

**Экзамен. Комплексный показатель преломления. Его связь с коэффициентом поглощения и вещественным показателем преломления.**  
**Закон Бугера — Ламберта — Бера (продолжение).**

Вернемся к анализу выражения  $\tilde{E}(t, \vec{r}) = \tilde{E}_0 e^{-k''z} e^{i(k'z - \omega t)}$ .

Здесь в показателе экспоненты с мнимым показателем величина  $k'z - \omega t$  является фазой затухающей световой волны.

Найдем фазовую скорость этой волны или скорость движения поверхности равных фаз.

$k'z - \omega t = \text{const}$  — уравнение поверхности равных фаз. Здесь с учетом  $\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \tilde{n}$  можно заменить  $k' = \frac{\omega}{c} n'$  и получить уравнение поверхности равных фаз в виде  $\frac{\omega}{c} n' z - \omega t = \text{const}$ .

Считая, что  $z$  — это функция от  $t$ , возьмем производную по времени от уравнения поверхности равных фаз и получим

$$\frac{\omega}{c} n' \frac{dz}{dt} - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad V_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{c}{n'} \quad \Rightarrow$$

$V_\phi = \frac{c}{n'}$  — фазовая скорость затухающей в среде волны.

Следовательно, вещественная часть комплексного показателя преломления среды, которая поглощает свет, играет роль обычного показателя преломления прозрачной среды.

**Экзамен. Лоренцевская форма линии поглощения в модели атома Томсона. Нормальная и аномальная дисперсия света.**

Упростим выражение для комплексной поляризуемости атома Томсона

$$\tilde{\alpha} = \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}$$

на случай, когда частота света  $\omega$  близка к резонансной частоте атома  $\omega_0$ .

Введем обозначение  $\Omega \equiv \omega - \omega_0$  для расстройки частоты света относительно резонансной частоты атома.

Тогда  $|\Omega| \ll \omega_0$ .

Из равенства  $\Omega = \omega - \omega_0$  получим

$$\omega = \omega_0 + \Omega \quad \Rightarrow$$

$$\omega^2 = (\omega_0 + \Omega)^2 \approx \omega_0^2 + 2\omega_0\Omega \quad \Rightarrow$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 \approx -2\omega_0\Omega.$$

Тогда из равенства  $\tilde{\alpha} = \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}$  получаем

$$\tilde{\alpha} = \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{-2\omega_0\Omega - 2i\omega\gamma}.$$

С учетом того, что  $\omega \approx \omega_0$ ,  $\gamma \ll \omega_0$ ,  $\Omega \ll \omega_0$ , а величины  $\gamma$  и  $\Omega$  одного порядка, заменим в знаменателе  $\omega$  на  $\omega_0$  и получим

$$\tilde{\alpha} \approx \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{-2\omega_0\Omega - 2i\omega_0\gamma} = -\frac{f \frac{e^2}{m_e}}{2\omega_0} \cdot \frac{1}{\Omega + i\gamma} = -\frac{fe^2}{2m_e\omega_0} \cdot \frac{\Omega - i\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2}$$

— это выражение для комплексной поляризуемости атома Томсона на частотах  $\omega$  близких к резонансной частоте  $\omega_0$ .

Теперь получим выражение для комплексного показателя преломления  $\tilde{n}$  в относительно простом случае низкой концентрации атомов (в газе) и вблизи резонансной частоты атома Томсона.

Для начала подставим в формулу Клаузиуса — Москотти  $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}$

вместо  $\varepsilon$  величину  $\tilde{n}^2$  и получим формулу Лоренц — Лорентца

$$\frac{\tilde{n}^2 - 1}{\tilde{n}^2 + 2} = \frac{N\tilde{\alpha}}{3\varepsilon_0},$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \frac{\tilde{n}^2 - 1}{\tilde{n}^2 + 2} = \frac{4}{3}\pi N\tilde{\alpha}.$$

которая связывает комплексный показатель преломления  $\tilde{n}$  и комплексную поляризуемость атома  $\tilde{\alpha}$  для любой концентрации атомов  $N$ , а не только для низкой концентрации, как в газах.

Заметим, что вдали от резонансной частоты атома показатель преломления и поляризуемость атома становятся вещественными величинами, и уравнение Лоренц — Лорентца оказывается справедливым для вещественных  $n$  и  $\alpha$  в частотной области прозрачности среды.

Рассмотрим теперь газовую среду с малой плотностью. В этом случае формулу Лоренц — Лорентца можно упростить.

При стремлении концентрации молекул к нулю  $N \rightarrow 0$  показатель преломления стремится к единице  $\tilde{n} \rightarrow 1$ , так как нулевая концентрация соответствует вакууму, и в вакууме показатель преломления равен единице.

Из формулы Лоренц — Лорентца  $\frac{\tilde{n}^2 - 1}{\tilde{n}^2 + 2} = \frac{N\tilde{\alpha}}{3\varepsilon_0}$  получим

$$\frac{(\tilde{n} - 1)(\tilde{n} + 1)}{\tilde{n}^2 + 2} = \frac{N\tilde{\alpha}}{3\varepsilon_0}, \text{ где при } \tilde{n} \rightarrow 1 \text{ получим } \begin{cases} \tilde{n}^2 + 2 \approx 3 \\ \tilde{n} + 1 \approx 2 \end{cases} \text{ и}$$

$$\frac{(\tilde{n}-1)2}{3} = \frac{N\tilde{\alpha}}{3\varepsilon_0} \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{n} \approx 1 + \frac{N\tilde{\alpha}}{2\varepsilon_0}.$$

В системе СГС Гаусса  $\tilde{n} \approx 1 + 2\pi N\tilde{\alpha}$ .

