

Факультативно. Эйконал по Бутикову.

В книге Е. И. Бутикова "Оптика" и в монографии М. Борна и Э. Вольфа "Основы оптики" определением эйконала L является выражение для напряженности светового поля:

$$\tilde{E}(t, \vec{r}) = E_0(\vec{r}) \cdot \tilde{e}_p(\vec{r}) \cdot e^{i(k_0 L(\vec{r}) - \omega t + \varphi_0)}$$

Это определение отличается от нашего второго определения эйконала $L(\vec{r}) \equiv \frac{\varphi(\vec{r})_{t=0}}{k_0}$ несущественной константой φ_0 , которую к тому же всегда можно спрятать в комплексный единичный вектор поляризации света.

Экзамен. Уравнение для вычисления траектории луча в неоднородной среде.

Возьмем градиент от уравнения $\frac{\partial L}{\partial l} = n$ и получим

$$\vec{\nabla} n = \vec{\nabla} \frac{\partial L}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \vec{\nabla} L = \frac{\partial}{\partial l} (n \vec{e}_s) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} n = \frac{\partial}{\partial l} (n \vec{e}_s)$$

Разложим производную от произведения и получим

$$\vec{\nabla} n = \frac{\partial}{\partial l} (n \vec{e}_s) = \vec{e}_s \frac{\partial n}{\partial l} + n \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial l}$$

откуда выразим $\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial l}$ и получим уравнение, позволяющее вычислять траекторию луча в неоднородной среде:

$$\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial l} = \frac{1}{n} \vec{\nabla} n - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial l} \vec{e}_s.$$

И действительно, перепишем это уравнение в виде

$$d\vec{e}_s = \left(\frac{1}{n} \vec{\nabla} n - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial l} \vec{e}_s \right) dl \quad (11.1).$$

Это уравнение позволяет найти изменение направления луча $d\vec{e}_s$ при небольшом перемещении dl вдоль луча. Если в исходной точке пространства $\vec{r}$ задано направление луча $\vec{e}_s$ и в каждой точке среды известен показатель преломления $n(\vec{r})$, то в исходной точке пространства можно вычислить выражение в скобках в правой части уравнения (11.1). Тогда уравнение (11.1) позволяет найти изменение вектора $\vec{e}_s$ и новое направление луча в соседней точке вдоль луча на расстоянии dl от исходной точки. Затем новую точку и новое направление луча можно рассматривать, как исходные, и повторить процедуру.

Уравнение (11.1) показывает, в каком направлении поворачивает луч в неоднородной среде. Формула для изменения единичного вектора вдоль луча

содержит два слагаемых. Второе слагаемое направлено вдоль луча $\vec{e}_s$ и не изменяет его направления. Первое слагаемое $\frac{1}{n}\vec{\nabla}n dl$ направлено, как и градиент показателя преломления $\vec{\nabla}n$. Градиент направлен в сторону увеличения показателя преломления.

Следовательно, луч поворачивает в оптически более плотную среду, в среду с большим показателем преломления.

Экзамен. Принцип Ферма.

Принцип Ферма утверждает, что свет распространяется по пути, который занимает минимум времени.

Минимальное время распространения от точки I до точки II означает, что

$$\int_I^{II} dt = \min.$$

$$dt = \frac{dl}{V_{\phi}} = \frac{dl}{\frac{c}{n}} = \frac{1}{c} n dl \quad \Rightarrow$$

$$\int_I^{II} \frac{1}{c} n dl = \min \quad \Leftrightarrow \quad \int_I^{II} n dl = \min.$$

Рассмотрим интерпретацию Фейнмана принципа Ферма.

Свет из точки I приходит в точку II всеми путями, которые только можно себе представить. Всеми мыслимыми путями свет приходит с разными фазами. Фаза определяется временем распространения. Если фазы совсем произвольны, то соответствующие разным фазам лучи гасят друг друга (деструктивная интерференция). Минимальному времени распространения соответствует минимальная фаза. Около минимума фазы изменение фазы квадратично (очень мало) при малой деформации светового пути. В таком случае много разных путей для света имеет примерно одинаковую фазу. Эти лучи в результате интерференции усиливают друг друга. В результате свет идет именно таким путем.

