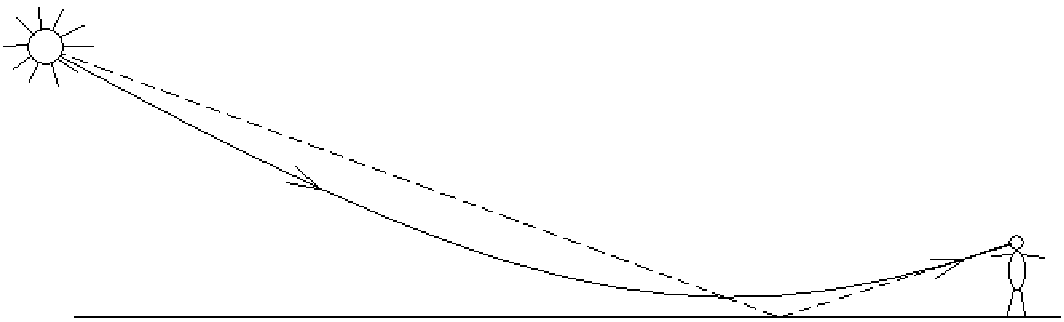
Экзамен. Миражи.

Если смотреть летом вдоль раскаленного шоссе, то где-то далеко асфальт кажется мокрым, покрытым лужами. Если у автомобиля включены фары, то в отражении как бы от лужи видна еще одна пара включенных фар.

Причина этой иллюзии в том, что у разогретого асфальта выше температура воздуха T, а давление воздуха p одинаковое: $p = Nk_Б T$, следовательно, у разогретого асфальта меньше концентрация молекул воздуха N.

Меньшая концентрация молекул означает, меньшее значение показателя преломления, так как при небольшой плотности из формулы Лоренц-Лорентца следует $(n-1) \sim N$.

Свет поворачивает в оптически более плотную среду:



При скользящем падении света свет поворачивает у поверхности асфальта, как бы отражаясь от лужи. В этой луже, которой на самом деле нет, видны отражения неба, солнца, деревьев или фар автомобиля.

В раскаленной пустыне свет поворачивает не только у раскаленного песка, но и в высоких разреженных слоях атмосферы. Эти отражения порождают миражи. Отражения позволяют видеть оазис из-под линии горизонта и видеть водные поверхности, которых на самом деле нет.

Экзамен. Разложение светового поля по частотам.

Рассмотрим вещественную напряженность светового поля $\vec{E}(t)$ в одной пространственной точке.

Преобразование Фурье позволяет представлять световое поле $\vec{E}(t)$ в одной точке пространства, как суперпозицию гармонических колебаний разных частот.

Рассмотрим прямое и обратное преобразование Фурье:

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}\cdot d\omega \\ \tilde{\vec{E}}_0(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt \end{cases}$$

, здесь коэффициент $\frac{1}{2\pi}$ может быть разделен на два сомножителя в интегралах произвольным образом.

Вещественность зависимости $\vec{E}(t)$ накладывает некоторые ограничения на вид ее Фурье образа $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)$. Рассмотрим $\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)$:

$$\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\vec{E}(t)e^{i\omega t}dt\right)^* = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\vec{E}(t)\right)^*\left(e^{i\omega t}\right)^*(dt)^* = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(t)e^{-i\omega t}dt = \tilde{\vec{E}}_0(-\omega)$$

Откуда:

$$\tilde{\vec{E}}_0(-\omega) = \tilde{\vec{E}}_0^*(\omega).$$

То есть, Фурье образ поля $\vec{E}(t)$ на отрицательных частотах может быть выражен, как комплексно сопряженная величина к Фурье образу на положительных частотах. Тогда Фурье интеграл по всем частотам можно выразить через Фурье интеграл только по положительным частотам

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega.$$

для этого в первом интеграле заменим ω на $(-\omega)$ и воспользуемся равенством $\tilde{\vec{E}}_0(-\omega) = \tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)$, тогда получим

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega.$$

Заметим, что первое слагаемое является комплексно сопряженным ко второму, тогда

$$\vec{E}(t) = \left(\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega\right)^* + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega = \mathrm{Re}\left(\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega\right),$$

так как при сложении комплексно сопряженных величин вещественная часть удваивается, а мнимая сокращается. Тогда

$\vec{E}(t) = \mathrm{Re}\left(\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega\right)$ — разложение светового поля по положительным частотам.

