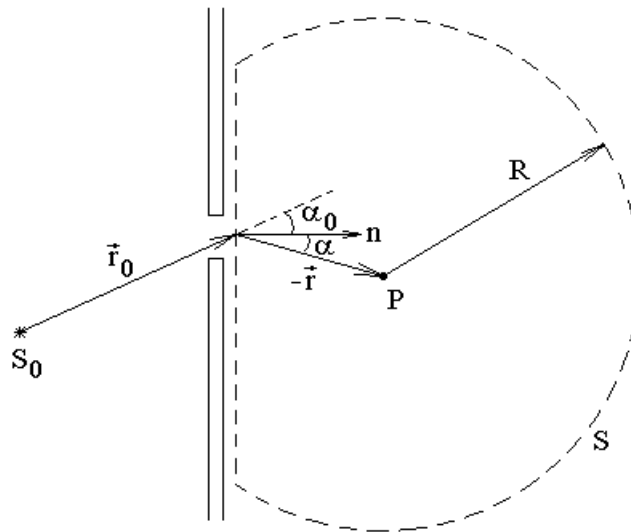


Экзамен. Применение теории Кирхгофа к дифракции света на отверстиях в непрозрачном плоском экране.



$$\tilde{E}_P = -\frac{i}{2\lambda} \oint_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot (\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)) \cdot dS$$

В качестве охватывающей точку наблюдения P поверхности S выберем сферу с радиусом R и центром в точке P . Часть сферы, которая находится до экрана, с другой стороны экрана от точки наблюдения, заменим плоскостью, расположенной вплотную к экрану со стороны точки наблюдения P .

Мысленно разобьем пунктирную поверхность S на три части:

$S = S_1 + S_2 + S_3$, где

S_1 — поверхность оставшейся справа от экрана части сферы,

S_2 — плоская поверхность, примыкающая непосредственно к экрану,

S_3 — поверхность отверстия в экране.

Согласно Кирхгофу интеграл нужно брать только по поверхности S_3 . Дело в том, что интеграл по поверхности S_2 , расположенной вплотную за непрозрачным экраном, близок к нулю, так как за экраном почти нет света, и амплитуда вторичных источников света очень мала. Интеграл же по поверхности S_1 оставшегося участка сферы стремится к нулю, по крайней мере, при стремлении радиуса сферы R к бесконечности.

Обсудим, почему $\int_{S_1} \frac{e^{ikr}}{r} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$. Это происходит только благодаря

сомножителю в виде коэффициента наклона. И действительно, с одной стороны, на большом расстоянии R от отверстия амплитуда $\tilde{E}_0$ поля вторичных источников на поверхности сферы спадает с расстоянием $\tilde{E}_0 \sim \frac{1}{R}$, и

сомножитель $\frac{e^{ikr}}{r}$ в подынтегральном выражении спадает, как $\sim \frac{1}{R}$, так как

$r = R$, но с другой стороны, площадь поверхности сферы растет $S_1 \sim R^2$. Поэтому, казалось бы, интеграл должен стремиться к константе. Этого не происходит из-за коэффициента наклона. Для большого радиуса сферы R свет приходит к поверхности сферы почти вдоль радиуса и излучается вторичным источником в точку P обратно вдоль радиуса сферы. Вторичный источник света назад не излучает, так как при излучении назад $\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha) = 0$.

По теории Кирхгофа для дифракции на отверстии в плоском экране достаточно суммировать излучение вторичных источников только по поверхности отверстия по формуле

$$\tilde{E}_P = -\frac{i}{2\lambda} \int_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot (\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)) \cdot dS.$$

Здесь $\tilde{E}_0(\vec{r})$ — комплексная амплитуда светового поля в плоскости отверстия,

$\vec{r}$ — вектор из точки наблюдения P в точку вторичных источников на поверхности отверстия,

α_0 — угол между лучом, пришедшим к отверстию, и нормалью к экрану $\vec{n}$,

α — угол между нормалью к экрану $\vec{n}$ и направлением $(-\vec{r})$ от вторичного источника к точке наблюдения.

Заметим, что обычно оба угла α_0 и α — острые углы, так как $\vec{n}$ — нормаль к экрану в направлении распространения света.

Во многих практически важных случаях световая волна падает на экран перпендикулярно экрану. Тогда $\alpha_0 = 0 \Rightarrow \cos(\alpha_0) = 1 \Rightarrow$

$-\frac{i}{2\lambda}(1 + \cos(\alpha))$ — коэффициент наклона, при нормальном падении света на экран, α — угол поворота света на вторичном источнике.

Кроме того, обычно считают, что источник света расположен далеко перед экраном, поэтому амплитуда поля в разных точках отверстия примерно одинаковая $\tilde{E}_0(\vec{r}) = E_0 = \text{const}$, и ее можно вынести за знак интеграла.

Точка наблюдения обычно расположена далеко от отверстия в экране по сравнению с размерами отверстия. В таком случае подынтегральный множитель $\frac{1}{r} \approx \text{const}$ имеет примерно одинаковое значение для всех точек отверстия, поэтому его заменяют константой.

