

Лекционные демонстрации 10 минут.

Экзамен. Принцип Бабинне.

Согласно принципу Бабинне

$$\tilde{E}_P = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2, \text{ где}$$

$\tilde{E}_P$ — комплексная амплитуда светового поля в точке наблюдения при отсутствии непрозрачного экрана,

$\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_2$ — комплексные амплитуды в точке наблюдения для двух дополнительных друг другу непрозрачных экранов.

Пример дополнительных экранов — непрозрачный диск и непрозрачный экран с круглым отверстием того же радиуса что и радиус непрозрачного диска.

Принцип Бабинне полностью согласуется с теорией дифракции Кирхгофа, но сама теория неточна.

Поясним соответствие принципа Бабинне теории дифракции Кирхгофа.

Рассмотрим три задачи и соответствующие им вторичные источники света в общей для этих задач плоскости экранов.

1). Экранов нет. Вторичные источники находятся на всей плоскости возможных непрозрачных экранов.

2). Непрозрачный экран с круглым отверстием. Вторичные источники находятся в плоскости отверстия.

3). Экран в виде непрозрачного диска. Вторичные источники расположены по всей плоскости снаружи диска.

Вторичные источники 2-ой и 3-ей задач в сумме дают вторичные источники 1-ой задачи. Тогда интеграл Кирхгофа для первой задачи равен сумме интегралов Кирхгофа для второй и третьей задач, что полностью согласуется с принципом Бабинне.

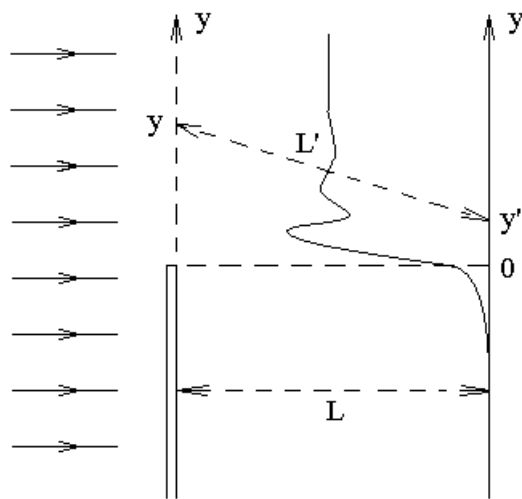
Рассмотрим дифракцию плоской монохроматической волны перпендикулярной плоскости экранов. Если экранов нет, то для любого направления, кроме исходного направления волны, света нет. Тогда для дифракции Фраунгофера в любом направлении, кроме исходного направления, получим

$$0 = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{E}_2 = -\tilde{E}_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2.$$

Интенсивности дифракционных картин для дополнительных экранов равны для любого направления дифракции, кроме направления исходной световой волны.

Дифракционную картину дифракции Фраунгофера, например, на круглом отверстии в непрозрачном экране можно наблюдать в фокальной плоскости линзы. Пусть диаметр линзы гораздо больше отверстия в экране, тогда для дополнительного экрана в виде непрозрачного диска дифракционная картина такая же плюс яркая точка в фокусе линзы.

Экзамен. Дифракция Френеля на краю экрана. Спираль Корню.



Пусть монохроматическая световая волна распространяется слева направо в направлении оси z . Перпендикулярно направлению волны находится непрозрачный экран в виде бесконечной полуплоскости. На другом экране параллельном первому, находящемся на расстоянии L , наблюдают дифракционную картину. Оба экрана параллельны плоскости x, y . Пусть граница непрозрачной полуплоскости совпадает с осью x . На границе полуплоскости $y = 0$.

Вторичные источники света на открытой полуплоскости мысленно разобьем на полоски с координатой y и шириной δy . Пусть произвольная точка наблюдения имеет координату y' и находится на расстоянии L' от полоски вторичного источника света с координатой y .

В разные точки экрана y' свет от разных вторичных источников y приходит в разных фазах. Как уже обсуждалось в вопросе дифракция Фраунгофера на одной щели, для вторичных источников света в виде тонких полосок разность фаз пропорциональна разности хода, как и в случае точечных вторичных источников. Тогда разность фаз в точке наблюдения для вторичного источника $y \neq y'$ относительно фазы вторичного источника расположенного на высоте точки наблюдения $y = y'$ равна

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} (L' - L) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\sqrt{L^2 + (y - y')^2} - L \right) = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left(L \sqrt{1 + \left(\frac{y - y'}{L} \right)^2} - L \right). \end{aligned}$$

Будем считать, что $(y - y') \ll L$, так как интуитивно ясно, что интенсивность света на экране в точке с вертикальной координатой y' больше всего зависит от вторичных источников света примерно на той же высоте $y \approx y'$. Тогда

$$\delta\varphi \approx \frac{2\pi}{\lambda} \left(L \left(1 + \frac{(y-y')^2}{2L^2} \right) - L \right) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{(y-y')^2}{2L} = \frac{\pi(y-y')^2}{\lambda L}$$

Вместо координаты y вторичного источника света и координаты y' точки наблюдения введем соответствующие им безразмерные координаты:

$$\begin{cases} \xi = y \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \\ \xi' = y' \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \end{cases}.$$

В этих безразмерных координатах запаздывание по фазе зависит от разности координат вторичного источника и точки наблюдения следующим образом

$$\delta\varphi = \frac{\pi}{2} (\xi - \xi')^2.$$

Далее учтем, что в теории дифракции Френеля вклад в комплексную амплитуду светового поля в точке наблюдения от вторичных источников полосы шириной $\delta\xi$ пропорционален $e^{i\delta\varphi} d\xi$, если считать, что в интеграле Кирхгофа сомножитель $\frac{1}{r} = \frac{1}{L'} \approx \frac{1}{L}$ почти постоянен, так как $(y - y') \ll L$.