В результате получаем разложение вещественного светового поля, как по частотам обоих знаков, так и по положительным частотам

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t} d\omega = \mathrm{Re}\int_{0}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t} d\omega \\ \tilde{\vec{E}}_0(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t} dt \end{cases}.$$

Будем называть комплексным световым полем $\tilde{\vec{E}}(t)$ выражение:

$$\tilde{\vec{E}}(t) = \int_{0}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t} d\omega.$$

Тогда Фурье образ $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)$ показывает, сколько в комплексном поле $\tilde{\vec{E}}(t)$ содержится сигнала с частотой ω.

$\vec{E}(t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}(t)\right)$ — связь вещественного $\vec{E}(t)$ и комплексного $\tilde{\vec{E}}(t)$ световых полей.

<u>Экзамен. Ряды Фурье для светового поля.</u>

Мы не знаем величину электрического поля на бесконечном интервале времени.

Допустим, нам известно поле $\vec{E}(t)$ на промежутке времени T.

В таком случае за пределами известного интервала времени T либо считают поле $\vec{E}(t)$ равным нулю, либо считают, что поле периодически повторяется с периодом T. Пусть поле $\vec{E}(t)$ — периодическая функция времени. Периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье по кратным частотам.

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t}, \text{ где } \omega_m = m\frac{2\pi}{T}, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Здесь амплитуды ряда Фурье находятся по формулам:

$$\tilde{\vec{E}}_m = \frac{2}{T}\int_0^T \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega_m t} dt.$$

Рассмотрим выражение комплексно сопряженное фурье-амплитуде:

$$\tilde{\vec{E}}_m^* = \left(\frac{2}{T}\int_0^T \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega_m t} dt\right)^* = \frac{2}{T}\int_0^T \vec{E}(t)\cdot e^{-i\omega_m t} dt = \tilde{\vec{E}}_{-m}$$

Аналогично интегралу Фурье из вещественности поля $\vec{E}(t)$ следует, что амплитуды разложения по отрицательным частотам должны быть комплексно сопряженными амплитудам на положительных частотах

$$\tilde{\vec{E}}_{-m} = \tilde{\vec{E}}_m^*.$$

Объединяя парами комплексно сопряженные слагаемые Фурье разложения поля $\vec{E}(t)$, можно из разложения поля по частотам обоих знаков получить разложение по положительным частотам:

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t} = \frac{\vec{E}_0}{2} + \mathrm{Re}\sum_{m=1}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t}.$$

Окончательно для периодической функции $\vec{E}(t)$ получаем представление в виде ряда Фурье:

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t} = \dfrac{\vec{E}_0}{2} + \mathrm{Re}\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t} \\ \tilde{\vec{E}}_m = \dfrac{2}{T}\cdot\int\limits_0^T \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega_m t} dt \end{cases}.$$

Экзамен. Спектр света. Разные определения спектра света. Спектр экспоненциально затухающего светового цуга.

Математики часто под спектром понимают Фурье образ $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)$ временно́й зависимости $\vec{E}(t)$. В физике исторически спектр света — это цветные изображения входной щели спектрометра в фокальной плоскости его объектива. Эти изображения представляют собой спектр света, падающего на входную щель спектрометра. Вопрос состоит в том, как количественно описать этот спектр света. Есть несколько подходов к этому вопросу.

В любом случае в физике спектр связан с зависимостью от частоты либо энергии света, либо интенсивности. Энергия пропорциональна интенсивности, а интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Фурье образ светового поля как раз и играет роль комплексной амплитуды света на определенной частоте света, поэтому спектр света в физике пропорционален квадрату модуля Фурье образа светового поля. Коэффициент пропорциональности в разных случаях вводится по-разному, и обычно вообще не обсуждается, как величина несущественная. Световое поле вещественно, следовательно, квадрат модуля Фурье образа на отрицательных частотах равен квадрату модуля на соответствующих положительных частотах. Поэтому в физике под спектром понимают зависимость квадрата модуля Фурье образа только от положительных частот.

В соответствии с этим мы будем называть спектром света величину пропорциональную квадрату модуля Фурье образа светового поля, как функцию положительной частоты света.

При рассмотрении Фурье образа есть два варианта — интеграл Фурье и ряд Фурье.

