лучей достаточно знать так называемые кардинальные точки оптической системы — это четыре точки пересечения оптической оси с двумя фокальными плоскостями (фокусы) и двумя главными плоскостями (главные точки).

Оптическая система ведет себя так, как будто пространство между главными плоскостями отсутствует, а в месте разрыва установлена тонкая линза, фокусные расстояния которой совпадают с фокусными расстояниями рассматриваемой оптической системы (с расстояниями от главных оптических плоскостей до фокусов). При этом подразумевается, что до первой главной плоскости луч идет, как бы не преломляясь на сферических границах. Аналогичное поведение луча подразумевается и после второй главной плоскости.

