

Лекционные демонстрации 13 минут.

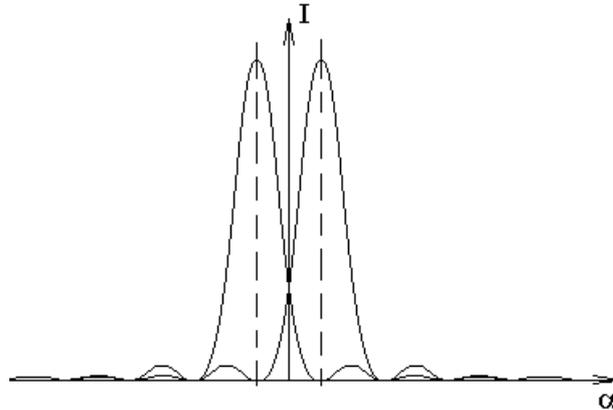
Дифракционный предел разрешения.

Экзамен. Дифракционный предел разрешения телескопа и глаза.

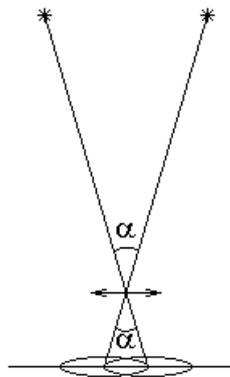
Будем считать, что телескоп — это одна линза (объектив) и экран в фокальной плоскости линзы. Будем считать, что прямо перед линзой объектива находится круглое отверстие в непрозрачном экране и диаметр отверстия равен диаметру линзы.

Свет далекой звезды приходит в виде почти плоской волны. В таком случае, в фокальной плоскости объектива наблюдается дифракция Фраунгофера на круглом отверстии. Угловой радиус первого темного кольца дифракционного изображения $\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$.

Рассмотрим теперь две близкие звезды. По критерию Рэля звезды почти разрешены, если максимум интенсивности дифракционного изображения одной звезды совпадает с первым нулем интенсивности изображения другой звезды.



Рассмотрим луч, выходящий из центра звезды и проходящий через центр объектива. Этот луч приходит в центр диска Эйри дифракционного изображения звезды на экране. Рассмотрим такой луч для каждой из двух звезд.



Из рисунка видно, что угол между направлениями на две звезды равен углу из центра объектива в центры двух изображений звезд. А на пределе разрешения по критерию Рэля он же будет равен угловому радиусу первого темного кольца дифракционного изображения одной звезды.

В результате угловое разрешение телескопа или угол между направлениями на две звезды, при котором они едва разрешимы, равен угловому радиусу первого темного кольца дифракции Фраунгофера на круглом отверстии:

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \text{ где } D \text{ — диаметр объектива телескопа.}$$

Чтобы увеличить угловое разрешение телескопа (уменьшить α), нужно увеличивать диаметр линзы объектива телескопа D (для зеркального телескопа — диаметр зеркала объектива телескопа). Если диаметр объектива телескопа больше одного метра, то смещение изображения звезды из-за шумов атмосферы становятся сравнимы с дифракционным размером изображения звезды. В таком случае дальнейшее увеличение диаметра телескопа становится малоэффективным.

Света от далекой звезды мало, поэтому никто не пытается рассматривать изображение звезды в телескопе в монохроматическом свете. В белом свете угловое разрешение усредняется по длинам волн и будет примерно таким же.

Аналогично телескопу угловое разрешение глаза равно

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D},$$

где D — диаметр зрачка глаза.

Угловое разрешение здорового глаза близко к дифракционному пределу разрешения.

Факультативная вставка.

Рассмотрим еще одно объяснение того, что изображение удаленного точечного источника не является точечным, а имеет некоторый дифракционный размер.

Поверхность равных фаз перед линзой плоская, а за линзой — сферическая. Центр сферы находится в фокусе линзы. Рассмотрим излучение вторичных источников этой сферической поверхности равных фаз.

В фокусе линзы излучение вторичных источников синфазно, поэтому там большая амплитуда света.