Если рассматривается спектр короткого светового импульса G_ω, то берут интеграл Фурье. В качестве примера рассмотрим спектр светового цуга, излучаемого одним атомом при переходе атома из возбужденного в невозбужденное состояние. Амплитуда излучения атома экспоненциально затухает во времени, поэтому световое поле атома в фиксированной точке наблюдения имеет вид:

$$E(t) = E_0\, e^{-\Gamma t} \cos\left(\omega_0 t\right) \text{ при } t > 0$$

и световое поле отсутствует при $t < 0$.

Вычислим Фурье образ этого светового поля:

$$\tilde{E}_0(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} E_0\, e^{-\Gamma t} \cos\left(\omega_0 t\right) e^{i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} E_0\, e^{-\Gamma t}\, \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-\left(\Gamma - i\left(\omega+\omega_0\right)\right)t} + e^{-\left(\Gamma - i\left(\omega-\omega_0\right)\right)t}\right) dt =$$

$$= \frac{E_0}{2\pi}\left(\frac{1}{\Gamma - i\left(\omega+\omega_0\right)} + \frac{1}{\Gamma - i\left(\omega-\omega_0\right)}\right).$$

Если $\omega \approx \omega_0$, то с учетом $\omega_0 \gg \Gamma$, второе слагаемое оказывается гораздо больше первого

$$\left|\frac{1}{\Gamma - i\left(\omega+\omega_0\right)}\right| << \left|\frac{1}{\Gamma - i\left(\omega-\omega_0\right)}\right|,$$

так как знаменатель второго слагаемого — величина порядка Γ, а знаменатель первого слагаемого — величина порядка $2\omega_0$. Фурье образ представляет интерес, когда он достаточно велик. Тогда интерес представляет область частот $\omega \approx \omega_0$, и Фурье образ примерно равен

$$\tilde{E}_0(\omega) \approx \frac{E_0}{2\pi\left(\Gamma - i\left(\omega-\omega_0\right)\right)}.$$

Спектр света G_ω пропорционален квадрату модуля Фурье образа:

$$\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 = \frac{E_0^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{\Gamma^2 + \left(\omega-\omega_0\right)^2} = \frac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\Gamma}\right)^2} = \frac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Gamma}\right),$$

где $G_\omega \sim \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 \sim \mathscr{L}(x) \equiv \dfrac{1}{1+x^2}$ — так называемый лоренцевский контур спектральной линии излучения одиночного атома, где $x \equiv \dfrac{\omega-\omega_0}{\Gamma}$ — безразмерная отстройка частоты ω от центра линии излучения ω_0, Γ — полуширина на полувысоте спектрального контура.

<u>Факультативная вставка.</u>

Если все-таки вводить определенный коэффициент пропорциональности между спектром G_ω и квадратом модуля Фурье образа $\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$, то это можно сделать следующим образом. Пусть $G = \dfrac{dW}{dS}$ — энергия электромагнитного поля, которая падает на единичную площадку перпендикулярную свету. Тогда

$$G = \int\limits_0^{+\infty} G_\omega \, d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t)\, dt \,, \qquad (1)$$

где $G_\omega \equiv \dfrac{dG}{d\omega}$ — спектр света или энергия, которая падает на единичную площадку в единичном интервале частот; $I(t)$ — интенсивность света или энергия, которая падает на единичную площадку в единицу времени.

Интенсивность света связана с его амплитудой $I = \dfrac{\varepsilon_0 cn}{2\mu} E_0^2(t)$.

В системе СГС Гаусса $I(t) = \frac{cn}{8\pi\mu} E_0^2(t)$.

Если теперь для светового цуга взять $E_0(t) = E_0 e^{-\Gamma t}$ при $t > 0$, в равенство (1) подставить $G_\omega = \alpha \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$ с неизвестным коэффициентом α и подставить $\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 = \dfrac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2} \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\omega - \omega_0}{\Gamma}\right)$, то можно найти величину коэффициента α. В результате окажется, что

$$G_\omega = 2\pi \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu} \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$$

В системе СГС Гаусса $G_\omega = 2\pi \frac{cn}{8\pi\mu} \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Если вместо светового импульса нужно анализировать изменение спектра света со временем, то рассматривают ряд Фурье. Для вычисления Фурье образа напряженности нужно рассматривать не один момент времени, а некоторый промежуток. Этот промежуток времени *T* усреднения спектра выбирают произвольно. Спектр может существенно зависеть от этого выбора.