Также учтем, что открыта верхняя полуплоскость вторичных источников ($y > 0$ или $\xi > 0$), следовательно, комплексная амплитуда светового поля в точке наблюдения может быть выражена, как сумма вкладов по этим открытым вторичным источникам света $\xi > 0$

$$\tilde{E}_P(\xi') \sim \int_0^{+\infty} e^{i\delta\varphi} d\xi = \int_0^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}(\xi - \xi')^2} d\xi.$$

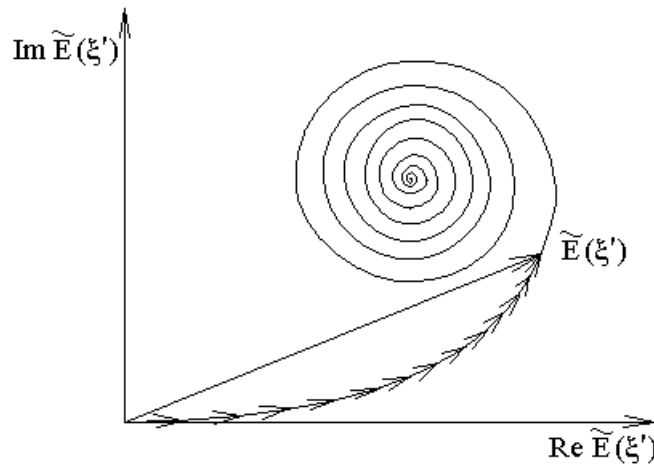
Будем рассматривать комплексную напряженность светового поля $\tilde{E}_P$ тоже в безразмерных координатах, и вместо пропорциональности интегралу будем считать, что она просто равна этому интегралу. Сделаем в интеграле замену переменной интегрирования ξ на $\eta = \xi - \xi'$ и получим

$$\tilde{E}_P(\xi') = \int_{-\xi'}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta.$$

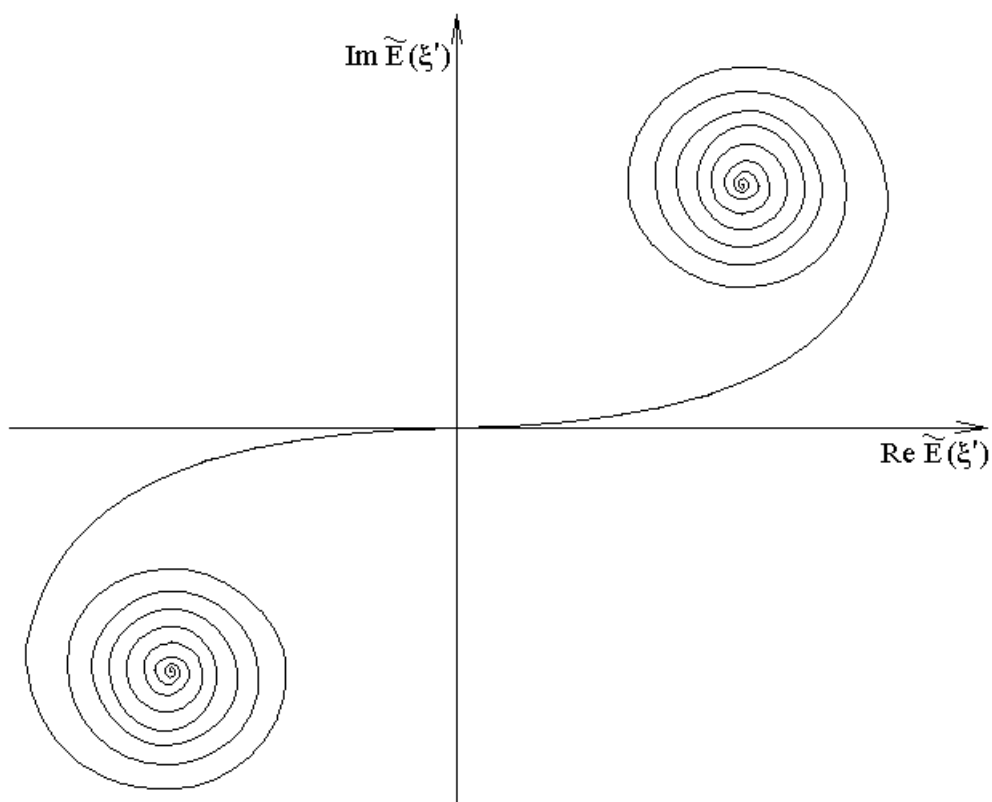
Здесь каждое подынтегральное слагаемое — это маленький вектор на плоскости комплексных амплитуд, который представляет собой вклад от узкой полосы вторичных источников света в комплексную амплитуду в точке наблюдения $\tilde{E}_P(\xi')$.

Рассмотрим аналогичный интеграл только от нуля и с переменным верхним пределом $\tilde{E}(\xi') = \int_0^{\xi'} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta$. Тогда $\tilde{E}_P(\xi') = \tilde{E}(+\infty) - \tilde{E}(-\xi')$.

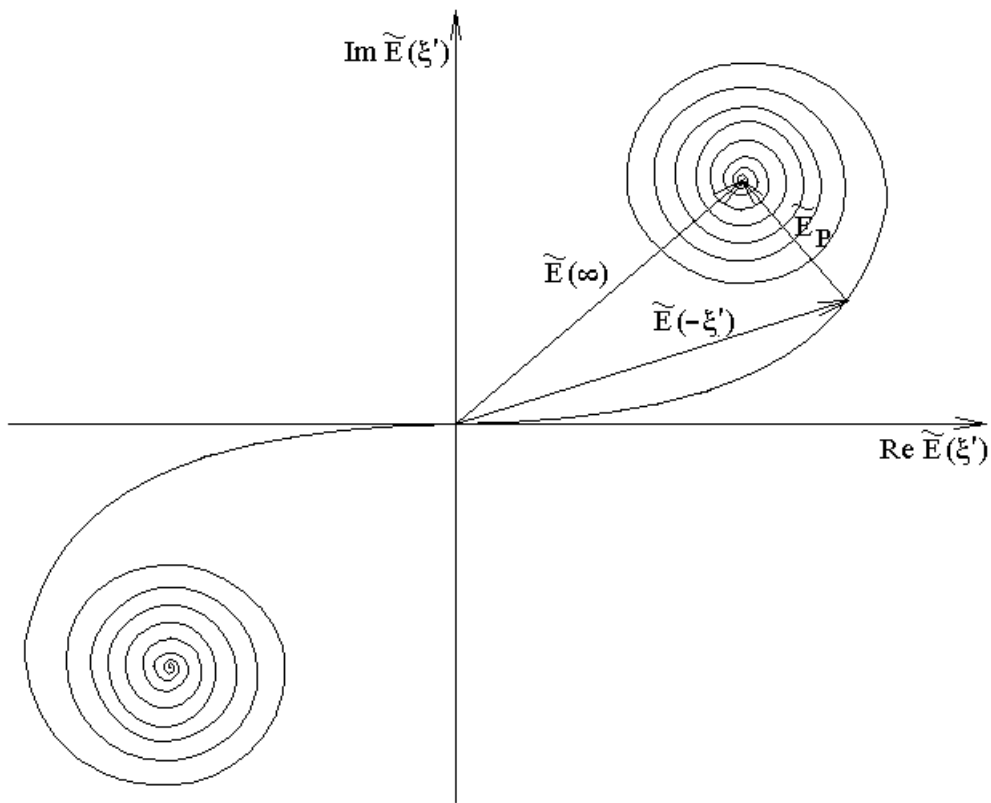
Здесь функцию $\tilde{E}(\xi')$ можно рассматривать, как кривую на комплексной плоскости. Каждому вещественному значению ξ' соответствует точка на комплексной плоскости $\tilde{E}(\xi') = \int_0^{\xi'} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta$. Эту точку можно получить, как конечную точку суммы малых векторов на комплексной плоскости, как сумму подынтегральных слагаемых. Все эти векторные слагаемые будут направлены вдоль кривой графика из начала координат в точку $\tilde{E}(\xi')$, соответствующую координате ξ' .