При небольшом смещении точки наблюдения поперек луча от фокуса на расстояние гораздо меньшее длины волны свет вторичных источников приходит в точку наблюдения почти синфазно, и амплитуда света в точке наблюдения тоже будет большой. Поэтому изображение неточечное.

Аналогично из рассмотрения интеграла Кирхгофа можно показать, что свет нельзя собрать на площадку размером меньше $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Понятие о разрешающей способности микроскопа.

Простейший микроскоп — это одна линза (объектив) и экран.

Чтобы получить увеличенное действительное изображение предмета нужно поместить предмет близко к фокальной плоскости линзы, чуть дальше от линзы. Действительное изображение при этом получается на большом расстоянии от линзы, большом по сравнению с фокусным расстоянием линзы.

Рассмотрим изображение точечного предмета. Если изображение точечного источника получается очень далеко, то свет сразу за линзой имеет почти плоский фронт волны. В таком случае свет сразу за линзой такой же, как без линзы при наблюдении дифракции Фраунгофера на круглом отверстии.

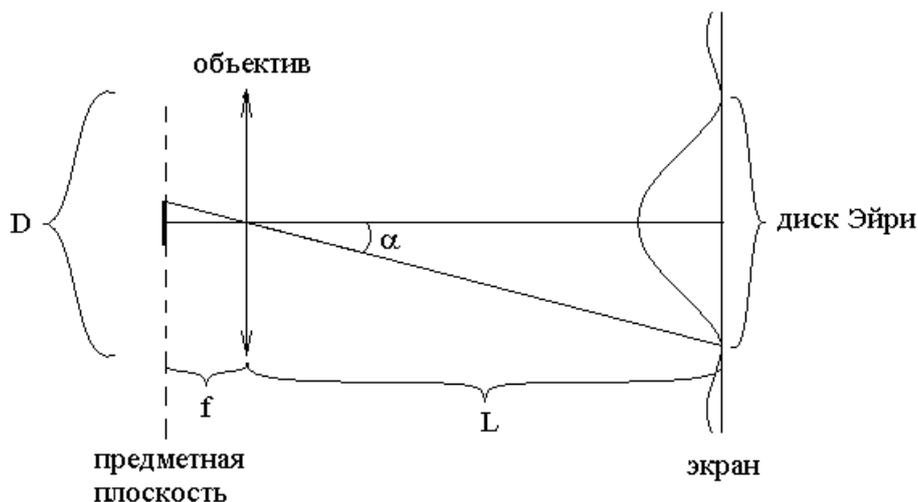
Для дифракции Фраунгофера на круглом отверстии угловой радиус первого темного кольца равен:

$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$, где D — диаметр отверстия (в нашем случае диаметр линзы объектива микроскопа).

Точечный предмет (источник) дает изображение на экране в виде диска с радиусом первого темного кольца $r = L\alpha = L \cdot 1.22 \frac{\lambda}{D}$, где L — расстояние от линзы до экрана.

Этот диск изображения (диск Эйри) можно отобразить обратно в предметную плоскость по законам геометрической оптики.

Рассмотрим другую точку в этом кружке обратного изображения в предметной плоскости. В плоскости увеличенного изображения эта точка дает прямое изображение (еще одного диска Эйри), которое перекрывается с прямым изображением исходной точки, и два изображения неразличимы по критерию Рэля.



Следовательно, разрешающая способность микроскопа l_{\min} равна радиусу кружка обратного изображения точки в предметной плоскости.

$l_{\min} = f\alpha$, где f — фокусное расстояние объектива микроскопа, так как расстояние от предметной плоскости до объектива близко фокусному расстоянию объектива.