Сначала рассматривают первый промежуток времени *T* и на этом промежутке определяют спектр. С этой целью реальную зависимость светового поля от времени заменяют периодической зависимостью с периодом *T*. На этом периоде световое поле полагается равным реальному световому полю на первом промежутке времени *T*. Для полученного таким образом периодического светового поля находят разложение в ряд Фурье. Квадраты модулей коэффициентов этого разложения представляют собой гистограмму спектра света на первом промежутке времени *T*. Затем рассматривают второй промежуток времени *T* с реальной зависимостью светового поля от времени. Чтобы найти спектр для этого второго промежутка времени *T*, реальную зависимость светового поля от времени опять заменяют на периодическую зависимость с периодом *T*. Только теперь на этом периоде световое поле совпадает с реальным световым полем на втором промежутке времени *T*. Опять вычисляют ряд Фурье. Квадраты модулей коэффициентов ряда Фурье — гистограмма спектра на втором промежутке времени *T*. И так далее. Получается возможность рассмотрения зависимости спектра от времени.

Если квадрат модуля фурье-амплитуды умножить на некоторый коэффициент:

$$I_m = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2$$

В системе СГС Гаусса $I_m = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2$

то I_m окажется интенсивностью света на частоте $\omega_m = m\frac{2\pi}{T}$. Можно доказать, что общая интенсивность света $I = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} I_m$. Набор интенсивностей I_m удобно называть и называют спектром света. В этом определении спектр света — это некоторая гистограмма.

Факультативная вставка.

Покажем, что $I = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} I_m$.

Выразим интенсивность света через среднее значение квадрата напряженности, а напряженность подставим в виде ряда Фурье.

$$I = \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t = \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\langle\left(\vec{E}(t), \vec{E}(t)\right)\right\rangle_t =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\langle\left(\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_m e^{-i\omega_m t}, \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_k e^{-i\omega_k t}\right)\right\rangle_t$$

Вынесем комплексные экспоненты за знак скалярного произведения и получим

$$I = \frac{\varepsilon_0 cn}{4\mu}\sum_{m,k=-\infty}^{+\infty}\left\langle e^{-i\omega_m t}\cdot\left(e^{-i\omega_k t}\right)^*\right\rangle_t \cdot\left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{E}}_k\right) = \frac{\varepsilon_0 cn}{4\mu}\sum_{m,k=-\infty}^{+\infty}\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t \cdot\left(\tilde{\vec{E}}_m, \tilde{\vec{E}}_k\right)$$

Если частоты ω_k и ω_m не совпадают, то $\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t = 0$, так как $e^{i(\omega_k-\omega_m)t}$ — комплексное число единичной длины, которое вращается на комплексной плоскости с угловой скоростью $\omega_k - \omega_m$. Если же частоты совпадают $\omega_k = \omega_m$, то $\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t = 1$. Тогда

$\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t = \delta_{km}$ — дельта символ Кронекера, и

$$I=\frac{\varepsilon_0 cn}{4\mu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_m\right)=\frac{\varepsilon_0 cn}{4\mu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{\vec{E}}_m\right|^2.$$

Учтем, что $\left|\tilde{\vec{E}}_{-m}\right|=\left|\tilde{\vec{E}}_m\right|$, так как $\tilde{\vec{E}}_{-m}=\tilde{\vec{E}}_m^*$ и получим

$$I=\frac{\varepsilon_0 cn}{4\mu}E_0^2+\frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\tilde{E}_m\right|^2.$$

Сравним это выражение с выражением интенсивности через вещественную амплитуду светового поля E_0:

$$I=\frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}E_0^2.$$

Вещественная амплитуда равна модулю комплексной амплитуды, тогда $I_m=\frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2$ — интенсивность светового поля на частоте $\omega_m=m\frac{2\pi}{T}$.

Введем для интенсивности на нулевой частоте определение: $I_0\equiv\frac{\varepsilon_0 cn}{4\mu}{E_0}^2$, тогда интенсивность света $I=\frac{\varepsilon_0 cn}{4\mu}E_0^2+\frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\tilde{E}_m\right|^2$ можно выразить, как сумму интенсивностей по положительным частотам:

$$I=\sum_{m=0}^{+\infty}I_m.$$

Конец факультативной вставки.