Факультативная вставка.

Далее приведем не очень строгое математическое доказательство принципа Ферма. Докажем равенство $\int_I^{II} n dl = \min$, то есть докажем, что оптическая длина пути между точками I и II вдоль реального луча меньше, чем вдоль любой другой мыслимой кривой, соединяющей точки I и II.

Обозначим: $d\vec{l}$ — перемещение вдоль реального луча, $d\vec{l}'$ — перемещение вдоль любой мыслимой кривой.

Тогда достаточно доказать, что $\int_I^{\Pi} n dl \leq \int_I^{\Pi} n dl'$. В дальнейших формулах

нужно внимательно следить за тем, где стоит dl , а где — dl' .

$$1 \geq \cos(\vec{dl}, \vec{dl}') \Rightarrow$$

$\int_I^{\Pi} n dl' \geq \int_I^{\Pi} n \cdot \cos(\vec{dl}, \vec{dl}') dl'$, где оба интеграла взяты вдоль любой мыслимой кривой.

В правой части неравенства заменим n на $\frac{\partial L}{\partial l}$ согласно нашему первому определению эйконала L , где $\frac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль реального луча. Тогда

$$\int_I^{\Pi} n dl' \geq \int_I^{\Pi} \frac{\partial L}{\partial l} \cos(\vec{dl}, \vec{dl}') dl' = \int_I^{\Pi} |\vec{\nabla} L| \cos(\vec{dl}, \vec{dl}') dl'.$$

Учтем, что градиент эйконала направлен вдоль луча, что следует из уравнения эйконала в форме $\vec{\nabla} L = n \vec{e}_s$. Откуда

$$\vec{dl} \uparrow \uparrow \vec{\nabla} L \Rightarrow \cos(\vec{dl}, \vec{dl}') = \cos(\vec{\nabla} L, \vec{dl}') \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_I^{\Pi} n dl' &\geq \int_I^{\Pi} |\vec{\nabla} L| \cos(\vec{\nabla} L, \vec{dl}') dl' = \int_I^{\Pi} (\vec{\nabla} L)_{\vec{dl}'} dl' = \int_I^{\Pi} \frac{\partial L}{\partial l'} dl' = \int_I^{\Pi} dL = \\ &= L(\Pi) - L(I). \end{aligned}$$

Перейдем теперь в правой части неравенства от интеграла вдоль любой мыслимой кривой к интегралу вдоль реального луча.

$$\int_I^{\Pi} n dl' \geq L(\Pi) - L(I) = \int_I^{\Pi} \frac{\partial L}{\partial l} dl = \int_I^{\Pi} n dl \Rightarrow$$

$$\int_I^{\Pi} n dl' \geq \int_I^{\Pi} n dl.$$

Что и требовалось доказать.

На самом деле принцип Ферма выполняется в виде $\int_I^{\Pi} dt = \min$, но не в

виде $\int_I^{\Pi} n dl = \min$. Так, например, в гауссовом пучке лучей даже в пустоте лучи

распространяются не по кратчайшим прямым линиям, а по гиперболам. Сильнее всего лучи искривляются в шейке каустики, где пучок лучей имеет наименьший диаметр.