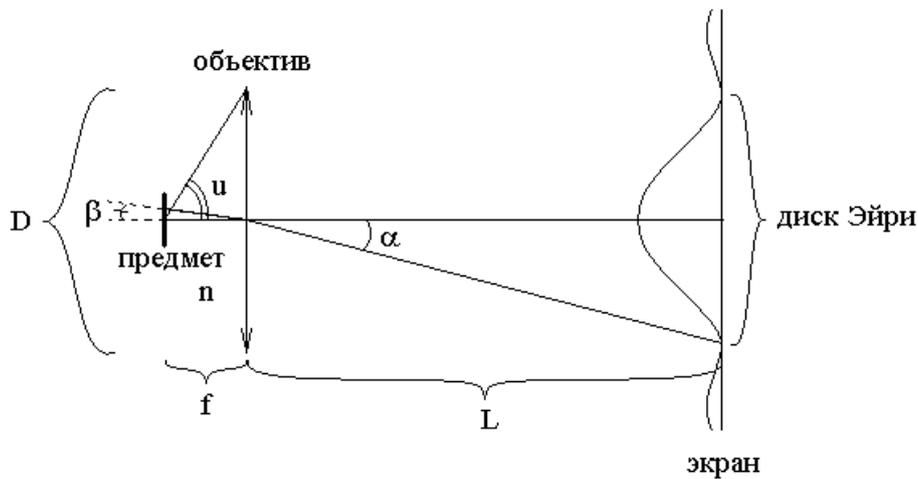
Подставим сюда угловое разрешение объектива $\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ и получим

$l_{\min} = 1.22 \frac{\lambda f}{D}$ — разрешающая способность микроскопа или наименьшее

расстояние между двумя точечными объектами, при котором они еще видны, как два объекта, а не сливаются в одно изображение. Здесь D — диаметр объектива, f — фокусное расстояние объектива.

Сделаем некоторое уточнение.

Часто для увеличения разрешающей способности микроскопа и соответственно для уменьшения величины l_{\min} большую часть пространства между объективом и линзой объектива заполняют прозрачной средой с максимально возможным показателем преломления n .



Здесь f — фокусное расстояние объектива с учетом заполнения пространства между предметом и объективом средой с показателем преломления n , D — диаметр объектива, $\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ — угловой радиус диска Эйри в плоскости изображения дифракционной картины образованной точечным источником света.

По закону преломления $n \cdot \sin(\beta) = \sin(\alpha)$, где β — угловой размер обратного изображения диска Эйри в предметную плоскость по законам геометрической оптики.

В таком случае дифракционный предел разрешения $l_{\min} = \beta f$, где

$$\beta \approx \sin(\beta) = \frac{1}{n} \sin(\alpha) \approx \frac{\alpha}{n} = 1.22 \frac{\lambda}{nD} = 0.61 \frac{\lambda}{n \frac{D}{2}} \Rightarrow$$

$$l_{\min} = \beta f = 0.61 \frac{\lambda}{n \cdot \text{tg}(u)}$$

Здесь $2u$ — апертура микроскопа или угол, под которым из предмета виден входной зрачок (линза объектива).

Для реального микроскопа $2u$ не является малым углом. В таком случае в первой же формуле $\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ (это угловой радиус первого темного кольца дифракции Фраунгофера на круглом отверстии) была допущена некоторая неточность. Формула $\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ справедлива, если во всех точках отверстия амплитуда светового поля одинаковая. В нашем же случае амплитуда поля на краю отверстия меньше, чем в центре отверстия, так как край отверстия находится дальше от рассматриваемого предмета в $\frac{1}{\cos(u)}$ раз. В каком-то смысле можно считать, что свет дифрагирует не на всем отверстии радиусом $\frac{D}{2}$, а только на его части примерно радиусом $\frac{D}{2} \cos(u)$. Тогда вместо полученного ранее выражения $\beta \approx 0.61 \cdot \frac{\lambda}{n \frac{D}{2}}$ получаем $\beta \approx 0.61 \cdot \frac{\lambda}{n \frac{D}{2} \cos(u)}$.

Соответственно, вместо $l_{\min} \approx 0.61 \frac{\lambda}{n \cdot \text{tg}(u)}$ получаем

$$l_{\min} \approx 0.61 \frac{\lambda}{n \cdot \text{tg}(u) \cdot \cos(u)} \approx 0.61 \frac{\lambda}{n \cdot \sin(u)}.$$

Более строгая теория разрешающей способности микроскопа (теория Аббе) дает для разрешающей способности микроскопа именно такой результат:

$$l_{\min} = 0.61 \frac{\lambda}{n \cdot \sin(u)},$$

где величина $n \cdot \sin(u)$ называется числовой апертурой микроскопа.