На рисунке представлена только часть кривой, соответствующая положительным значениям ξ' . Каждому отрицательному значению ξ' соответствует $\tilde{E}(\xi')$, отличающееся знаком от $\tilde{E}(\xi')$ с положительным ξ' , так как для отрицательного ξ' величина $d\eta$ в каждом подынтегральном слагаемом поменяет знак. Соответственно для кривой $\tilde{E}(\xi')$ с отрицательными ξ' получится аналогичный завиток в нижней левой четверти плоскости. Вся кривая представлена на следующем рисунке.



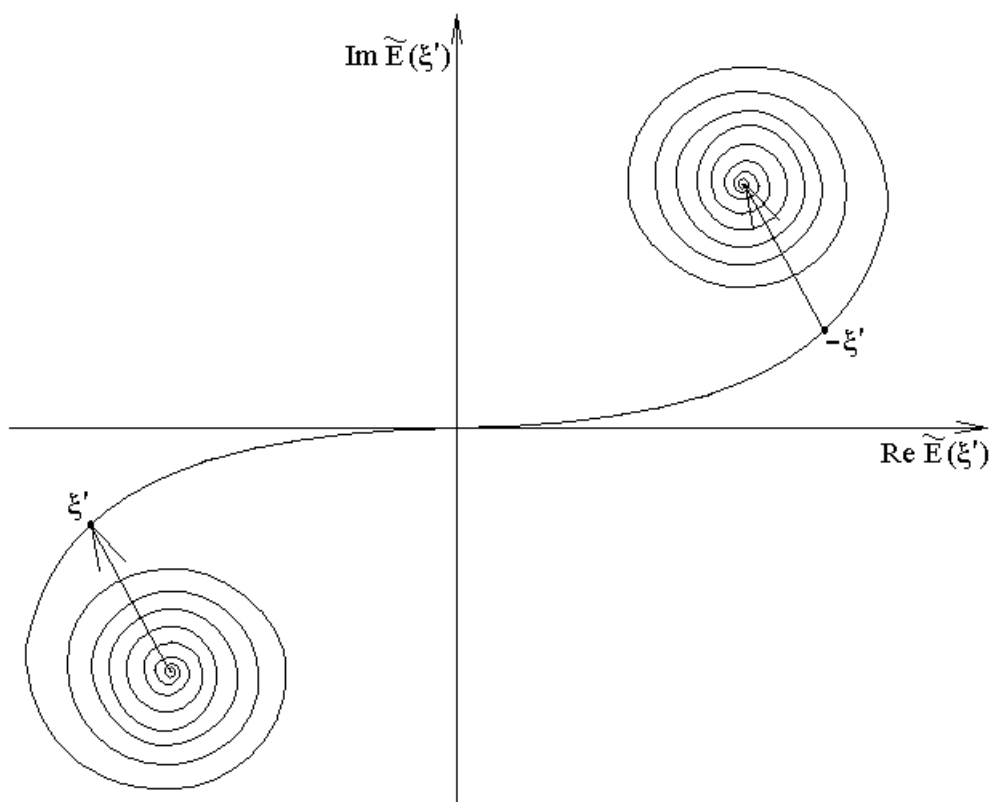
Это так называемая спираль Корню. Как уже отмечалось выше, комплексной амплитуде светового поля $\tilde{E}_P(\xi') = \int_{-\xi'}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta$ соответствует разность $\tilde{E}_P(\xi') = \tilde{E}(+\infty) - \tilde{E}(-\xi')$, например, в области геометрической тени для отрицательного значения y' и соответственно для отрицательного $\xi' = y' \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$ получим следующие векторы на кривой Корню.