Обычно рассматривают только малые углы дифракции. В таком случае $\alpha \approx 0$ и коэффициент наклона слабо зависит от угла дифракции

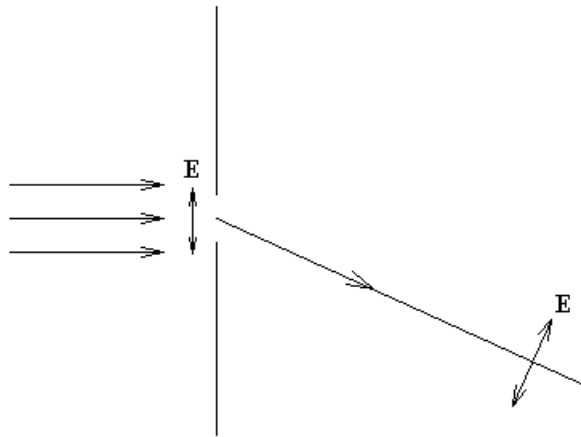
$-\frac{i}{2\lambda}(1 + \cos(\alpha)) \approx \text{const}$. В результате, во многих случаях интеграл Кирхгофа по площади отверстия рассматривают в упрощенном виде

$$\tilde{E}_P \sim E_0 \int_S e^{ikr} dS,$$

где r — расстояние от вторичного источника света в плоскости отверстия до точки наблюдения, в которой нужно рассчитать амплитуду света, dS — площадь малого вторичного источника в плоскости отверстия непрозрачного экрана.

Факультативно. Трудности теории дифракции Кирхгофа.

Пусть свет падает перпендикулярно отверстию, и свет имеет линейную поляризацию в плоскости рисунка.



В падающем на экран свете нет горизонтальной составляющей напряженности поля E , так как световое поле поперечно. Свет, ушедший далеко от отверстия вправо, тоже должен быть поперечен. Поэтому в дифрагированном свете должна появиться горизонтальная составляющая поля E .

Это с одной стороны, а с другой стороны для каждой проекции поля E можно применить интеграл Кирхгофа.

Применим интеграл Кирхгофа для горизонтальной составляющей поля E . В падающей волне нет горизонтальной составляющей поля E , тогда ей неоткуда появиться и в дифрагированной волне, которую можно найти, как интеграл Кирхгофа по плоскости отверстия.

Дело в том, что теория дифракции Кирхгофа не обеспечивает ортогональность световых волн. Она и не могла обеспечивать, потому что она выведена из волнового уравнения, а не из уравнений Максвелла. Кроме того при выводе формулы Кирхгофа рассматривался невозможный для поперечных волн точечный источник света $\tilde{E}_0(\vec{r}_0) = A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$.

Факультативно. Формулы Стрэттона — Чу.

В строгой теории дифракции векторных электромагнитных полей получается формула Стрэттона — Чу. Эту теорию можно найти в книге: А. Дж. Стрэттон. Теория электромагнетизма. М.; Л.: ОГИЗ, 1948, на стр.410 формулы

(19, 20). Несколько в более простом и понятном изложении формулу Стрэттона — Чу можно найти, например, в книге В.П. Якубов. Электродинамика. 2006. Томск, на стр.83 формула (3.10).

Поле в некотором объеме можно выразить, как поле излучения реальных источников внутри объема и поле излучения вторичных источников на границе объема. Причем вторичные источники таковы, что поле их излучения вместе с излучением реальных источников внутри объема за пределами границ объема равно нулю в каждой точке пространства и в каждый момент времени. В качестве вторичных источников нужно рассмотреть поверхностные заряды и поверхностные токи не только электрических зарядов, но и магнитных зарядов, которых на самом деле не бывает.

Если в объеме, который охватывает поверхность, нет источников поля, то

$$\tilde{\vec{E}}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ i\omega\mu_0\mu \left[\vec{n}, \tilde{\vec{H}} \right] \frac{e^{ikr}}{r} + \left[\vec{n}, \tilde{\vec{E}} \right], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] + \left(\vec{n}, \tilde{\vec{E}} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS,$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \tilde{\vec{E}}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ i\frac{\omega}{c}\mu \left[\vec{n}, \tilde{\vec{H}} \right] \frac{e^{ikr}}{r} + \left[\vec{n}, \tilde{\vec{E}} \right], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] + \left(\vec{n}, \tilde{\vec{E}} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS.$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внутренней нормали поверхности, μ — магнитная проницаемость среды, если она отлична от единицы. Здесь каждое из трех слагаемых под интегралом можно рассматривать, как излучение некоторых вторичных источников света, расположенных на поверхности. Вторичные источники имеют такую величину, чтобы электрическое и магнитное поле снаружи рассматриваемого объема было равно нулю. Тогда из граничных условий для поля получим: $\left[\vec{n}, \tilde{\vec{H}} \right] = \tilde{\vec{i}}$, где $\tilde{\vec{i}}$ — плотность поверхностных токов;

$$\text{В системе СГС Гаусса } \left[\vec{n}, \tilde{\vec{H}} \right] = \frac{4\pi}{c} \tilde{\vec{i}}.$$

$\left[\vec{n}, \tilde{\vec{E}} \right] = -\tilde{\vec{i}}_m$, где $\tilde{\vec{i}}_m$ — плотность поверхностных токов магнитных зарядов, которых на самом деле не бывает;

$$\text{В системе СГС Гаусса } \left[\vec{n}, \tilde{\vec{E}} \right] = -\frac{4\pi}{c} \tilde{i}_m.$$

$\left(\vec{n}, \tilde{\vec{E}} \right) = \frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon_0\varepsilon}$, где $\tilde{\sigma}$ — поверхностная плотность свободных зарядов, ε — диэлектрическая проницаемость среды, если она отлична от единицы.