Взаимодействие света с веществом.

Экзамен. Модель атома Томсона. Комплексная поляризуемость атомов.

Когда Томсон придумывал свою модель атома, еще не было известно, что в атоме есть положительное ядро. Томсон представлял себе атом, как положительную каплю объемного заряда, в которой плавают точечные электроны.

Сегодня логичнее считать наоборот. Точечное положительное ядро плавает в центре объемного заряда электронов. Под действием внешнего электрического поля, например, поля световой волны, электронное облако слегка смещается относительно ядра, а ядро почти неподвижно, так как почти вся масса атома сосредоточена в его ядре.

В соответствии с этой моделью атома будем считать, что электронное облако образует шар с постоянной плотностью заряда $(-\rho)$, где $\rho > 0$. Под действием внешнего электрического поля \vec{E} световой волны смещается только электронное облако — электронная оболочка атома. Будем считать, что

электронная оболочка смещается без деформации, а со стороны ядра на электронную оболочку действует возвращающая сила.

Составим дифференциальное уравнение для движения центра масс электронной оболочки.

Пусть \vec{F}_1 — сила, действующая на электронную оболочку со стороны светового поля \vec{E} .

$\vec{F}_1 = (-q) \cdot \vec{E}$, где q — заряд атомного ядра, а $(-q)$ — заряд электронной оболочки.

Пусть \vec{F}_2 — возвращающая сила, действующая на электронную оболочку со стороны атомного ядра, когда центр электронной оболочки сместился относительно атомного ядра. Гораздо проще найти равную ей силу, с которой электронная оболочка действует на ядро. Для этого надо найти электрическое поле однородно заряженного шара с плотностью заряда $(-\rho)$ и умножить поле на заряд ядра q .

Электрическое поле шара можно найти по теореме Гаусса

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad ES = \frac{(-\rho)V}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{(-\rho)4\pi r^3}{3\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}.$$

В системе СГС Гаусса $\Phi_E = 4\pi Q$ и $\vec{E} = -\frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}$.

Силу, действующую на электронную оболочку со стороны ядра, мы обозначили, как \vec{F}_2 . Тогда сила, действующая на ядро со стороны электронной оболочки, отличается знаком:

$$-\vec{F}_2 = q\vec{E} = q \cdot \left(-\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\rho q}{3\varepsilon_0} \vec{r}.$$

В системе СГС Гаусса $\vec{F}_2 = \frac{4}{3}\pi\rho q\vec{r}$.

Здесь \vec{r} — вектор, проведенный из центра электронной оболочки в атомное ядро. Заменим $\vec{r} \rightarrow (-\vec{r})$, тогда

$$\vec{F}_2 = -\frac{\rho q}{3\varepsilon_0} \vec{r} \text{ — сила, действующая на электронную оболочку со стороны}$$

ядра, \vec{r} — вектор, проведенный из ядра в центр масс электронного облака.

Второй закон Ньютона для электронной оболочки атома примет следующий вид:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\ddot{\vec{r}},$$

где $\ddot{\vec{r}}$ — вторая производная от радиус-вектора центра масс электронной оболочки по времени или ускорение электронной оболочки.

Подставим значения \vec{F}_1, \vec{F}_2 и получим

$$-q\vec{E} - \frac{\rho q}{3\varepsilon_0}\vec{r} = m\ddot{\vec{r}}$$

В системе СГС Гаусса $-q\vec{E} - \frac{4}{3}\pi\rho q\vec{r} = m\ddot{\vec{r}}$.

Чтобы уравнение движения электронной оболочки правильно описывало экспоненциально затухающий световой пучок, которому соответствует экспериментально наблюдаемая лоренцевская форма спектральной линии, добавим в уравнение движения вязкое трение в виде силы \vec{F}_3 пропорциональной скорости $\dot{\vec{r}}$

$$\vec{F}_3 = -2\gamma m\dot{\vec{r}}.$$

Вязкое трение введено вместо потерь энергии электронной оболочки на излучение световых волн. С учетом силы вязкого трения \vec{F}_3 уравнение движения примет следующий вид

$$-q\vec{E} - \frac{\rho q}{3\varepsilon_0}\vec{r} - 2\gamma m\dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} \quad \Rightarrow$$

В системе СГС Гаусса $-q\vec{E} - \frac{4}{3}\pi\rho q\vec{r} - 2\gamma m\dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}$.