Подставим сюда выражение комплексной поляризуемости атома Томсона вблизи резонансной частоты атома

$$\tilde{\alpha} \approx -\frac{fe^2}{2m_e\omega_0} \cdot \frac{\Omega - i\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2}$$

и получим

$$\tilde{n} = 1 - \frac{N f e^2}{4\varepsilon_0 m_e \omega_0} \cdot \frac{\Omega - i\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2}.$$

В системе СГС Гаусса  $\tilde{n} = 1 - \pi N f \frac{e^2}{m_e \omega_0} \cdot \frac{\Omega - i\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2}$ .

Сравнивая это выражение с  $\tilde{n} = n' + in''$ , получим выражение для вещественной  $n'$  и мнимой  $n''$  части комплексного показателя преломления  $\tilde{n}$

$$\begin{cases} n' = 1 - \frac{N f e^2}{4\varepsilon_0 m_e \omega_0} \cdot \frac{\Omega}{\Omega^2 + \gamma^2} \\ n'' = \frac{N f e^2}{4\varepsilon_0 m_e \omega_0} \cdot \frac{\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2} \end{cases}.$$

В системе СГС Гаусса  $\begin{cases} n' = 1 - \pi N f \frac{e^2}{m_e \omega_0} \cdot \frac{\Omega}{\Omega^2 + \gamma^2} \\ n'' = \pi N f \frac{e^2}{m_e \omega_0} \cdot \frac{\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2} \end{cases}$ .

С учетом связи коэффициента поглощения с мнимой частью показателя преломления  $\kappa = 2\frac{\omega}{c}n'' = \frac{N f e^2}{2\varepsilon_0 m_e c} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2} \approx \frac{N f e^2}{2\varepsilon_0 m_e c} \cdot \frac{\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2}$ , так как  $\omega \approx \omega_0$ . Тогда для разреженной среды в частотной окрестности линии поглощения с частотой  $\omega_0$  получаем:

$$\begin{cases} \kappa = \frac{N f e^2}{2\varepsilon_0 m_e c} \cdot \frac{\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2} \\ n' - 1 = \frac{-N f e^2}{4\varepsilon_0 m_e \omega_0} \cdot \frac{\Omega}{\Omega^2 + \gamma^2} \end{cases}.$$

К экзамену нужно помнить, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{K} \sim \frac{1}{1 + \left( \frac{\Omega}{\gamma} \right)^2} \\ n' - 1 \sim - \frac{\frac{\Omega}{\gamma}}{1 + \left( \frac{\Omega}{\gamma} \right)^2} \end{array} \right. .$$

$$\text{В системе СГС Гаусса} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{K} = 2\pi N f \frac{e^2}{m_e c} \cdot \frac{\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2} \\ n' - 1 = -\pi N f \frac{e^2}{m_e \omega_0} \cdot \frac{\Omega}{\Omega^2 + \gamma^2} \end{array} \right. .$$

#### Факультативная вставка.

Если теперь вспомнить, что в реальном атоме оказывается много резонансных частот, то коэффициент поглощения и показатель преломления будут иметь выражение в виде суммы по резонансным частотам:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{K} = \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e c} \sum_k f_k \frac{\gamma_k}{\Omega_k^2 + \gamma_k^2} \\ n' - 1 = - \frac{Ne^2}{4\varepsilon_0 m_e} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k} \cdot \frac{\Omega_k}{\Omega_k^2 + \gamma_k^2} \end{array} \right. .$$

Здесь  $N$  — концентрация атомов,  $f_k$  — оптическая сила осциллятора на резонансной частоте  $\omega_k$ ,  $e$  — модуль заряда электрона,  $m_e$  — масса электрона,  $\gamma_k$  — коэффициент пропорциональности в выражении силы вязкого трения для описания потерь на излучение,  $\Omega_k = \omega - \omega_k$  — расстройка частоты светового поля  $\omega$  относительно частоты поглощающего свет перехода  $\omega_k$ .

Эти формулы оказываются справедливы и при рассмотрении взаимодействия света с веществом в рамках квантовой механики.

Проанализируем вклад в коэффициент поглощения от одного поглощающего перехода. Коэффициент поглощения можно переписать в виде:

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{K}_0}{1 + \left( \frac{\Omega}{\gamma} \right)^2}, \text{ где } \mathfrak{K}_0 = \frac{e^2 f N}{2\varepsilon_0 m_e c \gamma} .$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \mathfrak{K}_0 = 2\pi \frac{e^2 f N}{m_e c \gamma} .$$