$$\text{В системе СГС Гаусса } \left(\vec{n}, \tilde{\vec{E}} \right) = \frac{4\pi\tilde{\sigma}}{\varepsilon}.$$

$$\tilde{\vec{H}}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ i\omega\varepsilon_0\varepsilon \left[\vec{n}, \tilde{\vec{E}} \right] \frac{e^{ikr}}{r} - \left[\vec{n}, \tilde{\vec{H}} \right], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] - \left(\vec{n}, \tilde{\vec{H}} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS,$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \tilde{\vec{H}}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ i\frac{\omega}{c}\varepsilon \left[\vec{n}, \tilde{\vec{E}} \right] \frac{e^{ikr}}{r} - \left[\vec{n}, \tilde{\vec{H}} \right], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] - \left(\vec{n}, \tilde{\vec{H}} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS.$$

где $(\vec{n}, \vec{H}) = \frac{\tilde{\sigma}_m}{\mu_0 \mu}$ и $\tilde{\sigma}_m$ — поверхностная плотность магнитных зарядов, которых на самом деле не бывает.

$$\text{В системе СГС Гаусса } (\vec{n}, \vec{H}) = \frac{4\pi \tilde{\sigma}_m}{\mu}.$$

Совсем факультативная вставка (мои непроверенные соображения).

Если рассмотреть линейно поляризованный свет, который нормально падает на плоский непрозрачный экран с отверстием, то, интегрируя вторичные источники формулы Стрэттона — Чу только по поверхности отверстия, получим, что при дифракции под углом к нормали экрана поле не будет поперечным. Возможно причина в том, что поверхностные заряды и поверхностные токи в плоскости отверстия должны удовлетворять уравнению неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$. В таком случае поверхностные токи вторичных источников по поверхности отверстия на краю отверстия должны создавать линейный заряд, который тоже должен излучать.

Пусть в отверстии есть составляющая поля $\vec{H}$ направленная по касательной к поверхности отверстия $\vec{H}_{||} = [\vec{n}, \vec{H}]$ и $\vec{H}_{||} = \tilde{i}$,

$$\text{В системе СГС Гаусса } \vec{H}_{||} = \frac{4\pi}{c} \tilde{i}.$$

что означает появление вторичных источников излучения в виде поверхностного тока $\tilde{i}$ электрических зарядов по поверхности отверстия. Составляющая этих токов перпендикулярная краю отверстия $\tilde{i}_{\perp}$ создает на краю отверстия заряды с линейной плотностью $\tilde{\lambda}$ такие, что $\tilde{i}_{\perp} + \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial t} = 0$. Тогда $\tilde{i}_{\perp} - i\omega \tilde{\lambda} = 0$, где i — мнимая единица, и $\tilde{\lambda} = -\frac{i}{\omega} \tilde{i}_{\perp}$. Переменные заряды на краю отверстия излучают.

Аналогичные рассуждения справедливы для $\vec{E}_{||} = -\tilde{i}_m$ и линейного магнитного заряда $\tilde{\lambda}_m$ по краю отверстия.

$$\text{В системе СГС Гаусса } \vec{E}_{||} = -\frac{4\pi}{c} \tilde{i}_m.$$

Тогда к интегралу Стрэттона — Чу по поверхности отверстия

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ i\omega \mu_0 \mu [\vec{n}, \vec{H}] \frac{e^{ikr}}{r} + \left[[\vec{n}, \vec{E}], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] + (\vec{n}, \vec{E}) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \vec{E}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ i\frac{\omega}{c} \mu [\vec{n}, \vec{H}] \frac{e^{ikr}}{r} + \left[[\vec{n}, \vec{E}], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] + (\vec{n}, \vec{E}) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS.$$

нужно добавить излучение линейного электрического и магнитного заряда по краю отверстия. Пусть $\vec{\tau}$ — единичный вектор по касательной к границе

отверстия и перпендикулярный краю отверстия. Тогда $\tilde{i}_\perp = \left(\vec{\tau}, \left[\vec{n}, \tilde{H} \right] \right)$ и $\tilde{\lambda} = \frac{-i}{\omega} \left(\vec{\tau}, \left[\vec{n}, \tilde{H} \right] \right)$.

В системе СГС Гаусса $\tilde{i}_\perp = \frac{c}{4\pi} \left(\vec{\tau}, \left[\vec{n}, \tilde{H} \right] \right)$ и $\tilde{\lambda} = \frac{-ic}{4\pi\omega} \left(\vec{\tau}, \left[\vec{n}, \tilde{H} \right] \right)$.

К интегралу для $\tilde{E}_P$ по поверхности отверстия нужно добавить интеграл по краю отверстия

$$\frac{-i}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega} \oint_l \left\{ \left(\vec{\tau}, \left[\vec{n}, \tilde{H} \right] \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dl.$$

В системе СГС Гаусса $\frac{1}{4\pi} \oint_l \left\{ \frac{-ic}{\varepsilon \omega} \left(\vec{\tau}, \left[\vec{n}, \tilde{H} \right] \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dl$.

К интегралу

$$\tilde{H}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \left[\vec{n}, \tilde{E} \right] \frac{e^{ikr}}{r} - \left[\left[\vec{n}, \tilde{H} \right], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] - \left(\vec{n}, \tilde{H} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS$$

В системе СГС Гаусса $\tilde{H}_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ i \frac{\omega}{c} \varepsilon \left[\vec{n}, \tilde{E} \right] \frac{e^{ikr}}{r} - \left[\left[\vec{n}, \tilde{H} \right], \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] - \left(\vec{n}, \tilde{H} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dS$.