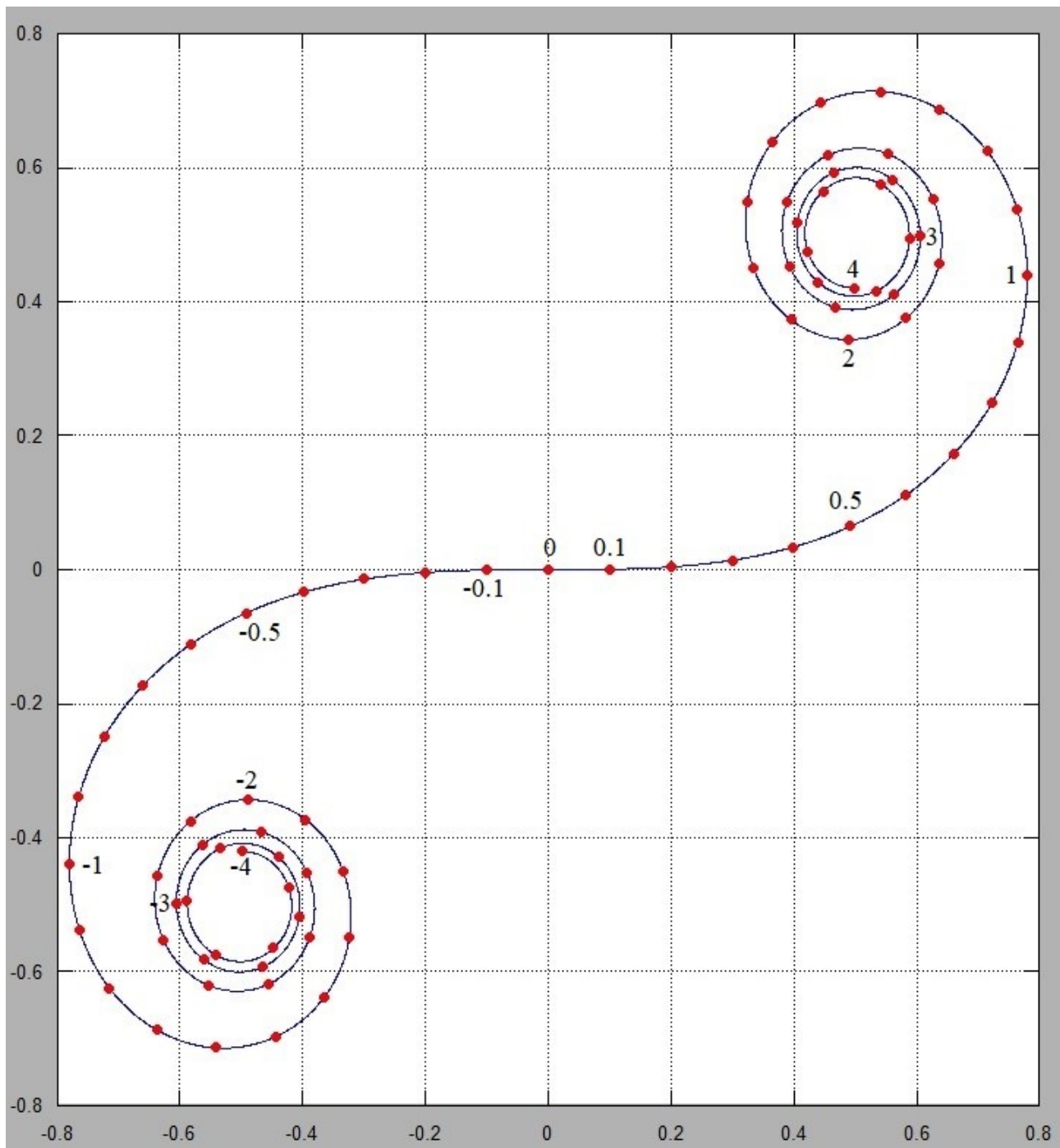
Каждой точке на экране наблюдения дифракционной картины соответствует определенное значение y' -координаты. Этому значению соответствует безразмерная координата $\xi' = y' \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$. Комплексная амплитуда поля $\tilde{E}_P$ в точке с координатой y' равна вектору на спирали Корню из соответствующей точки $\tilde{E}(-\xi')$ в центр правого завитка спирали, как это видно на рисунке сверху.

На спирали Корню обычно указывают точки с разными значениями ξ' , поэтому можно сказать, что безразмерная комплексная амплитуда равна вектору из точки $-\xi'$ в центр правого завитка.

Вместо вектора $\tilde{E}_P$ в правой верхней четверти на комплексной плоскости рисунка, изображенного выше можно рассмотреть равный ему вектор $\tilde{E}_P$ в левой нижней четверти следующего рисунка.

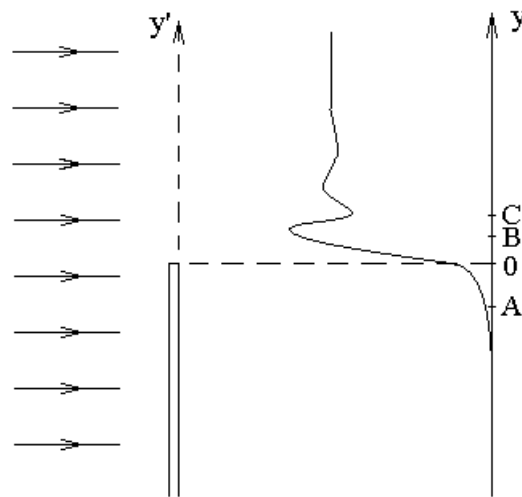


Вектор в левой нижней четверти рисунка проведен из точки $\tilde{E}(-\infty)$ центра левого завитка спирали Корню в точку $\tilde{E}(\xi')$. С этим вектором интуитивно проще разбираться, чем с равным ему вектором из точки $\tilde{E}(-\xi')$ в центр правого завитка спирали Корню $\tilde{E}(\infty)$.

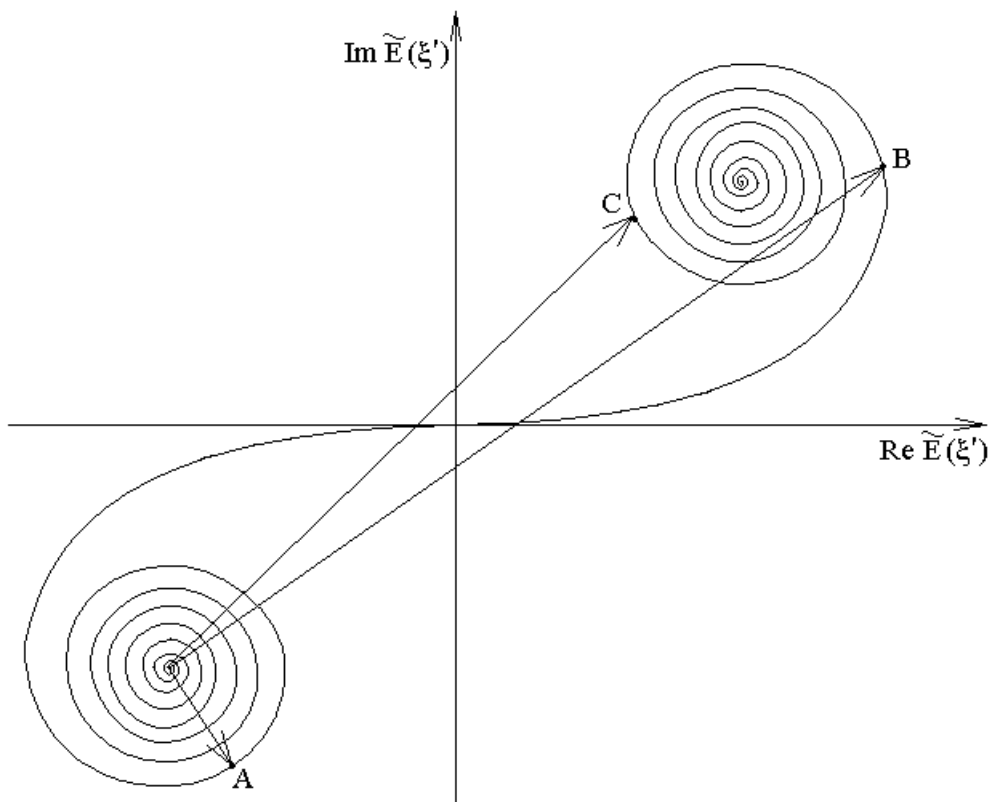


Расчет спирали Корню в Matlab. Красные точки соответствуют аргументу с шагом 0.1 в диапазоне от -4 до +4.