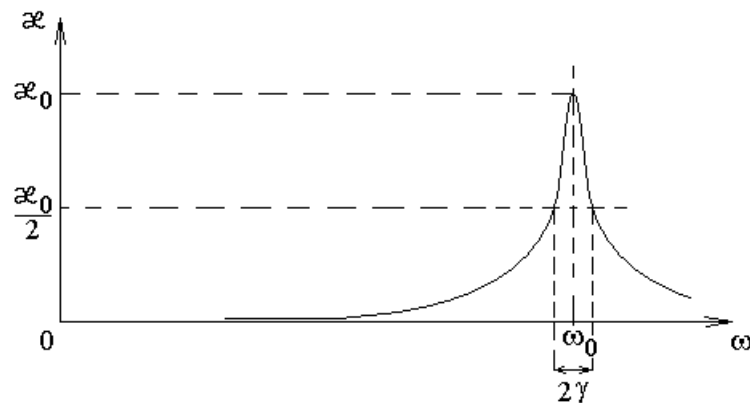
Контур поглощения обычно называют линией поглощения, так как относительная спектральная ширина контура поглощения (как и контура излучения) одиночного атома на длине волны  $\lambda = 1 \text{ мкм}$  и при оптической силе осциллятора  $f = 1$  очень мала  $\frac{2\gamma}{\omega_0} \approx 10^{-8}$ , а в инфракрасном диапазоне — еще

меньше. Для одиночного атома  $\gamma \sim f$  (квантовый эффект). Для молекулы при возбуждении ее колебания относительная спектральная ширина линии поглощения еще на несколько порядков меньше. Если же атом (или молекула) не одиночный, то к величине  $\gamma$  добавляется частота столкновений атома (или молекулы), поэтому с изменением давления газа спектральная ширина линий изменяется на много порядков, а для твердых тел и жидкостей относительная спектральная ширина становится настолько большой, что вместо линии поглощения говорят о спектральной полосе поглощения.

Конец факультативной вставки.

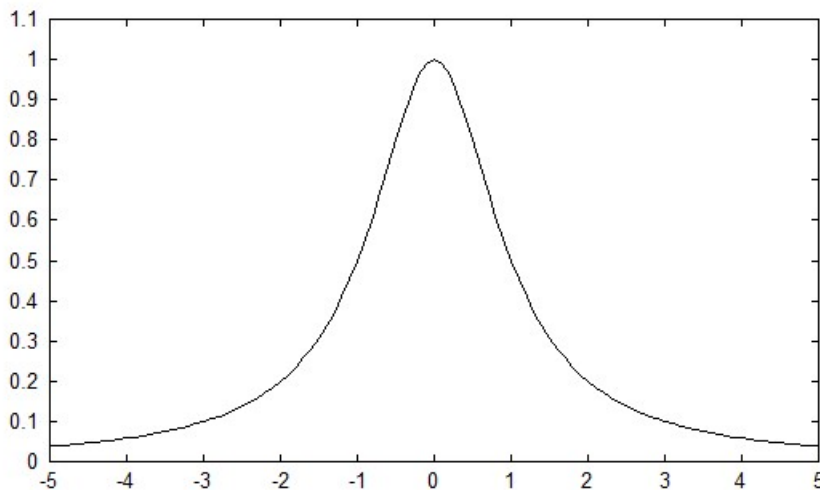
Формуле  $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \left(\frac{\Omega}{\gamma}\right)^2}$  соответствует следующая зависимость

коэффициента поглощения от частоты света



Здесь  $\gamma$  — полуширина на полувысоте контура линии поглощения, раньше мы обозначали эту величину  $\Gamma$ . Оказалось, что  $\gamma = \Gamma$ .

В спектроскопии такой контур рассматривают очень часто. Его называют лоренцевским контуром  $\mathcal{L}(x) \equiv \frac{1}{1+x^2}$ . На следующем рисунке представлен рассчитанный в Matlab график этой функции.



Тогда коэффициент поглощения, как функция частоты света

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\gamma}\right), \text{ где } \Omega = \omega - \omega_0.$$

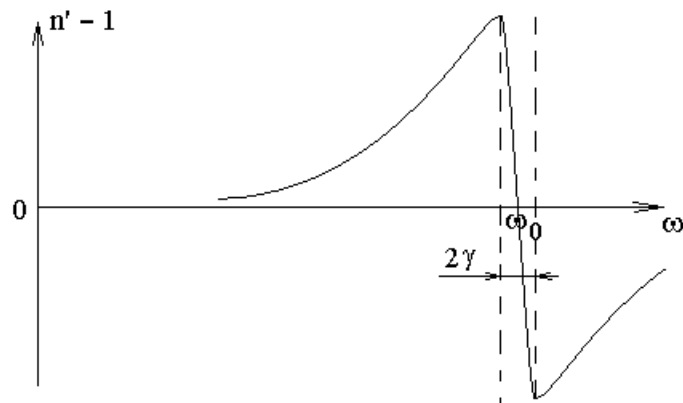
-----

Рассмотрим теперь зависимость вещественного показателя преломления от частоты.