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \frac{\rho q}{3\varepsilon_0 m}\vec{r} = -\frac{q}{m}\vec{E}.$$

В системе СГС Гаусса $\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \frac{4\pi\rho q}{3m}\vec{r} = -\frac{q}{m}\vec{E}$.

В этом уравнении движения центра масс электронной оболочки введем обозначение

$$\omega_0^2 \equiv \frac{\rho q}{3\varepsilon_0 m}$$

В системе СГС Гаусса $\omega_0^2 \equiv \frac{4\pi\rho q}{3m}$.

и получим

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{q}{m}\vec{E}.$$

Рассмотрим это уравнение в комплексном виде

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{q}{m}\vec{E}_0\vec{e}_p e^{-i\omega t},$$

где $\vec{E} = \vec{E}_0\vec{e}_p e^{-i\omega t}$ — комплексное световое поле, \vec{e}_p — единичный вектор поляризации светового поля.

Полученное дифференциальное уравнение линейно относительно переменной \vec{r} , и все коэффициенты левой части уравнения вещественны. В таком случае вещественная часть комплексного решения уравнения будет равна вещественному решению уравнения с вещественным световым полем в правой части уравнения:

$$\vec{E} = \text{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\right) = \text{Re}\left(\tilde{E}_0 \vec{e}_p e^{-i\omega t}\right).$$

Будем искать стационарное решение комплексного уравнения с постоянной комплексной амплитудой \tilde{r}_0 в виде $\tilde{\vec{r}}(t) = \tilde{r}_0 \vec{e}_p e^{-i\omega t}$. Подставим это решение в дифференциальное уравнение. Каждое слагаемое уравнения будет иметь сомножитель $\vec{e}_p e^{-i\omega t}$. Сократим на этот сомножитель и получим уравнение для комплексной амплитуды \tilde{r}_0 :

$$-\omega^2 \tilde{r}_0 - 2i\omega\gamma \tilde{r}_0 + \omega_0^2 \tilde{r}_0 = -\frac{q}{m} \tilde{E}_0 \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{r}_0 = -\frac{\frac{q}{m} \tilde{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma} \quad \text{— комплексная амплитуда колебаний электронной}$$

оболочки атома в световом поле с комплексной амплитудой \tilde{E}_0 и частотой ω .

Вещественный радиус-вектор электронной оболочки при этом имеет вид

$$\text{Re}\left(\tilde{\vec{r}}\right) = \text{Re}\left(\tilde{r}_0 \vec{e}_p e^{-i\omega t}\right) = \text{Re}\left(\left(\frac{\frac{q}{m} \tilde{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}\right) \vec{e}_p e^{-i\omega t}\right).$$

Эти колебания электронной оболочки атома относительно ядра атома означают колебания дипольного момента атома:

$\vec{p}(t) = (-q) \cdot \vec{r}(t)$, где $(-q)$ — заряд электронной оболочки. Такое выражение для дипольного момента получается, если воспользоваться определением $\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$ и поместить начало координат в ядро атома. В таком

случае радиус-вектор ядра равен нулю, и в сумме остается одно слагаемое для всей электронной оболочки, как целого.