Рассмотрим картину сложения амплитуд на комплексной плоскости для разных точек экрана: A, B, C



и рассмотрим соответствующие точки на спирали Корню.



Пусть точка A находится в области геометрической тени, следовательно, $y' < 0$, $\xi' = y' \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} < 0$. То есть начальная точка $\tilde{E}(\xi')$ (или просто точка ξ') вектора комплексной амплитуды целиком лежит в левом нижнем завитке спирали Корню.

Из спирали Корню видно, что при смещении точки наблюдения A в область геометрической тени (ближе к центру правого завитка спирали Корню) амплитуда света, как и интенсивность, монотонно убывает.

Из рисунка спирали Корню видно, что при движении от точки A к точке B и соответственно при движении вверх по экрану от границы геометрической тени амплитуда и интенсивность возрастают монотонно.

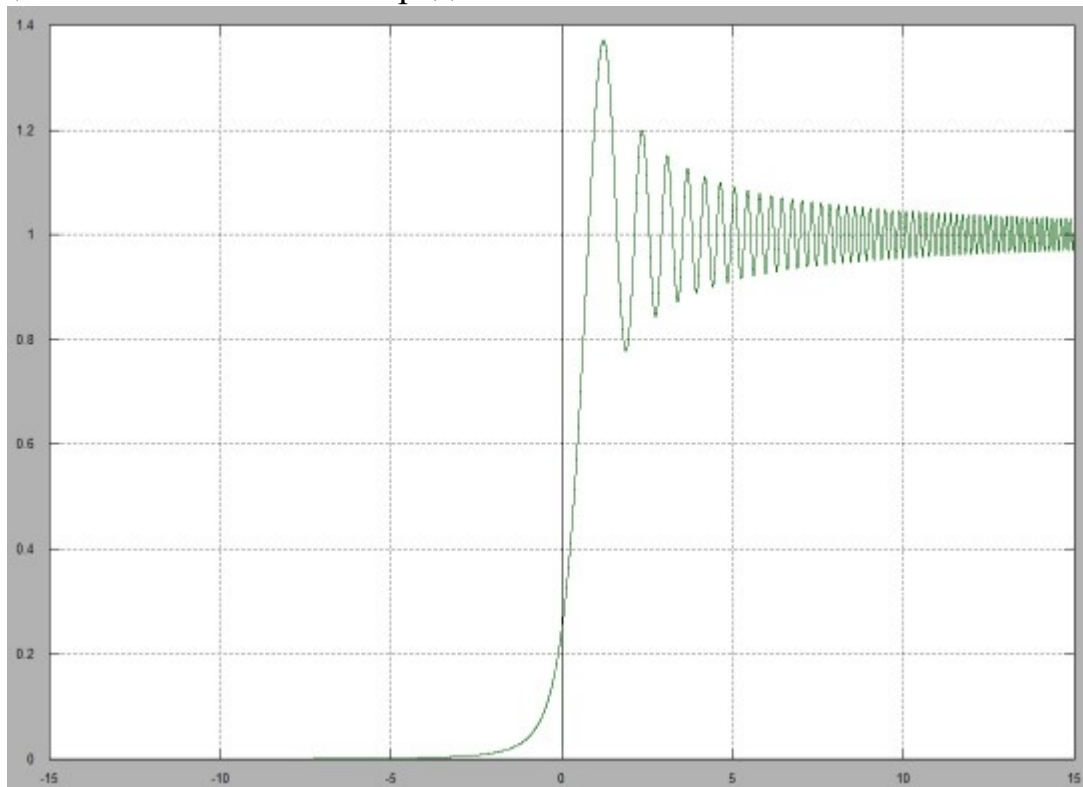
При дальнейшем движении вверх по экрану от точки B к точке C интенсивность света сначала чуть возрастает, а затем убывает. Это также видно из рисунка со спиралью Корню. Далее амплитуда света и интенсивность снова возрастают, затем снова убывают и т. д.

Вектор, проведенный из центра нижнего левого завитка спирали в центр верхнего правого завитка, равен комплексной амплитуде в точке наблюдения высоко вверх, далеко от границы непрозрачного экрана, или от всех полосок плоскости вторичных источников, то есть комплексной амплитуде излучения без загораживающей часть света экрана.

В освещенной области экрана интенсивность света осциллирует при удалении от границы геометрической тени.

На границе света и тени амплитуда равна половине всей амплитуды падающей волны, а интенсивность, соответственно, равна четверти всей интенсивности.

Пространственный период осцилляций интенсивности на экране вблизи границы света и тени имеет порядок величины $\sqrt{\lambda L}$.



Интенсивность дифракции на краю плоского непрозрачного экрана в зависимости от вертикальной координаты в единицах $\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$ (расчет в Matlab).

Дифракционная решетка.

Экзамен. Главные дифракционные максимумы решетки.

Дифракционная решетка может работать как в отраженном свете, так и в прошедшем свете.

Рассмотрим решетку, работающую на пропускание. Такая решетка состоит из чередующихся прозрачных и непрозрачных полосок.

Пусть a — ширина прозрачной полосы, b — ширина непрозрачной полосы. Тогда величину $a + b \equiv d$ — называют шагом дифракционной решетки или шириной штриха решетки.