нужна аналогичная добавка

$$\frac{i}{\mu_0 \mu \omega} \oint_l \left\{ \left(\vec{\tau}, \left[\vec{n}, \tilde{E} \right] \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dl.$$

В системе СГС Гаусса $\frac{1}{4\pi} \oint_l \left\{ \frac{ic}{\mu \omega} \left(\vec{\tau}, \left[\vec{n}, \tilde{E} \right] \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} dl$.

Конец совсем факультативной вставки.

Факультативно. Теория дифракции Френеля. Построения Гюйгенса.

До создания скалярной теории Кирхгофа Френелем была разработана своя теория дифракции, в которой аналогично теории Кирхгофа рассматривается дифракция монохроматических световых волн.

В основе теории Френеля лежит принцип Гюйгенса — Френеля. Согласно этому принципу каждый участок фронта световой волны является вторичным источником волн. В точке наблюдения складываются комплексные амплитуды световых волн, пришедших от различных вторичных источников.

Амплитуда света, пришедшего от вторичного источника пропорциональна площади вторичного источника, пропорциональна амплитуде светового поля в области вторичного источника и обратно-пропорциональна расстоянию от вторичного источника до точки наблюдения. Кроме того, свет в точке наблюдения должен иметь множитель e^{ikr} , который отражает запаздывание по фазе на величину kr фазы в точке наблюдения относительно фазы вторичного источника.

Все это соответствует более поздней и более строгой скалярной теории Кирхгофа. Можно сказать, что теория Кирхгофа является математическим обоснованием теории Френеля. Дело в том, что все перечисленные выше свойства света, приходящего от вторичного источника в точку наблюдения, в теории Френеля были просто бездоказательной догадкой.

В теории Френеля не было коэффициента наклона, хотя Френель и догадывался, что какая-то зависимость излучения вторичного источника от направления должна быть.

В теории Кирхгофа

$$\tilde{E}_P = -\frac{i}{2\lambda} \oint_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot (\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)) \cdot dS, \text{ где интеграл берётся по}$$

любой поверхности вокруг точки наблюдения.

В теории Френеля

$$\tilde{E}_P \sim \int_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot dS, \text{ где интеграл берётся по набегающему на точку}$$

наблюдения фронту волны.

Название принципа Гюйгенса-Френеля связано с тем, что до теории Френеля огибание светом препятствий объяснялось с помощью построений Гюйгенса. В теме "Кристаллооптика" мы рассматривали эти построения факультативно. Согласно построениям Гюйгенса каждая точка фронта волны является вторичным источником света. Новое положение фронта световой волны через некоторый промежуток времени τ может быть получено, как граница множества точек, до которых достигает свет от любой из точек старого фронта волны за рассматриваемое время τ .

Экзамен. Зоны Френеля.

Зоны Френеля полезны только при рассмотрении дифракции в задаче с осевой симметрией, когда на одной оси находятся источник света, круглое отверстие в непрозрачном экране и точка наблюдения.

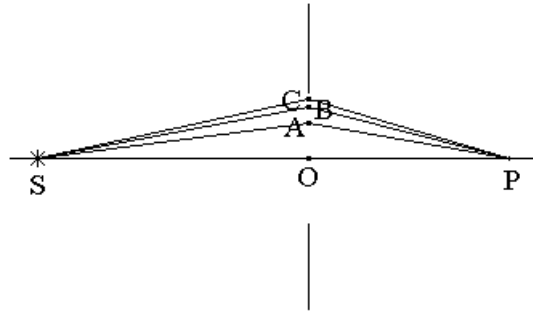
Зоны Френеля — это кольца, на которые мысленно разбивают плоскость отверстия со вторичными источниками света. В дополнение к определению зоны Френеля требуется, чтобы разность хода лучей, идущих через внешний и внутренний край кольца зоны Френеля, была бы равна $\frac{\lambda}{2}$.

Е. И. Бутиков в книге "Оптика" предлагает разбивать на зоны Френеля не поверхность отверстия, а поверхность фронта волны — сферу с центром в источнике света, точнее часть сферы, которая опирается на край отверстия. Это разбиение строго соответствует теории Френеля, но дает менее точный результат.

Мы, опираясь на теорию дифракции Кирхгофа, будем разбивать на зоны Френеля плоскость отверстия.

Радиусом зоны Френеля называют внешний радиус кольца.

Пусть OA, OB, OC — радиусы зон Френеля.



Если r_m — радиус m -ой зоны Френеля, то

$$\begin{cases} OA = r_1 \\ OB = r_2 \\ OC = r_3 \\ \vdots \end{cases}.$$

По определению зоны Френеля разность хода лучей, идущих через внешний и внутренний край кольца зоны Френеля, равна $\frac{\lambda}{2}$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} (SA + AP) - (SO + OP) &= \frac{\lambda}{2} \\ (SB + BP) - (SA + AP) &= \frac{\lambda}{2} \\ (SC + CP) - (SB + BP) &= \frac{\lambda}{2} \\ \vdots \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} (SA + AP) - (SO + OP) &= 1 \frac{\lambda}{2} \\ (SB + BP) - (SO + OP) &= 2 \frac{\lambda}{2} \\ (SC + CP) - (SO + OP) &= 3 \frac{\lambda}{2} \\ \vdots \end{aligned} \right\}.$$

Пусть $r_m = OM$ — радиус m -ой зоны Френеля. Тогда

$$(SM + MP) - (SO + OP) = m \frac{\lambda}{2}.$$

Обозначим

$L_1 \equiv SO$ — расстояние от источника света до отверстия,

$L_2 \equiv OP$ — расстояние от отверстия до точки наблюдения.