Где же допущена нестрогость в выводе принципа Ферма? Дело в том, что равенство $V_\phi = \frac{c}{n}$ строго выполняется для плоской волны с одинаковой амплитудой в разных точках фронта, а равенство $\frac{\partial L}{\partial l} = n$ выполняется только

при условии $V_\phi = \frac{c}{n}$, то есть в приближении геометрической оптики без учета дифракционных эффектов. Например, раньше мы рассматривали гауссов пучок лучей и фазовая скорость в этом пучке $V_\phi > c$, поэтому неравенство

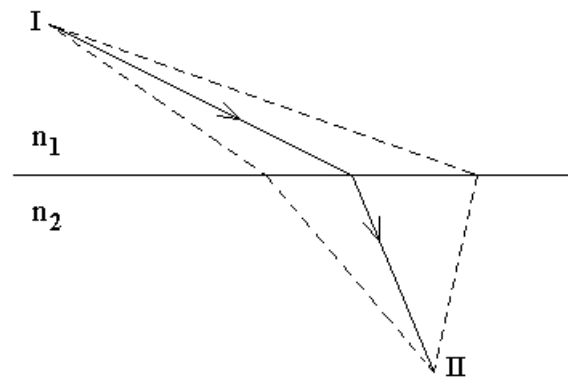
$$\int_I^{\Pi} n dl' \geq \int_I^{\Pi} n dl \text{ для гауссова пучка лучей не выполняется.}$$

Лучше принцип Ферма выполняется, если точкой I является точечный источник света, но и здесь есть подвох в случае, если свет отражается от зеркала. В этом случае путь для света, который поворачивает, не доходя до зеркала, оказывается короче, чем путь с отражением от зеркала.

Кроме того при отражении от зеркала свет может пойти путем, который имеет максимальную оптическую длину вместо минимальной длины.

Конец факультативной вставки.

Факультативно. Из принципа Ферма можно получить закон преломления.



Закон Снеллиуса можно вывести из того, что оптическая длина пути от точки I до точки II для реального луча должна быть меньше, чем для любого другого, изображенного пунктиром.

$$\text{То есть } \frac{n_1 h_1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{n_2 h_2}{\cos(\alpha_2)} = \min \text{ при условии } h_1 \operatorname{tg}(\alpha_1) + h_2 \operatorname{tg}(\alpha_2) = \text{const}.$$

$$\text{Подставим в первое равенство } \frac{1}{\cos(\alpha)} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)} \text{ и получим}$$

$$n_1 h_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_1)} + n_2 h_2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_2)} = \min$$

$$\text{Возьмем от этого равенства производную } \frac{d}{d(\operatorname{tg}(\alpha_1))} \text{ и получим}$$

$$n_1 h_1 \frac{tg(\alpha_1)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha_1)}} + n_2 h_2 \frac{tg(\alpha_2)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha_2)}} \cdot \frac{d(tg(\alpha_2))}{d(tg(\alpha_1))} = 0$$

Подставим $\frac{tg(\alpha_1)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha_1)}} = \sin(\alpha_1)$, аналогично $\frac{tg(\alpha_2)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha_2)}} = \sin(\alpha_2)$,

кроме того $\frac{d(tg(\alpha_2))}{d(tg(\alpha_1))} = -\frac{h_1}{h_2}$ из условия $h_1 tg(\alpha_1) + h_2 tg(\alpha_2) = const$ и получим