Факультативная вставка.

Особняком при рассмотрении спектра стоит излучение абсолютно черного тела (формула Планка). Здесь под спектром обычно понимают спектральную плотность объемной плотности энергии электромагнитного поля

$$w_\nu(T)\equiv\frac{dw}{d\nu}=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}.$$

Конец факультативной вставки.

Факультативная вставка.

Еще один вариант определения спектра связан с так называемой Фурье спектроскопией. Рассмотрим автокорреляционную функцию напряженности светового поля:

$$F(\tau)\equiv\left\langle E(t)E(t+\tau)\right\rangle_t,$$

где угловые скобки — это усреднение по времени.

Эту функцию можно измерить в эксперименте, как сигнал с приемника света в интерферометре Майкельсона (обсудим его позднее) при движении одного из зеркал интерферометра с постоянной скоростью. Функция $F(\tau)$ — четная функция, поэтому ее можно разложить в интеграл Фурье по косинусам. Фурье-образ функции $F(\tau)$ будет вещественной функцией частоты. Частота в

Фурье разложении через скорость движения зеркала может быть связана с оптической частотой света. Этот Фурье-образ, как функцию от оптической частоты, тоже можно по определению считать спектром света.

Конец факультативной вставки.

Факультативно. Теорема Парсеваля.

Если рассмотреть два выражения для поверхностной плотности энергии светового поля:

$$G = \int\limits_{0}^{+\infty} G_{\omega}\, d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t)\, dt,$$

где $G_{\omega} = 2\pi \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu} \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$ — спектр света или энергия, которая падает на единичную площадку перпендикулярную направлению света в единичном интервале циклических частот, $I = \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu} \left\langle E^2(t) \right\rangle_t$ — интенсивность света. То из этого равенства можно получить теорему Парсеваля:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)\, dt,$$

если вместо нашего определения $\tilde{\vec{E}}_0(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt$ положить, что

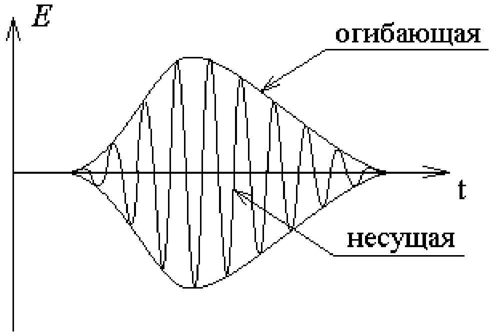
$$\tilde{\vec{E}}_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt.$$

Заметим, что в математике теорема Парсеваля доказана для более общего случая унитарного преобразования. Преобразование Фурье — частный случай унитарного преобразования.

Экзамен. Спектр огибающей амплитудно-модулированного светового импульса и спектр самого импульса.

Рассмотрим световое поле в одной пространственной точке. Пусть для простоты свет линейно поляризован. Тогда можно не следить за направлением светового поля $\vec{E}(t)$, а рассматривать только его величину.

Рассмотрим световой импульс.



Огибающая светового импульса — медленно меняющаяся амплитуда поля.

Несущая — синусоида с частотой заполнения огибающей. Косинусоида — это та же синусоида только со сдвигом фазы на $\frac{\pi}{2}$, поэтому косинусоиды для благозвучия тоже будем называть синусоидами.

Световой импульс — произведение двух функций: медленной огибающей и синусоиды несущей частоты.

Огибающую можно представить, как сумму нескольких синусоид, то есть в виде Фурье разложения.

Рассмотрим простейший вариант огибающей, которая состоит из одной синусоиды с частотой Ω_0:

$A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)$.

Пусть несущая имеет оптическую частоту ω_0:

$\cos(\omega_0 t)$, где для медленной огибающей $\Omega_0 << \omega_0$. Тогда

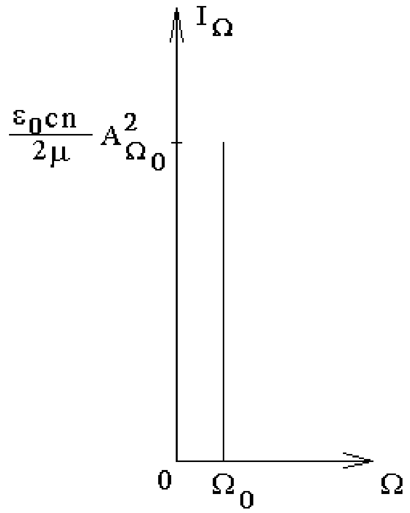
$$E(t) = A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)\cdot\cos(\omega_0 t) = \frac{A_{\Omega_0}}{2}\cos((\omega_0+\Omega_0)t) + \frac{A_{\Omega_0}}{2}\cos((\omega_0-\Omega_0)t).$$