Тогда

$$\left(\sqrt{L_1^2 + r_m^2} + \sqrt{L_2^2 + r_m^2} \right) - (L_1 + L_2) = m \frac{\lambda}{2}.$$

Будем рассматривать зоны Френеля только с малыми номерами, когда выполняются приближения параксиальной оптики, то есть $r_m \ll L_i$. Тогда

$$\sqrt{L_1^2 + r_m^2} = L_1 \sqrt{1 + \frac{r_m^2}{L_1^2}} \approx L_1 \left(1 + \frac{r_m^2}{2L_1^2} \right) = L_1 + \frac{r_m^2}{2L_1} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{L_1^2 + r_m^2} - L_1 = \frac{r_m^2}{2L_1}.$$

Аналогично

$$\sqrt{L_2^2 + r_m^2} - L_2 = \frac{r_m^2}{2L_2}.$$

Подставим эти выражения в равенство

$$\left(\sqrt{L_1^2 + r_m^2} + \sqrt{L_2^2 + r_m^2} \right) - (L_1 + L_2) = m \frac{\lambda}{2}$$

и получим

$$\frac{r_m^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = m \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow$$

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}} \text{ — внешний радиус } m\text{-ой зоны Френеля.}$$

В частном случае, когда на экран падает плоская волна, можно считать, что источник волны находится бесконечно далеко $L_1 = \infty \Rightarrow$

$$r_m = \sqrt{m\lambda L_2}.$$

Если в формуле отсутствует расстояние L_1 , то L_2 можно переобозначить за L . Тогда

$$r_m = \sqrt{m\lambda L} \text{ — радиус } m\text{-ой зона Френеля для плоской падающей волны.}$$

Экзамен. Векторные диаграммы для зон Френеля.

Зоны Френеля имеют примерно одинаковые площади. И действительно

$$S_m = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \pi \left(m\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} - (m-1)\lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \right) = \pi \lambda \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

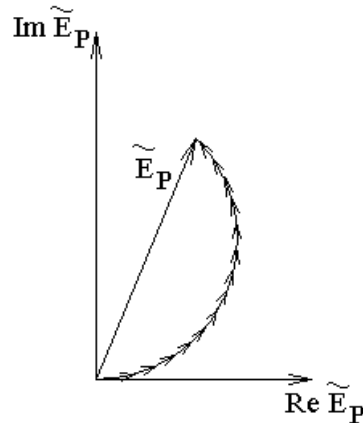
Здесь правая часть равенства не зависит от m , значит и площади зон Френеля S_m не зависят от m .

Разобьем отверстие на более мелкие кольца. Пусть кольца такие, что разность хода для двух лучей, проходящих через внешнюю и внутреннюю границы кольца, одна и та же для любого кольца. Тогда площади колец будут одинаковы. Это можно доказать, рассуждая аналогично рассмотрению зон Френеля.

Одинаковые разности хода эквивалентны одинаковым разностям фаз, так как

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\delta\varphi}{2\pi}.$$

Сдвиг фазы — это поворот комплексной амплитуды на комплексной плоскости. То есть векторные вклады от разных колец будут развернуты на одинаковые углы на комплексной плоскости. Длины этих векторов будут одинаковы, так как одинаковы площади колец вторичных источников. Следовательно, эти векторы будут лежать на дуге окружности.



Суммарная комплексная амплитуда света в точке наблюдения P — это хорда.

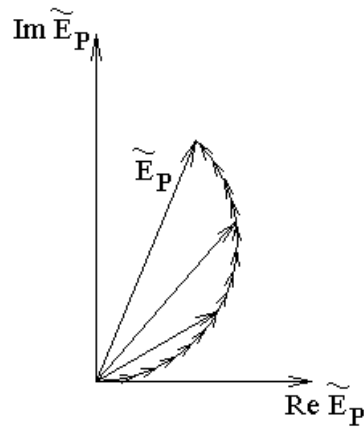
В этих рассуждениях мы пренебрегли зависимостью амплитуды от расстояния $\sim \frac{1}{r}$ и пренебрегли зависимостью коэффициента наклона от угла дифракции. Такие приближения справедливы, если радиус отверстия в экране гораздо меньше расстояния от экрана до источника света и расстояния от экрана до точки наблюдения $r_m \ll L_i$.

Напомним, что в электричестве комплексные напряжения и токи пропорциональны $e^{i\omega t}$, а в оптике напряженность электрического поля пропорциональна $e^{-i\omega t}$. В результате этой разницы поворот комплексной амплитуды на комплексной плоскости, например, против часовой стрелки в электричестве означает опережение по фазе, а в оптике — отставание по фазе.

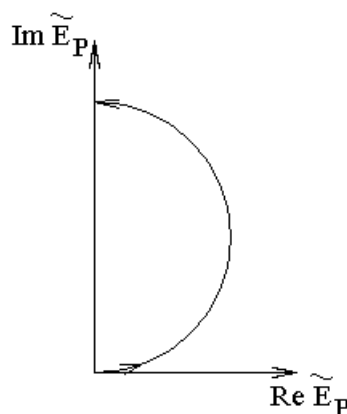
Напомним, что комплексная амплитуда $\tilde{E}_0(\vec{r})$ — это величина, входящая в выражение для вещественного поля $E(t, \vec{r})$:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \text{Re} \left\{ \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \vec{e}_p \cdot e^{-i\omega t} \right\}$$

Рассмотрим изменение картины сложения амплитуд на комплексной плоскости при изменении радиуса отверстия и сохранении остальных параметров.