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$$

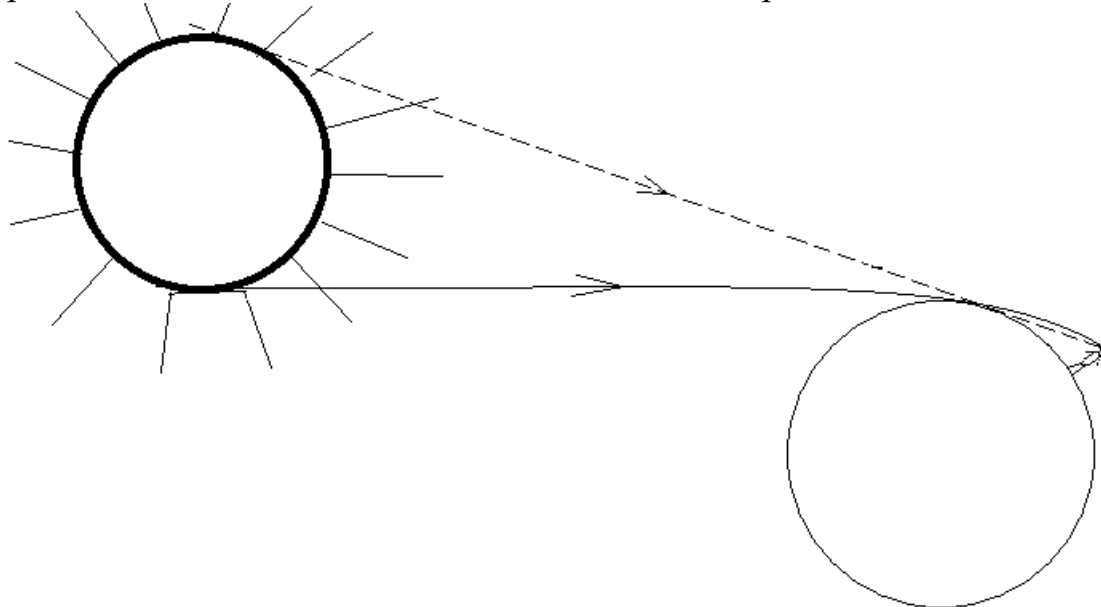
Экзамен. Рефракция.

Понятие рефракции имеет три смысла.

1). В первом смысле рефракция — любое преломление света.

Рефрактометр — прибор для измерения показателя преломления среды.

2). Во втором смысле рефракция в атмосфере или астрономическая рефракция — наблюдение Солнца из-под линии горизонта Земли.



Причина поворота солнечных лучей — уменьшение плотности атмосферы Земли с увеличением высоты над Землей. Дело в том, что с уменьшением плотности и соответственно концентрации молекул воздуха N уменьшается показатель преломления n , так как в разреженной среде $(n-1) \sim N$.

В неоднородной среде с изменяющимся от точки к точке показателем преломления свет поворачивает в оптически более плотную среду. В нашем случае свет поворачивает в сторону Земли.

3). В двух первых смыслах рефракция — это явление. В третьем смысле рефракция — это физическая величина.

$$R \equiv \frac{V}{\nu} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \text{ — рефракция, молярная или молекулярная рефракция.}$$

Здесь V — объем вещества, ν — число молей, $\frac{V}{\nu}$ — объем одного моля, n — показатель преломления среды.

Часто вместо молярной рефракции рассматривают удельную рефракцию $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$, где ρ — плотность среды. Здесь по сравнению с молярной рефракцией объем одного моля $\frac{V}{\nu}$ заменен объемом единицы массы $\frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}$.

Молярная рефракция представляет интерес для анализа формулы Лоренц — Лорентца:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0},$$

$$\text{В системе СГС Гаусса: } \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4}{3}\pi N\alpha.$$

где N — концентрация молекул, α — поляризуемость одной молекулы или коэффициент пропорциональности между наведенным дипольным моментом молекулы $\vec{p}$ и напряженностью электрического поля $\vec{E}$:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E},$$

n — показатель преломления среды.

Формула Лоренц — Лорентца для оптических полей доказывается аналогично формуле Клаузиуса — Моссотти в электростатике:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}.$$

Дело в том, что размер атома в тысячу раз меньше длины волны света, поэтому световое поле можно считать медленным полем для атома.

$$\text{В оптике } n = \sqrt{\varepsilon\mu} \approx \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon \approx n^2.$$

Из определения рефракции следует $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = R \frac{\nu}{V}$. Тогда с учетом формулы Лоренц — Лорентца получаем:

$$R \frac{\nu}{V} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} \Rightarrow R = \frac{NV}{\nu} \frac{\alpha}{3\varepsilon_0},$$

где $\frac{NV}{\nu} = N_A$ — число Авогадро или число молекул в одном моле. Тогда

$$R = N_A \frac{\alpha}{3\varepsilon_0}.$$

То есть молярная рефракция должна сохраняться независимо от концентрации вещества в случае выполнения формулы Лоренц — Лорентца.