Дисперсия света — зависимость вещественного показателя преломления от частоты света или от длины волны света.

$$n' - 1 = -\frac{N f e^2}{4 \varepsilon_0 m_e \omega_0} \cdot \frac{\Omega}{\Omega^2 + \gamma^2} = -\frac{\mathfrak{K}_0 \lambda_0}{4 \pi} \cdot \frac{\frac{\Omega}{\gamma}}{1 + \left(\frac{\Omega}{\gamma}\right)^2} \sim -\frac{\frac{\Omega}{\gamma}}{1 + \left(\frac{\Omega}{\gamma}\right)^2},$$

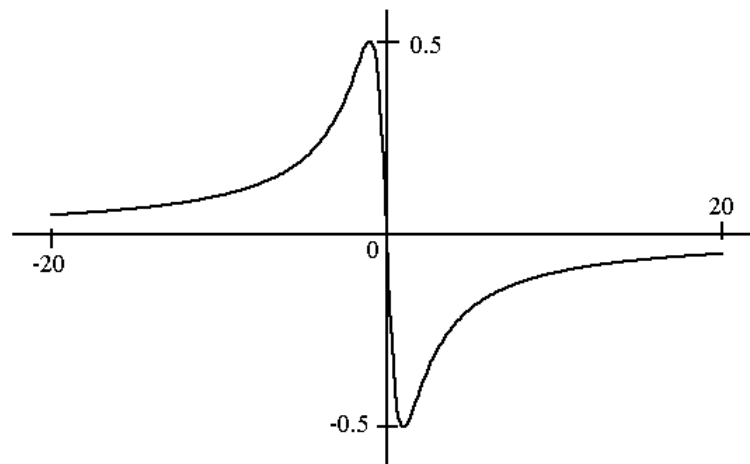
где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме на частоте поглощения  $\omega_0$ ,  $\mathfrak{K}_0$  — амплитуда зависимости коэффициента поглощения от частоты света.



$$n' - 1 = \frac{\mathfrak{K}_0 \lambda_0}{4 \pi} \cdot \mathcal{D}\left(\frac{\Omega}{\gamma}\right) \sim \mathcal{D}\left(\frac{\Omega}{\gamma}\right), \text{ где } \Omega = \omega - \omega_0 \text{ и}$$

$$\mathcal{D}(x) \equiv -\frac{x}{1 + x^2} \quad \text{— дисперсионный контур. На следующем рисунке}$$

представлен рассчитанный в Matlab график этой функции.



Добавка к показателю преломления имеет вид так называемого дисперсионного контура.

Как видно из графика зависимости  $n'-1$  от  $\omega$ , производная почти везде положительна  $\frac{dn'}{d\omega} > 0$ , поэтому условие  $\frac{dn}{d\omega} > 0$  называют нормальной дисперсией света. Только внутри линии поглощения в малой окрестности  $\Delta\omega = 2\gamma$  центра линии поглощения  $\omega_0$  наблюдается так называемая аномальная дисперсия света  $\frac{dn}{d\omega} < 0$ .

Вещество в частотной области прозрачности обладает нормальной дисперсией.

Аномальная дисперсия света наблюдается только внутри линии поглощения.

### **Экзамен. Однородный (лоренцевский) и неоднородный (доплеровский) контур спектральной линии.**

Факультативная вставка.

Спектральный контур линии поглощения  $\mathfrak{K}(\omega)$  пропорционален спектральному контуру линии излучения  $G_\omega = 2\pi \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} |E_0(\omega)|^2$ .

В системе СГС Гаусса  $G_\omega = 2\pi \frac{cn}{8\pi\mu} |E_0(\omega)|^2$ .

Это следует из термодинамических соображений при рассмотрении теплового равновесия излучения и вещества. На каждой частоте, сколько света поглощается столько должно и излучаться. В таком случае будем говорить просто о контуре спектральной линии.

Изолированная молекула (или атом), переходя с возбужденного уровня энергии на нижележащий уровень, излучает световой цуг  $\tilde{\vec{E}} = \vec{E}_0 \cdot e^{-\gamma_0 t} \cdot e^{-i\omega_0 t}$ .

Спектр этого излучения  $G_\omega = G_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0}\right)$ , где  $\mathcal{L}(x) \equiv \frac{1}{1+x^2}$  —

лоренцевский контур,  $2\gamma_0$  — естественная ширина спектральной линии без учета атомарных и молекулярных столкновений.

Если молекул много, то движение молекул изменяет ширину и форму спектральной линии. Есть две основных причины изменения ширины спектральной линии: столкновительное уширение и доплеровское уширение. Оба уширения проще проявляются в газообразной фазе вещества.

Можно доказать, что если столкновения молекул случайным образом обрывают цуг излучения или случайным образом сбивают фазу излучения, то усредненная по молекулам спектральная линия сохраняет лоренцевскую форму, но при этом изменяется ширина спектральной линии. Это так называемое однородное уширение спектральных линий, которое пропорционально частоте

столкновений молекулы, которая в свою очередь пропорциональна давлению газа.

#### Конец факультативной вставки.

Один механизм уширения спектральных линий — столкновения атомов или молекул. Спектральная ширина линии излучения каждого атома равна  $2\gamma$ , где величина  $\gamma = \gamma_0 + \gamma_{cm}$  равна сумме двух слагаемых. Первое слагаемое  $\gamma_0$  — частота (единица, деленная на среднее время жизни) спонтанных переходов с верхнего уровня энергии молекулы на нижний уровень (без столкновений молекул). Второе слагаемое  $\gamma_{cm}$  — частота столкновений молекулы с другими молекулами.

Второй механизм уширения спектральных линий — это эффект Доплера, который приводит к так называемому неоднородному уширению спектральной линии (разный вклад молекул с разными скоростями движения). Рассмотрим это уширение подробнее.