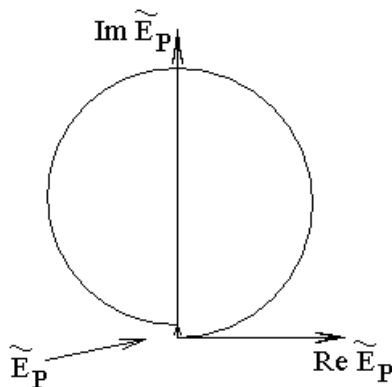


Если для точки наблюдения отверстие открывает одну зону Френеля, то картина сложения амплитуд имеет следующий вид:



Для внутреннего и внешнего края зоны Френеля по определению зоны Френеля разность хода равна $\Delta = \frac{\lambda}{2}$, что соответствует разности фаз $\delta\varphi = \pi$ и соответствует повороту вектора на комплексной плоскости на угол π . Если вклад от начала первой зоны смотрит направо, то от конца первой зоны — налево. Следовательно, картина сложения амплитуд на комплексной плоскости — половина окружности.

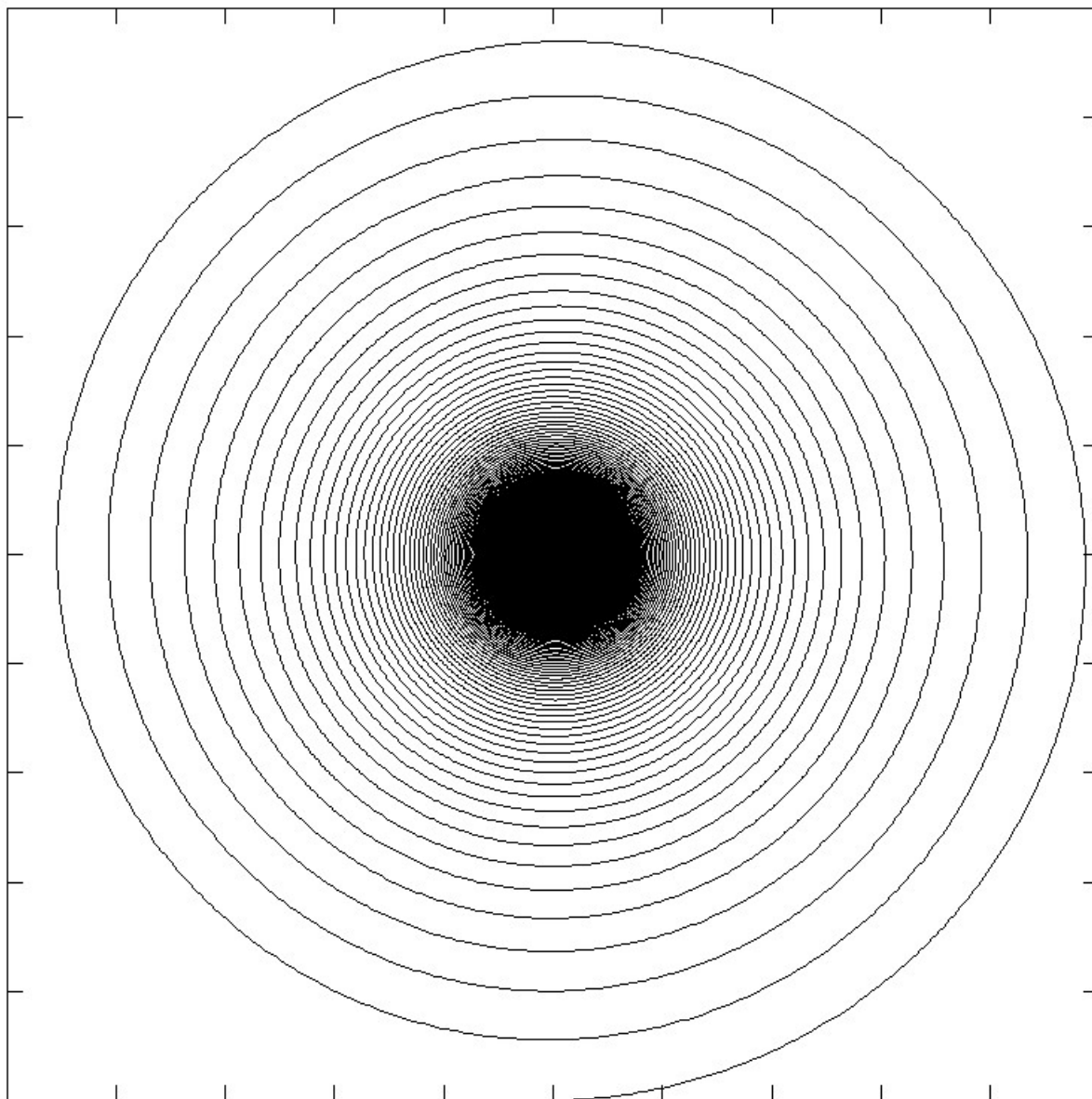
Аналогично для отверстия, которое открывает для точки наблюдения две зоны Френеля, картина сложения амплитуд — целая окружность. Суммарная амплитуда света E_P в этом случае очень мала.