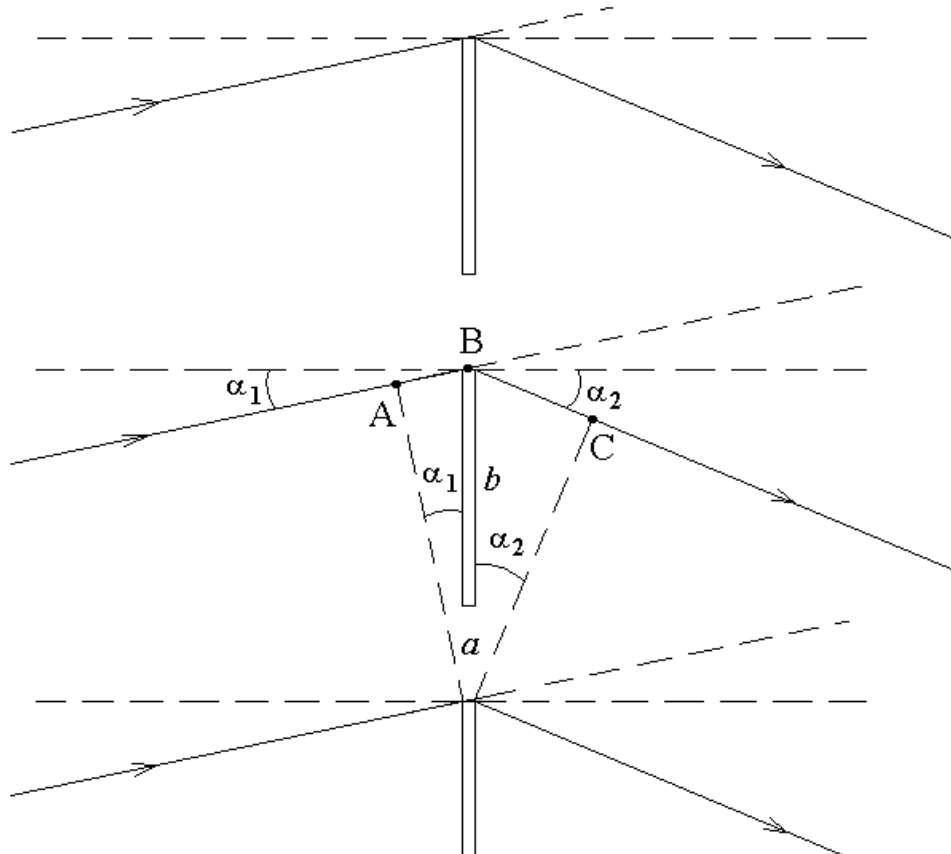
Будем рассматривать только дифракцию Фраунгофера, когда дифракционная картина локализована на бесконечности. Будем рассматривать возможные направления падающей световой волны только перпендикулярные направлению штриха решетки.

Направление главного дифракционного максимума решетки (по определению) — это направление, в котором свет от разных штрихов приходит в одинаковой фазе.

Если свет приходит в одинаковой фазе, то разность хода для соседних штрихов кратна длине волны.

$\Delta = m\lambda$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — порядок дифракции.

На следующем рисунке рассмотрим дифракционную решетку, которая работает на пропускание. Плоскость решетки перпендикулярна плоскости рисунка. Штрихи решетки тоже направлены перпендикулярно плоскости рисунка.



Из рисунка видно, что разность хода Δ лучей, проходящих через нижний край двух соседних штрихов решетки, равна сумме длин отрезков $AB = d \cdot \sin(\alpha_1)$ и $BC = d \cdot \sin(\alpha_2)$. Тогда:

$\Delta = d \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2))$, где $d = a + b$ — шаг решетки,

Здесь α_1 — угол падения света на дифракционную решетку или угол между падающим лучом и нормалью к плоскости решетки, α_2 — угол дифракции.

На рисунке угол α_1 отсчитывается против часовой стрелки, а угол α_2 — по часовой стрелке. Логичнее оба угла отсчитывать против часовой стрелки, тогда

$$\Delta = d \cdot (\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)), \quad (1)$$

и условие $\alpha_2 = \alpha_1$ соответствует свету, прошедшему решетку без изменения направления. В дальнейших формулах оставим знак минус и будем считать, что углы отсчитываются от нормали к экрану против часовой стрелки.

Все последующие рассуждения и равенства будут справедливы и для отражательных дифракционных решеток. В этом случае лучи правой части рисунка нужно отразить от плоскости решетки. После такого отражения обычно сохраняют знак минус в формуле (1), а положительные направления углов α_1 и α_2 отсчитываются в разные стороны от нормали к отражательной решетке.

Для главного дифракционного максимума $\Delta = m\lambda$ и, следовательно,
$$d \cdot (\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)) = m\lambda.$$

Это основное уравнение дифракционной решетки. Его можно рассматривать, как уравнение для определения угла дифракции света α_2 при заданных остальных параметрах. Для каждой длины волны света λ основное уравнение дифракционной решетки задает свое направление дифракции α_2 .

Отражательные дифракционные решетки обычно используются в спектрометре в качестве диспергирующего элемента вместо призмы. Параллельный пучок лучей падает на призму. После призмы свет каждой длины волны идет в своем направлении за счет дисперсии света (показатель преломления призмы зависит от длины волны света). Аналогично, если параллельный пучок света падает на дифракционную решетку, то после отражения от решетки свет с каждой длиной волны идет в свою сторону.

Спектр света, полученный с помощью дифракционной решетки, может быть осложнен наложением друг на друга спектров разных порядков дифракции.

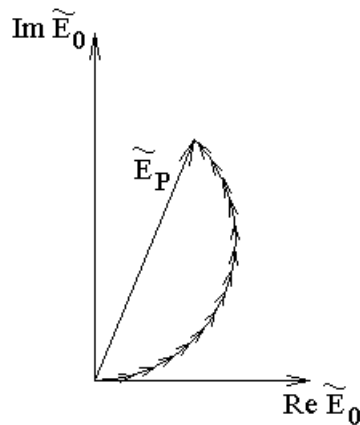
Экзамен. Угловая ширина главного дифракционного максимума решетки.

Пусть для некоторого угла дифракции разность хода для соседних штрихов почти кратна длине волны $\Delta \approx m\lambda$, но несколько отличается от $m\lambda$.

Если разность хода кратна λ , то разность фаз кратна 2π . Такую разность фаз можно не учитывать и считать нулевой.

Дифракционная решетка всегда содержит много штрихов от нескольких сотен до десятков тысяч. В таком случае суммарная комплексная амплитуда в точке наблюдения от вторичных источников всех штрихов — это сумма большого числа векторов на плоскости комплексных амплитуд. Векторы имеют одинаковую длину и развернуты друг относительно друга на одинаковые углы (угол поворота на комплексной плоскости равен разности фаз). Эти углы малы, если разность хода для соседних штрихов почти кратна λ , а соответствующая

разность фаз почти кратна 2π . В таком случае картина сложения комплексных амплитуд похожа на дугу окружности.



Количество слагаемых векторов равно числу штрихов решетки N .

При изменении угла дифракции дуга изменяет радиус кривизны без изменения длины дуги. При некотором угле дифракции дуга свернется в окружность, и суммарная амплитуда окажется нулевой. Этот угол дифракции будет примерно равен угловой ширине на половине высоты главного дифракционного максимума решетки. Поясним это чуть позже, а сейчас найдем величину угла.