Если излучающая молекула летит навстречу наблюдателю, то принимаемая наблюдателем частота  $\omega$  сдвинута эффектом Доплера. С учетом только продольного эффекта Доплера получим

$$\omega = \omega' + kV_z,$$

здесь  $\omega$  — частота света в системе отсчета наблюдателя или, как говорят, в лабораторной системе отсчета;  $\omega'$  — частота света в системе отсчета излучающей молекулы,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число,  $V_z$  — проекция скорости молекулы на направление излучения света.

Распределение Максвелла по проекции скорости имеет следующий вид:

$$N_{V_z} dV_z = \frac{N}{U\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{V_z}{U}\right)^2} \cdot dV_z,$$

где  $N$  — концентрация молекул;  $N_{V_z} dV_z$  — концентрация молекул, проекция скорости которых лежит в диапазоне от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$ ;  $U = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$  — наиболее вероятная скорость молекул.

Каждая молекула излучает спектральную линию, форма которой имеет лоренцевский вид в ее собственной системе отсчета

$$G_{\omega'} = G_0 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega' - \omega_0}{\gamma}\right)^2}, \text{ где } \omega' = \omega - kV_z.$$

Тогда в лабораторной системе отсчета с учетом доплеровского сдвига частоты можно записать контур линии излучения молекулы с проекцией скорости  $V_z$  на направление наблюдения:



$$G_{\omega} = G_0 \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma} \right)^2}.$$

Складывая эти спектральные контуры с весовыми множителями, пропорциональными концентрации молекул в интервале скоростей от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$ , получим суммарный контур линии излучения газа

$$G_{\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_0}{1 + \left( \frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma} \right)^2} \cdot \frac{N}{U\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{V_z}{U}\right)^2} \cdot dV_z$$

или, отбрасывая постоянные сомножители,

$$G_{\omega} \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma} \right)^2} \cdot e^{-\left(\frac{V_z}{U}\right)^2} \cdot dV_z.$$

Эту форму спектральной линии называют контуром Фойхта.

Под интегралом стоит произведение двух колоколообразных функций. В зависимости от соотношения величин  $\gamma$  и  $kU$  тот или другой сомножитель можно рассматривать, как  $\delta$ -функцию Дирака, и упростить интеграл.

Если  $\gamma \ll kU$ , то лоренцевский контур с шириной  $2\gamma$  в шкале частот — это очень узкий контур, и в интеграле он играет роль  $\delta$ -функции Дирака.

$$\frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma} \right)^2} \sim \delta\left(\frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma}\right)$$

Второй сомножитель  $e^{-\left(\frac{V_z}{U}\right)^2} = e^{-\left(\frac{kV_z}{kU}\right)^2}$  можно вынести из-под интеграла Фойхта при таком значении  $kV_z$ , при котором аргумент  $\delta$ -функции равен нулю. Дело в том, что в остальных точках  $\delta$ -функция равна нулю, и величина второго сомножителя под интегралом несущественна, поэтому можно положить, что второй сомножитель — постоянная величина равная значению второго сомножителя при таком  $kV_z$ , при котором аргумент  $\delta$ -функции равен нулю. Под интегралом при этом останется  $\delta$ -функция, интеграл от которой по определению равен единице.

Приравниваем аргумент  $\delta$ -функции нулю

$$\frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad kV_z = \omega - \omega_0 \quad \Rightarrow$$

$$e^{-\left(\frac{V_z}{U}\right)^2} = e^{-\left(\frac{kV_z}{kU}\right)^2} = e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{kU}\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$G_{\omega} \sim e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{kU}\right)^2} \Rightarrow$$

$$G_{\omega} = G_0 \cdot e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{kU}\right)^2} = G_0 \cdot e^{-\left(\frac{\Omega}{kU}\right)^2} \quad \text{— это так называемый доплеровский контур спектральной линии.}$$

Ширина этого контура в шкале частот на уровне  $\frac{1}{e}$  равна  $\delta\omega = 2kU$ .

-----

Если давление газа велико, то велика частота столкновений молекул и  $\gamma \gg kU$ . В этом случае роль  $\delta$ -функции Дирака под интегралом контура Фойхта будет играть гауссов контур  $e^{-\left(\frac{V_z}{U}\right)^2} \sim \delta\left(\frac{V_z}{U}\right)$ . Аргумент  $\delta$ -функции обращается в ноль при условии  $V_z = 0$ . В результате форма линии поглощения при высоком давлении газа будет иметь вид лоренцевского контура

$$G_{\omega} = G_0 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma}\right)^2} = G_0 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma}\right)^2} = G_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma}\right) = G_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\gamma}\right).$$

Это так называемая однородно уширенная спектральная линия.

Факультативная вставка.