Оказалось, что свет состоит из синусоид двух частот: $(\omega_0+\Omega_0)$ и $(\omega_0-\Omega_0)$. Амплитуда каждой из них $\frac{A_{\Omega_0}}{2}$ вдвое меньше амплитуды A_{Ω_0} огибающей $A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)$, а интенсивность вчетверо меньше, как квадрат амплитуды: $I = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}E_0^2$.

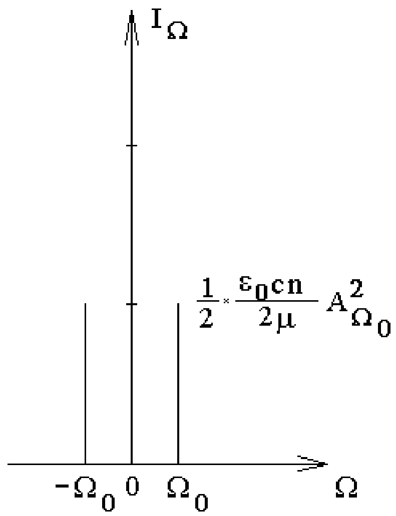
Рассмотрим три спектра. Для простоты будем считать, что частоты Ω_0 и ω_0 кратны одной и той же малой частоте ω_1. Тогда световое поле является периодической функцией с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Периодическое световое поле можно разложить в ряд Фурье. Будем под спектром света понимать совокупность интенсивностей фурье-компонент I_m. Для светового поля отличными от нуля окажутся интенсивности только двух компонент ряда Фурье с положительными частотами $\omega_0-\Omega_0$ и $\omega_0+\Omega_0$. В спектре огибающей окажется отличной от нуля интенсивность только одной компоненты с положительной частотой Ω_0. Амплитуды фурье-компонент будут совпадать с амплитудами соответствующих синусоид, а интенсивности компонент будут связаны с амплитудами обычными соотношениями вида $I = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu} A^2$.

Рассмотрим гистограммы трех спектров.

1). Спектр огибающей, который в рассматриваемом случае состоит из одной спектральной линии.

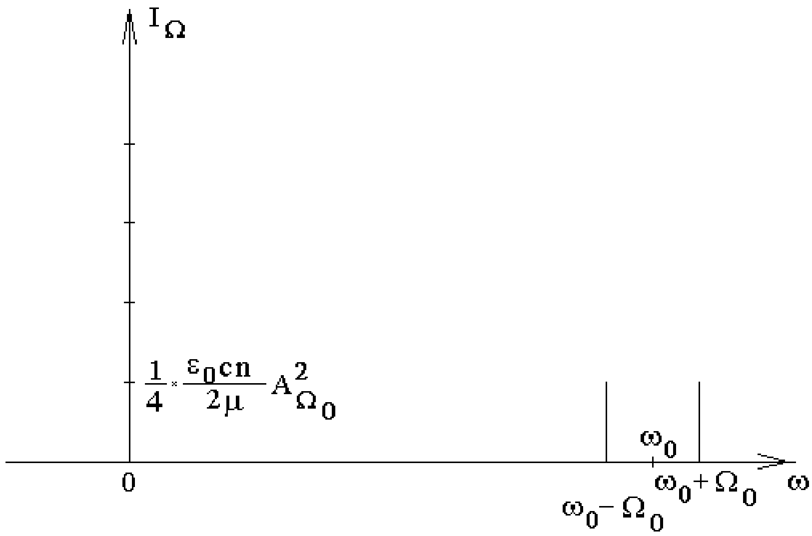


2). Спектр огибающей в частотах обоих знаков.