Если дуга свернулась в окружность, то сдвиг фаз между первым и последним N -м слагаемым будет примерно равен 2π :

$$\delta\varphi_{1N} \approx 2\pi.$$

Этот угол равен $N-1$ углов между соседними векторами $\delta\varphi_{12}$, тогда

$$\delta\varphi_{12} = \frac{\delta\varphi_{1N}}{N-1} = \frac{2\pi}{N}.$$

Этой разности фаз комплексных амплитуд излучений двух соседних штрихов решетки соответствует разность хода:

$$\delta\Delta_{12} = \lambda \frac{\delta\varphi_{12}}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi} \delta\varphi_{12} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{N} = \frac{\lambda}{N}.$$

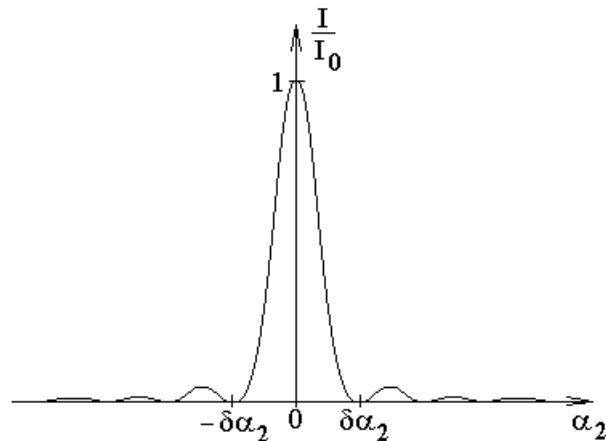
Найдем, какое изменение угла дифракции $\delta\alpha_2$ соответствует такому изменению разности хода. Для этого рассмотрим дифференциал δ уравнения $\Delta_{12} \equiv \Delta = d \cdot (\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2))$, где d — шаг решетки, считая, что переменные величины — это разность хода Δ_{12} и угол дифракции α_2 :

$$\delta\Delta_{12} = d \cdot \delta(\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)) = -d \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \delta\alpha_2 \quad \Rightarrow$$

$\delta\Delta_{12} = d \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \delta\alpha_2$, если $\delta\Delta_{12}$ и $\delta\alpha_2$ рассматривать, как положительные величины.

Заменим в этом равенстве $\delta\Delta_{12}$ разностью хода от двух соседних штрихов $\delta\Delta_{12} = \frac{\lambda}{N}$ соответствующей изменению амплитуды дифрагированной волны от максимума до нуля и получим соответствующее изменение угла дифракции $\delta\alpha_2$

$$\delta\alpha_2 = \frac{\lambda}{Nd \cdot \cos(\alpha_2)}.$$

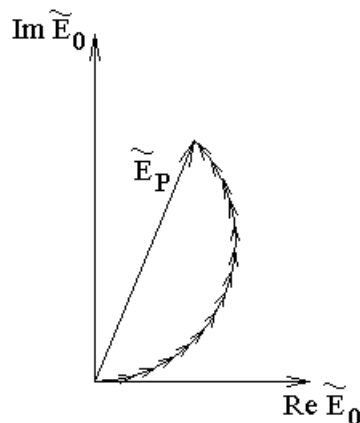


Из рисунка зависимости интенсивности дифрагированной волны от угла дифракции видно, что угол $\delta\alpha_2 = \frac{\lambda}{Nd \cdot \cos(\alpha_2)}$ примерно равен угловой ширине главного дифракционного максимума на половине его высоты.

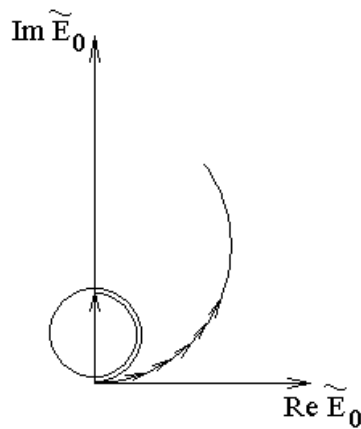
Экзамен. Побочные максимумы дифракционной решетки.

Напомним рассмотрение вопроса об угловой ширине главного дифракционного максимума дифракционной решетки.

Как уже обсуждалось выше, на комплексной плоскости картина сложения комплексных амплитуд излучения разных штрихов решетки похожа на дугу окружности:



При изменении направления наблюдения света (угла дифракции) изменяется радиус кривизны без изменения длины дуги. При монотонном изменении угла дифракции дуга сначала сворачивается в окружность, а затем — в полторы окружности. Вектор, проведенный из начала дуги в конец при этом снова достигнет максимума. Этому максимуму амплитуды соответствует максимум интенсивности.



Это и есть первый побочный максимум дифракционной решетки.

Длина дуги при сворачивании не изменяется, поэтому отношение амплитуды побочного максимума к амплитуде основного максимума равно отношению диаметра окружности к длине дуги в полторы окружности. Напомним, что для главного дифракционного максимума решетки дуга разворачивается в горизонтальный отрезок.

$$\frac{D}{\frac{3}{2}\pi D} = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi} \quad \text{— отношение амплитуд максимумов. Тогда отношение}$$

интенсивностей в первом побочном максимуме и в главном максимуме решетки будет равно:

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2}.$$

Следующие побочные максимумы получаются, когда дуга на комплексной плоскости сложения амплитуд сворачивается в две с половиной окружности, затем в три с половиной и т. д.

Интенсивности побочных максимумов относительно интенсивности главного максимума принимают значения:

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2}, \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\pi\right)^2}, \frac{1}{\left(\frac{7}{2}\pi\right)^2}, \dots$$

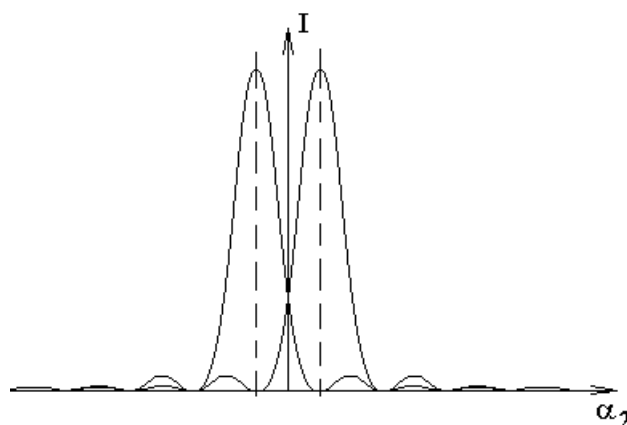
Если на дифракционную решетку падает не совсем монохроматическое излучение, а излучение с некоторой спектральной шириной, то зависимость интенсивности от угла дифракции для суммарной волны разных частот равна сумме зависимостей для каждой из частот. В результате побочные и основной максимум дифракционной решетки получают дополнительное уширение, а провалы интенсивности между максимумами могут не только не доходить до нуля, но и вообще пропасть.