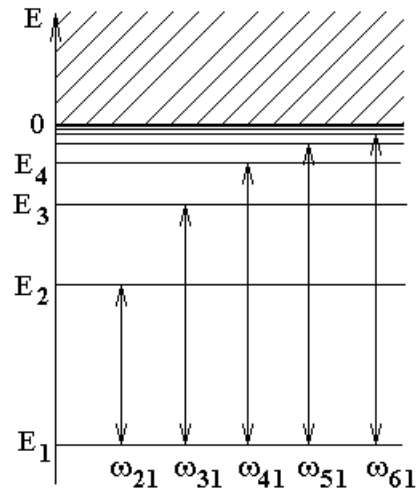
По порядку величины при комнатной температуре  $\Delta\omega_{\text{Лоренц}} \approx 10^{11} \frac{1}{c}$  при атмосферном давлении газа, и  $\Delta\omega_{\text{Доплер}} \approx 10^{10} \frac{1}{c}$  в видимом диапазоне. Лоренцевское уширение пропорционально давлению газа, доплеровское уширение пропорционально частоте света.

Конец факультативной вставки.

### **Экзамен. Причина неравенства $n > 1$ в области прозрачности среды.**

Обсудим теперь неравенство  $n > 1$ , которое практически всегда справедливо в частотной области прозрачности вещества.

Рассмотрим уровни энергии произвольного атома.



Обычно атом находится на нижнем уровне энергии  $E_1$ . Поглотив квант света, атом может перейти с этого уровня на один из более высоких уровней энергии. Разность энергий уровней равна энергии кванта света и связана с его частотой  $\omega$ :

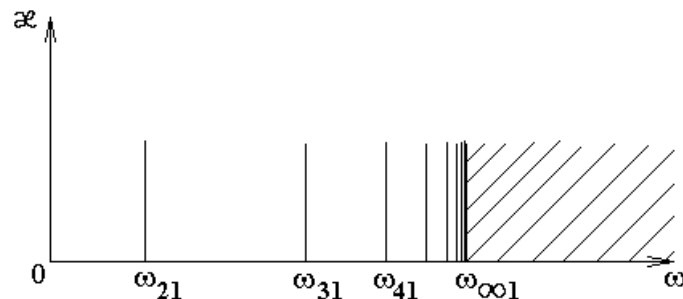
$$\hbar\omega_{k1} = E_k - E_1.$$

Частоты переходов  $\omega_{k1}$  — это и есть резонансные частоты колебаний электронной оболочки в модели атома Томсона, которые входят в выражение для комплексной поляризуемости атома:

$$\tilde{\alpha} = \sum_k \frac{f_k \frac{e^2}{m_e}}{\omega_{k1}^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma_k}.$$

Полная энергия электрона, привязанного к атому, принимает дискретные отрицательные значения. При приближении к нулевому значению возможные уровни энергии сгущаются. Около нулевой энергии находится бесконечное число отрицательных дискретных уровней энергии. Положительные энергии электрона соответствуют отрыву электрона от атома — ионизации атома. Для положительных энергий возможны все значения в непрерывном диапазоне от нуля до бесконечности.

В таком случае спектр поглощения атома или зависимость коэффициента поглощения среды от частоты имеет следующий вид:



Амплитуды линий поглощения на самом деле различаются.

Частотная область прозрачности среды — любая область частот вдали от линий поглощения.

Как видно из рисунка, для любой частоты света в области прозрачности справа от выбранной частоты всегда много линий поглощения, а слева — мало.

Рассмотрим влияние одной линии поглощения, расположенной справа  $\omega_{k1} > \omega$ , на показатель преломления. Из неравенства  $\omega_{k1} > \omega$  следует, что расстройка частоты света относительно частоты поглощающего свет перехода отрицательная:

$$\Omega_k \equiv \omega - \omega_{k1} < 0.$$

Тогда

$$n' = 1 - \frac{N f e^2}{4 \varepsilon_0 m_e \omega_{k1}} \cdot \frac{\Omega_k}{\Omega_k^2 + \gamma_k^2} > 1.$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } n' = 1 - \pi N f \cdot \frac{e^2}{m_e \omega_{k1}} \cdot \frac{\Omega_k}{\Omega_k^2 + \gamma_k^2} > 1.$$

Отсюда следует положительный вклад  $n' - 1 > 0$  в показатель преломления от линии поглощения, которая расположена справа от рассматриваемой частоты света.

Поскольку справа линий много, то их суммарный вклад в показатель преломления больше, чем вклад линий, расположенных слева, и суммарный вклад — положительный. В результате показатель преломления сдвигается от единичного значения без среды в сторону увеличения при наличии среды. Поэтому в области прозрачности среды:

$$n = n' > 1.$$

Исключением из правила являются области частот, где одна из левых линий поглощения  $\omega_{k1} < \omega$  достаточно близка к рассматриваемой частоте света  $\omega$ , так чтобы ее отрицательный вклад в показатель преломления  $n' - 1 < 0$  перевесил положительные вклады всех правых линий поглощения.

В малой частотной окрестности линии поглощения показатель преломления может быть меньше единицы.

-----

Рассмотрим порядок величины вклада в коэффициент поглощения и вклада в показатель преломления при относительно больших безразмерных расстройках  $x$  частоты света относительно центра линии поглощения

$$x = \left| \frac{\omega - \omega_{k1}}{\gamma_k} \right| = \left| \frac{\Omega_k}{\gamma_k} \right| \gg 1.$$

Вдали от линии поглощения при больших значениях  $x$  получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \sim \frac{1}{1+x^2} \approx \frac{1}{x^2} \\ (n'-1) \sim \left( -\frac{x}{1+x^2} \right) \approx -\frac{1}{x} \end{array} \right.,$$

что добавка к коэффициенту поглощения  $\kappa \sim \frac{1}{x^2}$  быстрее убывает при возрастании  $x$ , чем добавка к показателю преломления  $(n'-1) \sim -\frac{1}{x}$ . Поэтому, в частотной области прозрачности среды показатель преломления заметно отличается от единицы.