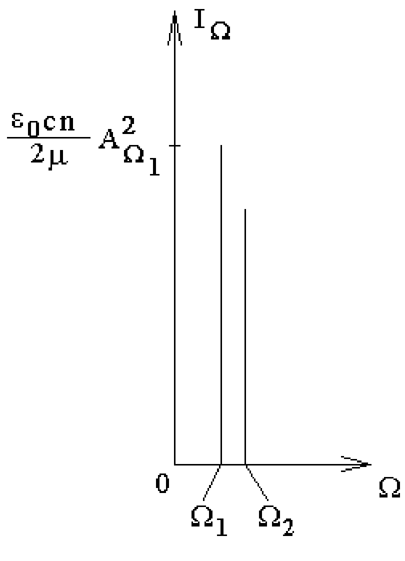
При этом чтобы суммарная интенсивность осталась без изменения, и интенсивность была бы равна сумме интенсивностей, нужно считать, что на каждую из этих двух частот приходится половина всей интенсивности.

3). Спектр светового импульса, который представляет собой спектр огибающей обоих знаков, сдвинутый на частоту несущей ω_0.

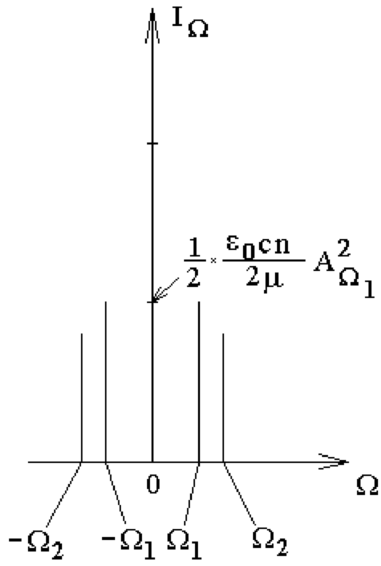


Интенсивности линий спектра становятся еще вдвое меньше. Причина еще одного коэффициента $\frac{1}{2}$ вызвана тем, что световой импульс в сравнении с огибающей имеет сомножитель $\cos(\omega_0 t)$, а интенсивность при этом имеет сомножитель $\left\langle \cos^2(\omega_0 t) \right\rangle_t = \frac{1}{2}$.

Обсудим теперь огибающую светового импульса, в спектре которой содержится несколько частот, например две.

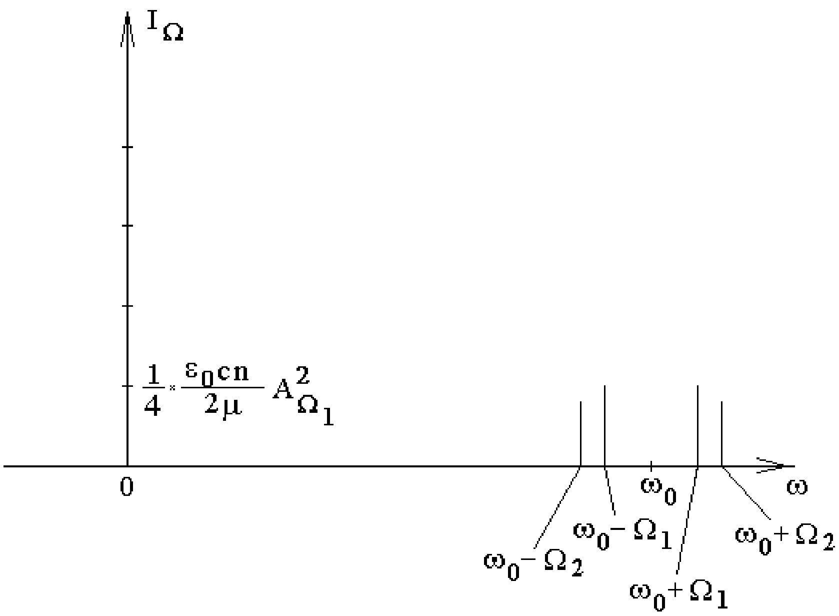


Спектр огибающей в частотах обоих знаков будет иметь вдвое меньшие интенсивности.



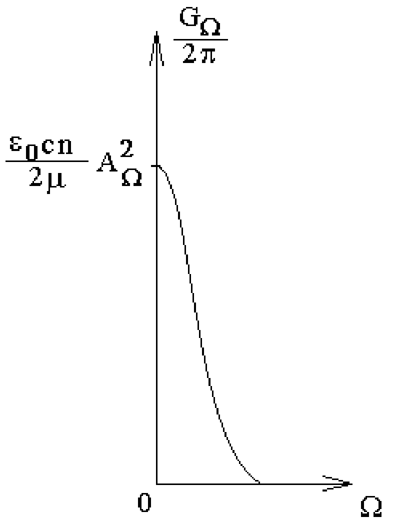
.