Комплексная амплитуда колебаний дипольного момента примет следующий вид

$$\tilde{p}_0 = (-q) \cdot \tilde{r}_0 = \frac{\frac{q^2}{m} \tilde{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}.$$

Комплексный дипольный момент $\tilde{\vec{p}}$ связан с комплексной напряженностью светового поля $\tilde{\vec{E}}$ через комплексную поляризуемость атома $\tilde{\alpha}$:

$$\tilde{\vec{p}} = \tilde{\alpha} \tilde{\vec{E}}.$$

Подставим выражения из первого и второго уравнения системы

$$\begin{cases} \tilde{p} = \tilde{p}_0 \cdot \vec{e}_p \cdot e^{-i\omega t} \\ \tilde{E} = \tilde{E}_0 \cdot \vec{e}_p \cdot e^{-i\omega t} \\ \tilde{p} = \tilde{\alpha} \tilde{E} \end{cases}$$

в третье уравнение и получим связь комплексной амплитуды дипольного момента и комплексной амплитуды светового поля

$$\tilde{p}_0 = \tilde{\alpha} \tilde{E}_0 \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{E}_0} = \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma)} \quad \text{— комплексная поляризуемость атома Томсона,}$$

как функция частоты светового поля ω , где q — заряд ядра атома, m — масса электронной оболочки атома.

Пусть f — число электронов атома, тогда

$$\begin{cases} q = fe \\ m = fm_e \end{cases}, \quad \text{где } e \text{ — модуль заряда электрона, } m_e \text{ — масса электрона,}$$

тогда

$$\tilde{\alpha} = \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}, \quad \text{где } \omega_0 \text{ — резонансная частота колебаний}$$

электронной оболочки атома.

В системе СГС Гаусса формула выглядит также.

По квантовым причинам электронная оболочка атома имеет не одну, а много резонансных частот ω_k .

С некоторой натяжкой можно сказать, что в разных резонансных колебаниях ω_k участвует разное, не обязательно целое, число электронов f_k .

Тогда

$$\tilde{\alpha} = \sum_k \frac{f_k \frac{e^2}{m_e}}{\omega_k^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma_k}.$$

Безразмерную величину f_k называют силой осциллятора.

Формально сумма всех сил осцилляторов $\sum_k f_k$ — это сумма всех

электронов, участвующих в колебаниях электронной оболочки, то есть порядковый номер элемента в таблице Менделеева. Однако обычно возбуждение электронов внутренних оболочек не рассматривается. Частоты их возбуждения относятся к рентгеновскому диапазону.

Если рассматривать возбуждение только внешнего электрона атома и комплексную поляризуемость $\tilde{\alpha}$, как сумму вкладов только по

соответствующим частотам возбуждения внешнего электрона, то правило сумм примет следующий вид $\sum_k f_k = 1$.

Факультативная вставка.

В квантовой механике сила осциллятора выражается через волновую функцию электронов атома. Доказано, что сила осциллятора f связана с коэффициентом Эйнштейна A , который описывает вероятность спонтанных переходов, соотношением

$$A = \frac{2\pi e^2 v^2}{\epsilon_0 m_e c^3} f.$$

В системе СГС Гаусса $A = \frac{8\pi^2 e^2 v^2}{m_e c^3} f$.

В квантовой механике состояния бывают вырожденными. Это означает, что несколько состояний, которые описываются разными волновыми функциями, имеют одинаковую энергию. Так состояние атома с полным моментом импульса J (квантовое число суммарного орбитального и спинового моментов импульса) имеет кратность вырождения $g = 2J + 1$ состояний с разными значениями проекции $J_z = -J, -J + 1, -J + 2, \dots, J - 1, J$ полного момента импульса на произвольно выбранную ось квантования z .

С учетом вырождения уровней

$$A_{ki} = \frac{g_i}{g_k} \frac{2\pi e^2 v_{ki}^2}{\epsilon_0 m_e c^3} f_{ik},$$

В системе СГС Гаусса $A_{ki} = \frac{8\pi^2 e^2 v_{ki}^2}{m_e c^3} f_{ik}$.

где k — верхний уровень энергии с кратностью вырождения g_k , i — нижний уровень энергии с кратностью вырождения g_i , v_{ki} — частота перехода, f_{ik} — сила осциллятора линии поглощения с уровня i на уровень k , m_e — масса электрона.

Сила осциллятора f_{ki} для излучения считается отрицательной величиной, такой что $g_i f_{ik} = -g_k f_{ki}$.

Правило сумм для сил осцилляторов $\sum_k f_{ik} = 1$.