### Экзамен. Оптика плазмы.

Плазма — это ионизованный газ. Например, в газоразрядных лампах дневного света светится плазма. Ионизация газа происходит под ударами электронов, которые разгоняются электрическим полем. Плазма содержит газ нейтральных атомов, электроны и положительные ионы.

Ионы в тысячи раз тяжелее электронов и под действием электрического поля световой волны почти не смещаются. Взаимодействие света с плазмой — это в основном взаимодействие со свободными электронами плазмы.

Свободный электрон можно рассматривать, как предельный случай электрона в атоме, если считать, что возвращающая сила со стороны ядра атома равна нулю.

В модели атома Томсона квадрат резонансной частоты  $\omega_0^2 \equiv \frac{\rho q}{3\epsilon_0 m}$  был введен,

$$\text{В системе СГС Гаусса } \omega_0^2 \equiv \frac{4\pi\rho q}{3m}.$$

как величина пропорциональная отношению возвращающей силы к смещению от положения равновесия. Если возвращающая сила равна нулю, то и резонансная частота тоже равна нулю  $\omega_0 = 0$ . Тогда вместо комплексной

поляризуемости атома  $\tilde{\alpha} = \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}$  получим

$\tilde{\alpha} = \frac{\frac{e^2}{m_e}}{\omega^2 + 2i\omega\gamma}$  — поляризуемость свободного электрона на частоте светового поля  $\omega$ .

#### Факультативная вставка.

В конце первой лекции мы получили, что для одиночного атома

$$\gamma = \Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{e^2 \omega^2}{12\pi m_e \epsilon_0 c^3}.$$

На длине волны  $\lambda = 1 \text{ мкм}$  получаем  $\frac{2\gamma}{\omega_0} \approx 10^{-8}$ .

Конец факультативной вставки.

В случае свободного электрона в видимом диапазоне спектра  $\frac{\gamma}{\omega} \approx 10^{-8}$  и  $\gamma \ll \omega$ . В результате второе слагаемое в знаменателе выражения для поляризуемости свободного электрона на частоте светового поля  $\omega$  можно отбросить и получить, что комплексная поляризуемость вещественная, но отрицательная:

$$\tilde{\alpha} = -\frac{e^2}{m_e \omega^2}.$$

Поляризация среды равна произведению концентрации  $N$  на средний дипольный момент:

$$\vec{P} = N \cdot \langle \vec{p} \rangle = N\alpha \cdot \langle \vec{E} \rangle = N\alpha \vec{E}.$$

Сравним это с определением диэлектрической восприимчивости  $\chi$  в соответствии с равенством  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$  и получим, что  $\chi = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0}$ .

В системе СГС Гаусса  $\vec{P} = \chi \vec{E}$  и  $\chi = N\alpha$ .

Из равенств  $\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ,  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$  и  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$  получаем связь диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости  $\varepsilon = 1 + \chi$ , а с учетом  $\chi = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0}$  получаем  $\varepsilon = 1 + \frac{N\alpha}{\varepsilon_0}$ . Это же равенство справедливо и для комплексных величин  $\tilde{\varepsilon}$  и  $\tilde{\alpha}$ :

$$\tilde{\varepsilon} = 1 + \frac{N\tilde{\alpha}}{\varepsilon_0}.$$

В системе СГС Гаусса  $\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi \vec{P}$ ,  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ,  $\vec{P} = \chi \vec{E}$ ,  $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$ ,  $\chi = N\alpha$ ,  $\varepsilon = 1 + 4\pi N\alpha$ ,  $\tilde{\varepsilon} = 1 + 4\pi N\tilde{\alpha}$ .

В отличие от формулы Клаузиуса — Москотти:  $\frac{\tilde{\varepsilon} - 1}{\tilde{\varepsilon} + 2} = \frac{N\tilde{\alpha}}{3\varepsilon_0}$  для

неполярных диэлектриков, для плазмы справедлива формула  $\tilde{\varepsilon} = 1 + \frac{N\tilde{\alpha}}{\varepsilon_0}$ ,

В системе СГС Гаусса  $\frac{\tilde{\varepsilon} - 1}{\tilde{\varepsilon} + 2} = \frac{4}{3}\pi N\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\varepsilon} = 1 + 4\pi N\tilde{\alpha}$ .

так как для плазмы считают, что нет разницы между полем, действующим на электрон и средним полем в среде. Нелинейная зависимость  $\tilde{\varepsilon}$  от  $\tilde{\alpha}$  в формуле Клаузиуса — Москотти получается именно в результате этой разницы.

Тогда с учетом  $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}} \approx \sqrt{\tilde{\varepsilon}}$  получаем:

$$\tilde{n}^2 \approx 1 + \frac{N\tilde{\alpha}}{\varepsilon_0}.$$

В системе СГС Гаусса  $\tilde{n}^2 \approx 1 + 4\pi N\tilde{\alpha}$ .