Спектр светового импульса будет подобен спектру огибающей, но еще вдвое ниже и сдвинут на частоту несущей.



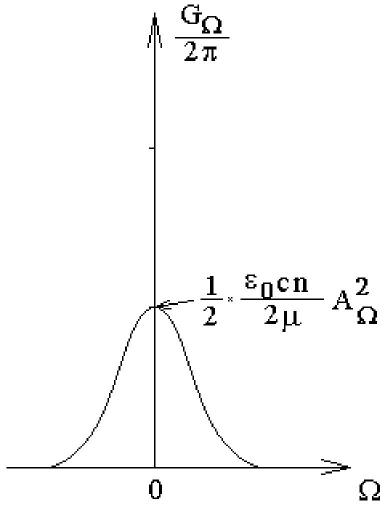
.

Обычно огибающую светового импульса можно разложить только в непрерывный спектр:

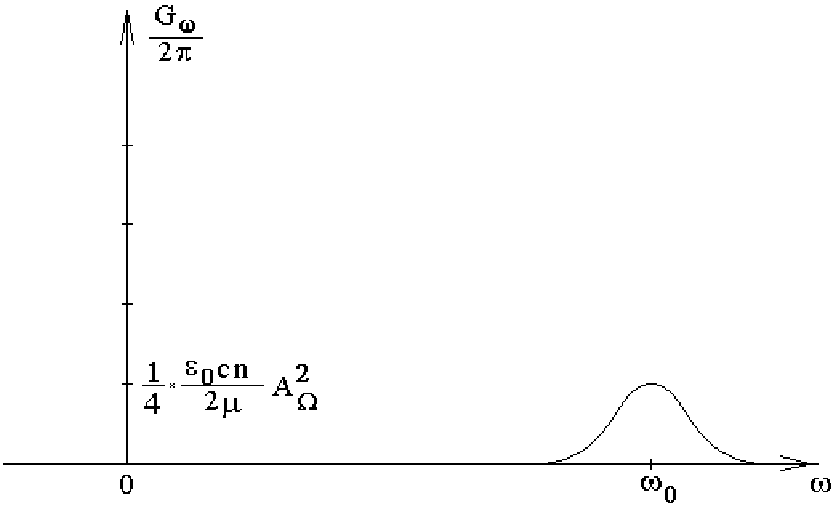


Здесь $G_\omega = 2\pi \dfrac{\varepsilon_0 cn}{2\mu} \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$ — спектр света или спектральная плотность поверхностной плотности энергии, $\left|\tilde{E}_0(\Omega)\right| = A_\Omega$ — модуль фурье-образа огибающей.

Спектру положительных частот можно сопоставить уполовиненный по высоте спектр частот обоих знаков.



При этом спектр светового импульса по форме совпадает со спектром огибающей, но оказывается еще вдвое ниже и сдвинут по оси абсцисс на величину равную несущей частоте.



Для краткости говорят, что спектр светового импульса — это спектр огибающей импульса, сдвинутый на частоту несущей. То, что спектр огибающей рассматривается в частотах обоих знаков, и то, что сдвинутый спектр вдвое уменьшается по высоте, подразумевается, но не озвучивается.

Экзамен. Соотношение неопределенности частоты и времени (без доказательства).

Опираясь только на свойства преобразования Фурье можно доказать, что спектральная ширина светового импульса $\Delta\omega$ и его длительность Δt связаны приблизительным соотношением

$\Delta\omega\Delta t > 1$.

Обычно под спектральной шириной импульса понимают ширину его спектрального контура G_ω на половине высоты (на половине максимального значения G_ω). Аналогично под длительностью импульса можно понимать ширину контура $I(t)$ на половине его высоты.

Это неравенство означает, что короткий световой импульс обязан иметь широкий спектр, а почти монохроматическое световое поле не может быть кратковременным.

Если короткий световой импульс пропустить через узкополосный светофильтр, спектральная ширина пропускания которого $\Delta\omega$ мала, то свет на выходе светофильтра будет иметь малую амплитуду и большую длительность, Δt — велико. Если монохроматический свет с постоянной амплитудой пропустить через затвор, который открывается на короткий промежуток времени, то после затвора спектр света становится широким.