Формула Лоренц — Лорентца выполняется не совсем точно. Отклонение от формулы Лоренц — Лорентца является предметом современных научных исследований. Отклонение от формулы Лоренц — Лорентца удобно рассматривать, как изменение молярной рефракции R .

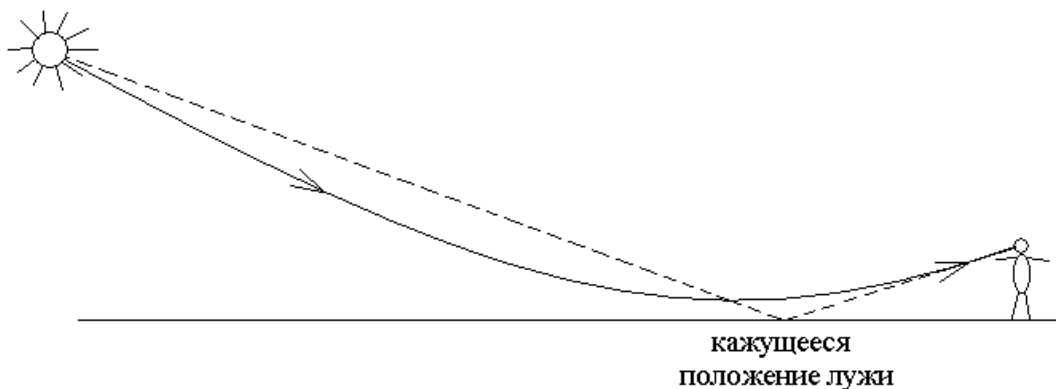
Экзамен. Миражи.

Если смотреть летом вдоль раскаленного шоссе, то где-то далеко асфальт кажется мокрым, покрытым лужами. Если у автомобиля включены фары, то в отражении как бы от лужи видна еще одна пара включенных фар.

Причина этой иллюзии в том, что у разогретого асфальта выше температура воздуха T , а давление воздуха p одинаковое: $p = Nk_B T$, следовательно, у разогретого асфальта меньше концентрация молекул воздуха N .

Меньшая концентрация молекул означает, меньшее значение показателя преломления, так как при небольшой плотности из формулы Лоренц-Лорентца следует $(n - 1) \sim N$.

Свет поворачивает в оптически более плотную среду:



При скользющем падении света свет поворачивает у поверхности асфальта, как бы отражаясь от лужи. В этой луже, которой на самом деле нет, видны отражения неба, солнца, деревьев или фар автомобиля.

В раскаленной пустыне свет поворачивает не только у раскаленного песка, но и в высоких разреженных слоях атмосферы. Эти отражения порождают миражи. Отражения позволяют видеть оазис из-под линии горизонта и видеть водные поверхности, которых на самом деле нет.

Спектр света.

Спектр света — это цветные изображения входной щели спектрометра в фокальной плоскости его объектива. Спектр — это зависимость интенсивности света от координаты в этой плоскости. Спектр света пропорционален квадрату модуля Фурье образа электрического поля.

Экзамен. Диапазоны электромагнитных волн и источники излучения.

Факультативная вставка.

Для волны любой природы произведение длины волны на частоту равно фазовой скорости волны: $\lambda \nu = c$. С 1983 года значение скорости света в вакууме постулируется: $c \equiv 299792458$ м/с, что позволяет иметь единый эталон для длины и времени. До этого момента длину измеряли, сравнивая длину волны эталонной красной линии криптона с длиной измеряемого предмета с помощью интерферометра Майкельсона. Частоту измеряли, сравнивая с частотой цезиевого эталона частоты ≈ 9 ГГц. К 1983 году с помощью приемников излучения типа "кошачий ус" удалось провести сравнение частот лазеров, для которых частоты отличаются в несколько раз, например в случае, когда $\nu_1 - 3\nu_2$ является достаточно низкой частотой для регистрации электронной схемой частотомера. В результате удалось сравнить частоту He-Ne лазера $\lambda \approx 3.39$ мкм и частоту цезиевого эталона частоты примерно 9 ГГц. Независимое точное измерение частоты и длины волны генерации лазеров позволило перейти к единому эталону длины и частоты.