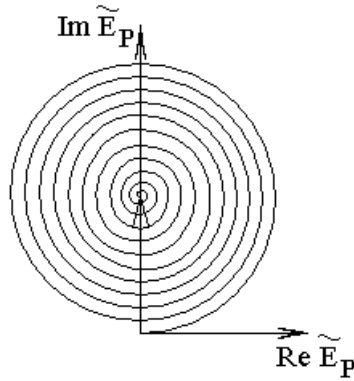
Отличие амплитуды от нуля вызвано тем, что коэффициент наклона для второй зоны Френеля в среднем чуть меньше, чем для первой зоны, и расстояние от вторичных источников второй зоны до точки наблюдения чуть больше, чем для первой зоны.

Аналогично для отверстия с четным числом зон Френеля амплитуда почти нулевая, а для нечетного числа зон Френеля — максимальна.

Если отверстие открывает всю плоскость, то картина сложения амплитуд имеет примерно следующий вид:



Схематически изобразим это следующим образом:



На самом деле шаг спирали при приближении к центру окружности становится меньше и меньше.

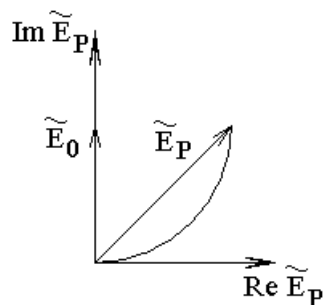
При этом суммарная амплитуда $\tilde{E}_0$ — вертикальный радиус окружности. Любопытно, что начальный вклад от центральной части первой зоны Френеля направлен вдоль вещественной оси, а суммарная амплитуда — вдоль мнимой оси. Это означает, что излучение плоскости вторичных источников света отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от излучения одного ближайшего к точке наблюдения вторичного источника.

Амплитуда $\tilde{E}_1 = 2\tilde{E}_0$ при открытой первой зоне Френеля — диаметр окружности. Здесь $\tilde{E}_0$ — амплитуда волны, падающей на экран с отверстием или амплитуда поля в точке наблюдения, если открыта вся плоскость вторичных источников.

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, следовательно $I_1 = 4I_0$. Интенсивность света при открытой первой зоне Френеля в 4 раза больше, чем интенсивность света падающего на экран.

Для четного числа открытых зон интенсивность близка к нулю, для нечетного числа — близка к $4I_0$.

Если в какой-либо задаче говорится о дробной части зоны Френеля, то имеется в виду соответствующая часть площади отверстия одной зоны, а не радиуса одной зоны. На картине сложения комплексных амплитуд получается соответствующая часть дуги половины окружности. Так для половины первой зоны Френеля картина сложения амплитуд имеет вид четверти окружности:

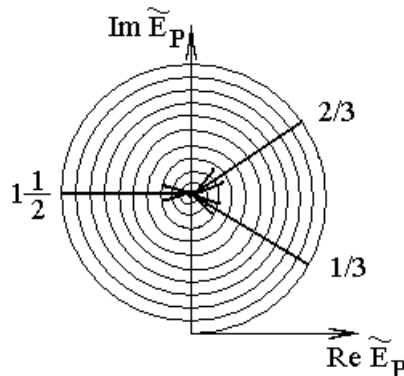


В этом случае $E_P = \sqrt{2}E_0$ и, соответственно, $I_P = 2I_0$.

Экзамен. Пятно Пуассона.

Если на пути плоской световой волны расположен непрозрачный диск или шар, то в центре геометрической тени есть светлое пятно — пятно Пуассона.

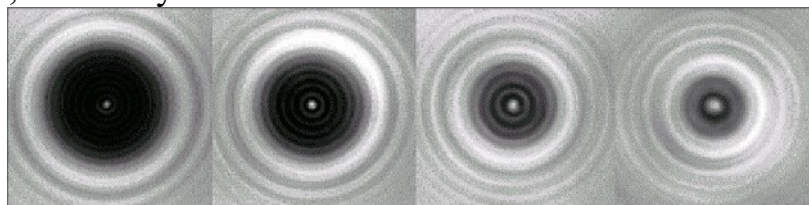
Рассмотрим три варианта картины сложения амплитуд на комплексной плоскости, когда непрозрачный диск закрывает $\frac{1}{3}$ зоны Френеля, $\frac{2}{3}$ зоны Френеля, $1\frac{1}{2}$ зоны Френеля:



В каждом случае часть дуги соответствующая непрозрачному диску не участвует в картине сложения амплитуд на комплексной плоскости, поэтому вектор оставшейся суммарной амплитуды начинается из конца соответствующей дуги.

Здесь в каждом случае комплексная амплитуда поля в точке наблюдения изображена соответствующим вектором. Как видно из рисунка длины трех векторов практически одинаковы и равны радиусу окружности, что соответствует амплитуде света от всей открытой плоскости вторичных источников. Тогда одинаковыми будут и соответствующие интенсивности, так как они пропорциональны квадратам длины или модуля векторов. Интенсивность света в центре пятна Пуассона примерно равна интенсивности света I_0 падающей на диск волны.

Пятно Пуассона появляется независимо от величины длины волны света. Следовательно, пятно Пуассона появляется и в белом свете.