В квантовой механике доказывається, что ширина спектральной линии без учета атомарных и молекулярных столкновений

$$\Delta\omega_{ki} = A_k + A_i,$$

где $A_k = \sum_{j < k} A_{kj}$ и $A_i = \sum_{j < i} A_{ij}$.

В нашем рассмотрении далее будет показано, что $\Delta\omega = 2\gamma$, то есть $2\gamma = A_k + A_i$.

Подробнее можно посмотреть, например, здесь:

<https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/155323/3/19%20Вероятности%20квантовых%20переходов.pdf>

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Комплексный показатель преломления. Его связь с коэффициентом поглощения и вещественным показателем преломления. Закон Бугера — Ламберта — Бера.

В начале курса мы рассматривали распространение света в прозрачной изотропной среде. Среда, поглощающая свет, отличается от прозрачной среды тем, что поляризация поглощающей среды осциллирует на оптической частоте со сдвигом фазы относительно светового поля проходящей волны. При этом для светового поля в поглощающей свет среде получается то же самое волновое уравнение только с комплексным коэффициентом.

Факультативная вставка.

Обсудим это подробнее.

Комплексная поляризуемость атома $\tilde{\alpha}$ означает, что осциллирующее световое поле \vec{E} наводит в атоме дипольный момент \vec{p} , осциллирующий на той же частоте, что и световое поле, но со сдвигом фазы. В таком случае вводят комплексный коэффициент пропорциональности $\tilde{\alpha}$, такой что $\vec{p} = \tilde{\alpha} \vec{E}$. Осциллирующие дипольные моменты атомов создают осциллирующую поляризацию среды $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$ — объемную плотность дипольного момента.

Поляризация осциллирует с тем же сдвигом фазы относительно светового поля \vec{E} , что и каждый дипольный момент \vec{p} . С поляризацией среды связан вектор электрической индукции $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

В системе СГС Гаусса $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$.

Если поляризация осциллирует с фазовым сдвигом относительно поля \vec{E} , то и вектор \vec{D} осциллирует со сдвигом фазы, хотя и с другим. Поэтому коэффициент пропорциональности между комплексными векторами \vec{D} и \vec{E} — тоже комплексная величина $\vec{D} = \epsilon_0 \tilde{\epsilon} \vec{E}$, здесь $\tilde{\epsilon}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость. Как и для постоянного электрического поля, нелинейная зависимость $\tilde{\epsilon} - 1$ от $\tilde{\alpha}$ определяется тем, что поле, действующее на атом, отличается от среднего поля в среде.

С учетом этого эффекта получается формула Клаузиуса — Моссотти

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}.$$

В системе СГС Гаусса $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4}{3} \pi N\alpha$.

Для электрического поля на частоте ω аналогичные рассуждения приводят к тому же соотношению между комплексной диэлектрической проницаемостью $\tilde{\epsilon}$ и комплексной поляризуемостью атома $\tilde{\alpha}$.

$$\frac{\tilde{\epsilon} - 1}{\tilde{\epsilon} + 2} = \frac{N\tilde{\alpha}}{3\epsilon_0}$$

Таким образом, формула Клаузиуса — Моссотти позволяет найти комплексную диэлектрическую проницаемость среды $\tilde{\epsilon}$ через комплексную поляризуемость атома Томсона

$$\tilde{\alpha} = \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}.$$

Введем в рассмотрение еще две комплексные величины: комплексное волновое число \tilde{k} и комплексный показатель преломления \tilde{n} .

Рассматривая световое поле в прозрачной среде, мы из уравнений Максвелла вывели волновое уравнение для электрического поля \vec{E} . Совершенно аналогично выводится волновое уравнение для случая поглощающей среды. Берем ротор от одного из уравнений системы Максвелла

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

и с учетом другого уравнения системы уравнений Максвелла $\frac{1}{\mu_0 \tilde{\mu}} \cdot \text{rot}(\vec{B}) = \frac{\partial \tilde{D}}{\partial t}$

получается волновое уравнение для поля \vec{E} :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\tilde{\epsilon} \tilde{\mu}}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ где } \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0.$$

Только теперь в этом уравнении поле \vec{E} и диэлектрическая проницаемость $\tilde{\epsilon}$ — комплексные величины.