Экзамен. Спектральное разрешение дифракционной решетки. Критерий Рэлея.

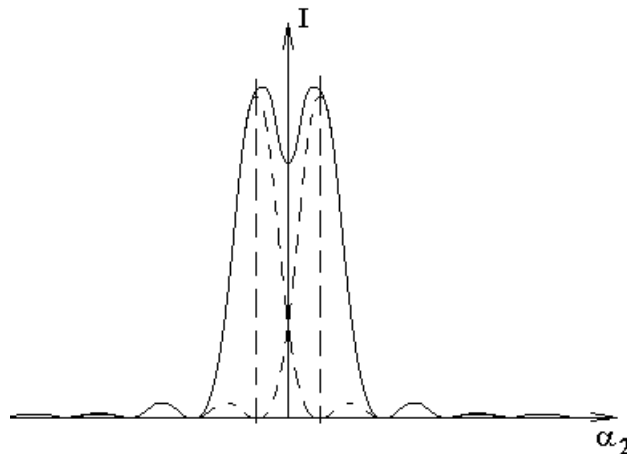
Пусть в спектре света, падающего на решетку, есть две близкие спектральные линии. В каких случаях дифракционная решетка позволяет определить, что линии две, а не одна?

По критерию Рэля спектральные линии находятся на пороге разрешения, если главный дифракционный максимум одной спектральной линии совпадает с первым нулем интенсивности другой. Имеется в виду ноль интенсивности соседний с главным дифракционным максимумом, и подразумевается, что интенсивности двух спектральных линий равны.

Рассмотрим два графика зависимости интенсивности света от угла дифракции для каждой из двух спектральных линий на пределе разрешения.



Если спектральные линии близки, то нет возможности различить, где свет одной линии, а где — другой. Регистрируется только суммарная интенсивность двух спектральных линий. На пороге разрешения по критерию Рэля контур суммарной интенсивности имеет в центре примерно 20%-ый провал.



Провал суммарного контура интенсивности в 20% — второе определение критерия Рэля для предела спектрального разрешения.

Эти два определения критерия Рэля для разрешающей способности оптических приборов справедливы не только для дифракционных решеток, но и для других оптических устройств. Если зависимость интенсивности после максимума не опускается до нуля, то пользуются вторым определением критерия Рэля для разрешающей способности оптического прибора (глубина провала 20%).

Для главного дифракционного максимума разность хода для соседних штрихов решетки кратна длине волны света

$$\Delta = m\lambda \quad \Rightarrow \quad \delta\Delta = m\delta\lambda$$

Подставим сюда разность хода от соседних штрихов решетки, при которой амплитуда света падает от главного максимума до нуля: $\delta\Delta = \frac{\lambda}{N}$, и

получим $\frac{\lambda}{N} = m\delta\lambda$. Откуда

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN}.$$

Этому изменению $\delta\lambda$ длины волны λ соответствует такое изменение направления дифракции, которое для одной длины волны соответствует изменению интенсивности дифрагированной волны от главного дифракционного максимума до ближайшего нуля. По критерию Рэлея это изменение длины волны равно спектральному разрешению решетки.

В результате получаем, что относительное спектральное разрешение дифракционной решетки

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN},$$

где m — порядок дифракции, N — общее число штрихов решетки.

Факультативно. Аппаратная функция дифракционной решетки.

Аппаратная функция — это отклик прибора в ситуации, когда идеальный прибор должен откликнуться бесконечно узким пиком. Пусть у нас есть некоторый измерительный прибор, результатом измерения которого является некоторая функция. Пусть у нас есть некоторый идеальный сигнал на входе прибора, на который идеально работающий прибор должен выдать функцию в виде идеально узкого пика, пропорционального дельта-функции Дирака. Реальный, а не идеальный, прибор выдает на выходе некоторый узкий контур вместо бесконечно узкого пика. Этот узкий контур и называют аппаратной функцией прибора.

Найдем аналитическое выражение зависимости интенсивности света от угла дифракции на решетке в случае, когда спектр света на входе решетки имеет вид дельта-функции Дирака — монохроматический свет. Это и будет аппаратная функция дифракционной решетки.

Пусть амплитуда света в точке наблюдения от нижнего штриха решетки равна $\tilde{E}_1$. От следующего штриха решетки свет придет в точку наблюдения с таким же модулем амплитуды, но с другой фазой. Фазовый сдвиг $\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$ определяется разностью хода $\Delta = d \cdot (\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2))$, где d — шаг решетки, α_1 — угол падения света на решетку, α_2 — угол дифракции:

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = k\Delta = kd \cdot (\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)).$$

Амплитуда света в точке наблюдения от второго штриха решетки равна $\tilde{E}_1 e^{i\delta\varphi}$, от третьего — $\tilde{E}_1 e^{2i\delta\varphi}$, от четвертого — $\tilde{E}_1 e^{3i\delta\varphi}$, от N -го штриха — $\tilde{E}_1 e^{(N-1)i\delta\varphi}$. Амплитуда света от всей решетки:

$$\tilde{E} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_1 e^{i\delta\varphi} + \tilde{E}_1 e^{2i\delta\varphi} + \tilde{E}_1 e^{3i\delta\varphi} + \dots + \tilde{E}_1 e^{(N-1)i\delta\varphi}$$

где N — число штрихов решетки.

Складывая, как отрезок геометрической прогрессии, получаем:

$$\tilde{E} = \tilde{E}_1 \frac{1 - e^{Ni\delta\varphi}}{1 - e^{i\delta\varphi}}.$$

Интенсивность света пропорциональна квадрату модуля амплитуды:

$$I = I_1 \left| \frac{1 - e^{Ni\delta\varphi}}{1 - e^{i\delta\varphi}} \right|^2 = I_1 \frac{(1 - \cos(N\delta\varphi))^2 + (\sin(N\delta\varphi))^2}{(1 - \cos(\delta\varphi))^2 + (\sin(\delta\varphi))^2} = I_1 \frac{\sin^2\left(N\frac{\delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right)},$$

здесь I — интенсивность света при дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке в зависимости от угла дифракции α_2 ,

$I_1 = I_0 \left(\frac{\sin(U)}{U} \right)^2$ — величина интенсивности света при дифракции

Фраунгофера на одной щели шириной a (при дифракции на одном штрихе решетки).