Конец факультативной вставки.

Электромагнитные волны делятся на диапазоны в зависимости от длины волны λ или от частоты ν .

Разделение на диапазоны приблизительно определяется типами источников излучения. Для любых источников электромагнитное излучение возникает только при ускоренном движении заряженных частиц.

Рассмотрим диапазоны, начиная с самых больших длин волн.

Низкие или промышленные частоты.

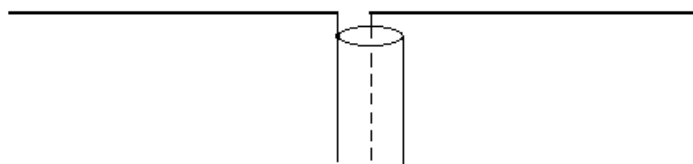
$$\lambda > 3 \text{ км} \quad \nu < 100 \text{ кГц}$$

Источники — паразитное излучение промышленных электроустановок: электродвигатели, электрогенераторы.

Радиоволны.

$$1 \text{ м} < \lambda < 3 \text{ км} \quad 100 \text{ кГц} < \nu < 300 \text{ МГц}$$

Источники — штыревые антенны.



Простейшая антенна — два штыря и коаксиальный кабель, по которому сигнал подводится к передающей антенне.

Микроволновой или СВЧ диапазон.

СВЧ — сверхвысокие частоты.

$$1 \text{ мм} < \lambda < 1 \text{ м} \quad 300 \text{ МГц} < \nu < 300 \text{ ГГц}$$

Источники — магнетроны и клистроны (объемные полые металлические резонаторы).

Передача от резонатора к антенне в сантиметровом и миллиметровом диапазоне производится по пологому металлическому волноводу. Антенна со

сферическим отражателем — спутниковая тарелка. Телевещание, радиолокация.

Инфракрасный свет.

ИК излучение.

$$0.7\text{мм} < \lambda < 1\text{мм}.$$

Частоту в этом диапазоне часто измеряют в обратных сантиметрах: $1\text{см}^{-1} \approx 30\text{ГГц}$. Частота 1см^{-1} по определению соответствует излучению с длиной волны 1см .

$$10\text{см}^{-1} = 300\text{ГГц} < \nu < 14000\text{см}^{-1} \approx 430\text{ТГц}.$$

Терагерцовый диапазон — диапазон частот около 1ТГц .

Источники — излучение молекул при возбуждении колебания или вращения молекулы — вращательные и колебательные спектры молекул. Излучение нагретых тел.

Видимый свет.

$$0.4\text{мм} < \lambda < 0.7\text{мм}.$$

Коротковолновая граница — фиолетовый свет, длинноволновая граница — красный свет.

Вместо частот обычно говорят об энергии кванта света $E = h\nu$. Энергию обычно выражают в электрон-вольтах — это энергия, которую приобретает электрон, пролетая напряжение в 1 Вольт. Энергия кванта света $1\text{эВ} = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{Дж}$ соответствует частоте света $\nu = 242\text{ТГц}$ и длине волны $\lambda = 1.24\text{мм}$.

Диапазон энергий видимого света:

$$1.8\text{эВ} < h\nu < 3.1\text{эВ}.$$

Источники — излучение атомов и молекул при возбуждении их электронных оболочек.

Ультрафиолетовый свет.

$$10\text{нм} < \lambda < 400\text{нм}$$

$$3.1\text{эВ} < h\nu < 125\text{эВ}$$

Источники — излучение атомов и ионов при возбуждении их электронных оболочек, рекомбинация положительных ионов и электронов.