Для прозрачной среды $\frac{\epsilon \mu}{c^2} = \frac{1}{V^2} = \frac{n^2}{c^2}$, где $V = \frac{c}{n}$ — фазовая скорость света

в среде, $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ — показатель преломления среды. Аналогично для среды поглощающей свет введем комплексный показатель преломления $\tilde{n} \equiv \sqrt{\tilde{\epsilon} \tilde{\mu}}$. Тогда

$$\Delta \vec{E} - \frac{\tilde{n}^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Прямой подстановкой в это уравнение можно убедиться, что оно имеет решение в виде монохроматических волн (как вскоре окажется — плоских монохроматических волн)

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{i\left(\tilde{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)},$$

при условии $\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_z^2 = \tilde{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2}$.

Назовем величину $\tilde{k} \equiv \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \sqrt{\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_z^2}$ комплексным волновым числом. Любопытно, что комплексное волновое число не является длиной

комплексного волнового вектора \tilde{k} , так как длина любого комплексного вектора — вещественное число $|\tilde{k}| = \sqrt{\tilde{k}_x \tilde{k}_x^* + \tilde{k}_y \tilde{k}_y^* + \tilde{k}_z \tilde{k}_z^*}$.

$$\text{В оптике } \tilde{\mu} \approx 1. \text{ Тогда } \tilde{n} \equiv \sqrt{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\varepsilon} = \tilde{n}^2$$

для комплексных $\tilde{\varepsilon}$ и \tilde{n} .

Конец факультативной вставки.

Будем вещественные части комплексных чисел обозначать одним штрихом, а мнимые — двумя штрихами:

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon'' \\ \tilde{k} = k' + ik'' \\ \tilde{n} = n' + in'' \\ \tilde{\alpha} = \alpha' + i\alpha'' \end{cases}.$$

Рассмотрим световую волну, распространяющуюся вдоль оси z . Тогда от

x и y координат выражение для волны $\tilde{E}(t, \vec{r}) = \tilde{E}_0 \cdot e^{i\left(\tilde{k}, \vec{r}\right) - \omega t}$ не зависит, так как

$\left(\tilde{k}, \vec{r}\right) = \tilde{k}_x x + \tilde{k}_y y + \tilde{k}_z z = \tilde{k}_z z = \tilde{k}z$, где \tilde{k} — комплексное волновое число, $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = 0$ и $\tilde{k}_z = \tilde{k}$.

Подставим это в рассматриваемое решение волнового уравнения и получим

$$\tilde{E}(t, \vec{r}) = \tilde{E}_0 e^{i\left(\tilde{k}, \vec{r}\right) - \omega t} = \tilde{E}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)} = \tilde{E}_0 e^{i((k' + ik'')z - \omega t)} = \tilde{E}_0 e^{-k''z} e^{i(k'z - \omega t)}.$$

Здесь $\tilde{E}_0 e^{-k''z} = \tilde{E}_0(z)$ — амплитуда, зависящая от z координаты.

Интенсивность света пропорциональна квадрату модуля комплексной амплитуды $I(z) \sim |E_0(z)|^2 = E_0^2 \cdot e^{-2k''z}$.

Сравним это выражение с установленным на опыте законом Бугера (он же закон Бугера — Ламберта — Бера):

$$I(z) = I(0) \cdot e^{-\varkappa z},$$

который одновременно является определением коэффициента поглощения \varkappa (греческая рукописная буква каппа).

Сравнивая два выражения для $I(z)$ получим, что

$$\varkappa = 2k'',$$

коэффициент поглощения равен удвоенной мнимой части комплексного волнового числа.

Подставим сюда выражение для комплексного волнового числа \tilde{k} через комплексный показатель преломления \tilde{n}

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \frac{\omega}{c} n' + i \frac{\omega}{c} n'' = k' + ik'' \quad \Rightarrow \quad k'' = \frac{\omega}{c} n''$$

и получим $\alpha = 2 \frac{\omega}{c} n''$ — связь коэффициента поглощения α и мнимой части комплексного показателя преломления \tilde{n} .