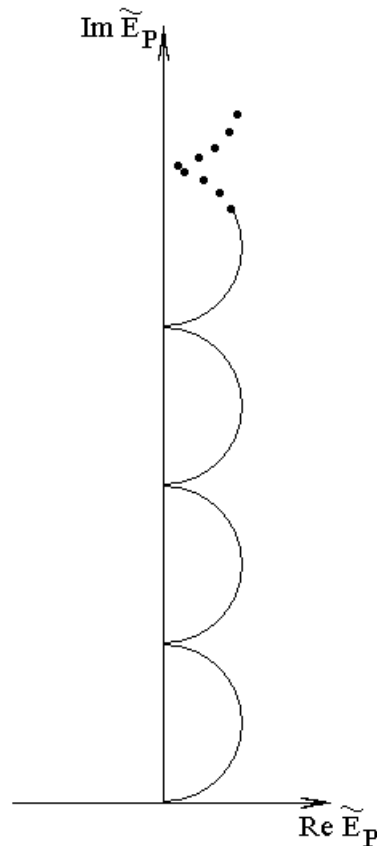
Слева направо уменьшается размер непрозрачного диска.

Экзамен. Зонная пластинка. Фокус зонной пластинки.

Зонная пластинка — это прозрачная пластинка, на которой непрозрачной краской закрашены все четные или все нечетные зоны Френеля.

Точка, для которой рассчитаны радиусы зон Френеля, называется фокусом зонной пластинки.

Пусть зонная пластинка закрывает все четные зоны Френеля. Рассмотрим картину сложения амплитуд на комплексной плоскости от оставшихся нечетных зон:



Из рисунка видно, что в фокусе зонной пластинки интенсивность света очень велика.

Экзамен. Отношение интенсивностей в фокусах линзы и зонной пластинки.

Рассмотрим вклад в комплексную амплитуду от первых двух зон Френеля.

Линза развернет окружность двух первых зон в прямую линию, так как сделает волны, проходящие через все кольца в плоскости линзы, синфазными. Большая интенсивность в фокусе линзы потому и получается, что свет приходит в фокус синфазно ото всех вторичных источников за линзой.

Если E_0 — радиус окружности на комплексной плоскости сложения амплитуд, то длина окружности равна $2\pi E_0$. Такое значение и будет иметь амплитуда поля в фокусе линзы, если у линзы открыты только две первых зоны.

Для зонной пластинки от двух первых зон открыта будет только первая зона. Амплитуда поля будет равна диаметру окружности на комплексной плоскости сложения амплитуд. Тогда амплитуда равна $2E_0$.

Тогда отношение амплитуд в фокусе линзы и зонной пластинки равно $\frac{2\pi E_0}{2E_0} = \pi$ в случае рассмотрения вклада только от двух первых зон Френеля.

Отношение вкладов от каждой следующей пары будет таким же. Следовательно, для линзы и зонной пластинки с диаметром равным четному числу зон Френеля отношение амплитуд будет таким же. Если диаметр неравен четному числу зон Френеля, но содержит много зон Френеля, то отношение амплитуд будет почти таким же.

Отношение интенсивностей равно отношению квадратов амплитуд, так как интенсивность света пропорциональна квадрату вещественной амплитуды поля.

Следовательно, отношение интенсивностей в фокусе линзы и зонной пластинки равно $\left(\frac{2\pi E_0}{2E_0}\right)^2 = \pi^2$.

Экзамен. Ложные фокусы зонной пластинки.

Кроме основного фокуса зонная пластинка имеет еще и ложные фокусы, интенсивность в которых такая же, как и в основном фокусе. Размер светового пятна в ложном фокусе меньше, чем в основном фокусе.

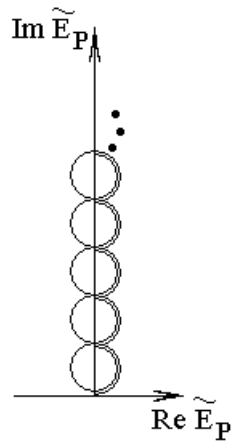
Пусть f — фокусное расстояние зонной пластинки.

Рассмотрим точку наблюдения, которая находится на расстоянии $L = \frac{f}{3}$ от зонной пластинки.

Будем считать, что на пути световой волны стоит изготовленная зонная пластинка с закрытыми, например, четными зонами Френеля. Радиусы зон Френеля $r_m = \sqrt{m\lambda L}$ этой зонной пластинки уже не изменить. Поэтому зафиксируем r_m и заменим $L \rightarrow \frac{L}{3}$, тогда для сохранения равенства $r_m = \sqrt{m\lambda L}$ необходимо заменить $m \rightarrow 3m$.

Следовательно, в одной зоне Френеля зонной пластинки изготовленной для $L = f$ укладываются три зоны Френеля для $L = \frac{f}{3}$.

Для $L = \frac{f}{3}$ картина сложения амплитуд на комплексной плоскости имеет следующий вид:



Когда дуга сворачивается в полторы окружности вместо половины окружности, тогда радиус окружности уменьшается вдвое. По этой причине амплитуда поля в ложном фокусе должна быть вдвое меньше, чем амплитуда в основном фокусе.

С другой стороны, ложный фокус расположен вдвое ближе $L = \frac{f}{3}$ к зонной пластике, чем расположен основной фокус. С учетом зависимости амплитуды поля вторичного источника от расстояния вида $\sim \frac{1}{r}$ амплитуда поля в ложном фокусе должна быть вдвое больше, чем амплитуда в основном фокусе.

В результате учета обоих факторов амплитуда поля в ложном фокусе равна амплитуде поля в основном фокусе.

Ложные фокусы расположены на следующих расстояниях от зонной пластинки: $\frac{f}{3}$, $\frac{f}{5}$, $\frac{f}{7}$ и так далее.