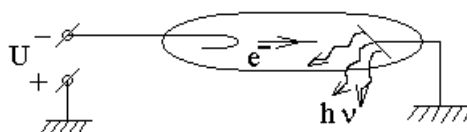
Рентген.

$$0.01\text{нм} < \lambda < 10\text{нм}$$

$$125\text{эВ} < h\nu < 125\text{кэВ}$$

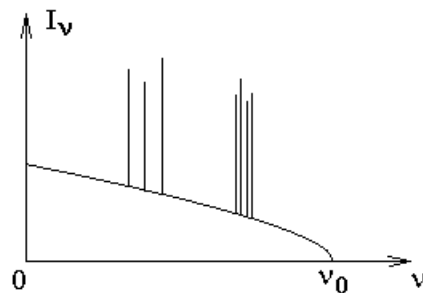
Источники — излучение атома после выбивания электрона внутренних электронных оболочек и тормозное излучение в металле электронов, ускоренных электрическим напряжением — рентгеновская трубка.

Рентгеновская трубка — это откачанная стеклянная трубка с двумя металлическими электродами, между которыми приложено напряжение в десятки киловольт. Из нагретого электрическим током катода (накальный катод) вылетают электроны в результате термоэлектронной эмиссии.



Электроны ускоряются электрическим полем от катода к аноду. При ударе об анод электроны теряют энергию, часть которой переходит в энергию рентгеновского фотона.

Спектр образующегося излучения имеет следующий вид.

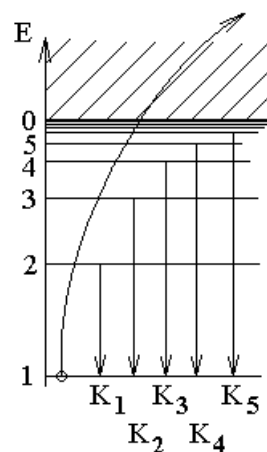


Спектр имеет сплошную и линейчатую составляющие.

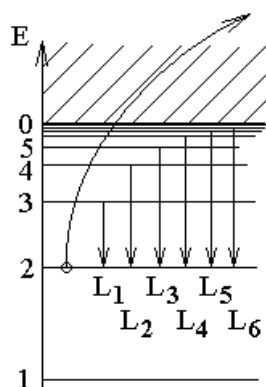
Сплошной спектр — это тормозное излучение электронов, останавливающихся внутри материала анода, так как ускоренное движение зарядов всегда сопровождается излучением. Максимальная энергия рентгеновского фотона равна энергии налетающего электрона $h\nu_0 = eU$.

Линейчатый спектр определяется уровнями энергии внутренних электронов атома анода. Налетающий электрон имеет большую энергию и может выбить не только внешний электрон атома, но и один из электронов внутренних электронных оболочек атома. Если выбит электрон одной из внутренних оболочек атома, то электрон с любого из вышележащих уровней энергии может перейти на освободившейся уровень. Это сопровождается излучением рентгеновского кванта $\Delta E = h\nu$.

Если выбит электрон с уровня энергии самой нижней электронной оболочки (на ней 2 электрона), то возможные переходы электронов с вышележащих уровней энергии на освободившейся уровень образуют так называемую K -серию рентгеновских спектральных линий линейчатого спектра $K_1, K_2, K_3, \dots$:



Если электрон выбит с уровня энергии второй оболочки (на второй заполненной оболочке находится 8 электронов), то возможные переходы электронов с вышележащих уровней энергии образуют L -серию рентгеновских линий:



Аналогично, если электрон выбит с третьей оболочки, то в спектре появятся линии *M*-серии, т. д.

Гамма излучение.

$$\lambda < 0.01 \text{ нм}$$

$$h\nu > 125 \text{ кэВ}$$

Источники — излучение возбужденных атомных ядер, тормозное излучение в ускорителях элементарных частиц при взаимодействии ускоренной частицы с мишенью, излучение при взаимных превращениях элементарных частиц, космическое излучение.

Для сравнения энергия покоя электрона: 511 кэВ. Так при аннигиляции электрона и позитрона происходит излучение двух γ квантов с соответствующей энергией.