Подставим сюда выражение для поляризуемости свободных электронов

$$\tilde{\alpha} = -\frac{e^2}{m_e \omega^2} \text{ и получим}$$

$$\tilde{n}^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2}.$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \tilde{n}^2 = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m_e \omega^2}.$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$\tilde{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где коэффициент при  $\frac{1}{\omega^2}$  обозначен, как  $\omega_p^2 \equiv \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e}$ ,

$$\text{В системе СГС Гаусса } \omega_p^2 = 4\pi N \frac{e^2}{m_e}.$$

и называется квадратом плазменной частоты, так как он имеет размерность квадрата частоты.

Взаимодействие плазмы со световым полем существенно различается в двух спектральных диапазонах: если частота света меньше плазменной частоты  $\omega < \omega_p$  и если частота света больше плазменной частоты  $\omega > \omega_p$ .

В первом диапазоне световых частот  $\omega < \omega_p$  получим, что квадрат показателя преломления является отрицательной величиной:

$$\tilde{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 0.$$

Тогда сам показатель преломления — чисто мнимая величина  $\tilde{n} = in$ .

Коэффициент поглощения среды связан с мнимой частью показателя преломления соотношением  $\kappa = 2 \frac{\omega}{c} n$ .

Казалось бы, плазма поглощает электромагнитные волны с частотой ниже плазменной частоты. Однако здесь есть некоторая тонкость. Ослабление света есть, а поглощения — нет. Плазма в этом частотном диапазоне отражает электромагнитные волны гораздо больше, чем поглощает их.

Дело в том, что глубина проникновения электромагнитных волн в плазму имеет порядок  $\frac{1}{\kappa}$ , и эта глубина проникновения оказывается гораздо меньше длины электромагнитной волны. Причина такого неравенства состоит в том, что длина волны в плазме оказывается гораздо больше длины волны в вакууме. Длина волны в плазме получается, как результат деления длины волны в вакууме на вещественную часть показателя преломления  $n'$ , которая очень близка к нулю (мы в приведенных выше выкладках ее просто отбросили, как нулевую). Ранее при рассмотрении стоячих волн мы обсуждали, что в случае, когда глубина проникновения света в среду гораздо меньше длины волны света, оказывается, что свет отражается от среды, а не поглощается средой. Вот свет и отражается от плазмы при условии  $\omega < \omega_p$ .

Чтобы подчеркнуть отсутствие поглощения света в данном случае и называют коэффициентом экстинкции (или показателем экстинкции), а не коэффициентом поглощения. В более общем случае нужно отличать коэффициент поглощения, который описывает поглощение света и переход световой энергии в тепловую энергию, и коэффициент экстинкции, который описывает общие потери света за счет поглощения, отражения и рассеяния.

Во втором диапазоне световых частот  $\omega > \omega_p$  получим:

$$\tilde{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} > 0$$

и показатель преломления — вещественная величина. Отсутствие мнимой части означает нулевой коэффициент поглощения  $\kappa = 2 \frac{\omega}{c} n'' = 0$ , то есть волна проходит среду без ослабления.

Следовательно, плазма прозрачна для света с частотой выше плазменной частоты.

### **Экзамен. Оптика металлов. Прозрачность сред для рентгеновского излучения.**

В металле, как и в плазме, есть свободные электроны. Поэтому взаимодействие света с металлом похоже на взаимодействие света с плазмой.

#### **Факультативная вставка.**

В металлах  $\gamma$  в выражении для комплексной поляризуемости электронов

$$-\frac{e^2}{m_e}$$

в металле  $\tilde{\alpha} = \frac{m_e}{\omega^2 + 2i\omega\gamma}$  сохраняют, а не отбрасывают, как в плазме. В

металлах  $\gamma = \left(10^{12} \div 10^{14}\right) \frac{1}{c}$  — частота рассеяния электронов, которая заметно

меньше, например, плазменной частоты металлов  $\omega_p \approx 10^{16} \frac{1}{c}$ , но все же сравнима с ней.

#### **Конец факультативной вставки.**

Металл — твердая фаза вещества, поэтому концентрация свободных электронов в металле гораздо выше, чем в обычной плазме. Плазменная частота

зависит от концентрации свободных электронов  $\omega_p^2 \equiv \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}$ . В результате

плазменная частота  $\omega_p$  для металлов оказывается в ультрафиолетовом диапазоне частот и соответствующих длин волн. Для более коротких длин волн металл оказывается прозрачным. Характерная длина волны границы прозрачности разных металлов  $(150 \div 350) \text{ нм}$ .



По этой причине жесткий ультрафиолетовый свет и рентгеновский свет с частотой  $\omega > \omega_p$  проходит через металл почти без ослабления, а в видимом диапазоне при условии  $\omega < \omega_p$  металлы имеют очень высокий коэффициент экстинкции света. При этом свет ослабляется в очень тонком слое  $\frac{1}{\alpha}$  порядка  $\frac{\lambda}{10}$ . Как обсуждалось раньше, ослабление света в слое толщиной гораздо меньше  $\frac{\lambda}{2}$  всегда означает высокий коэффициент отражения. Свет отражается, а не поглощается. По этой причине металлы хорошо отражают свет, причем в инфракрасном диапазоне, где длина волны больше, отражение света выше.

-----

Энергия рентгеновского кванта излучения  $E = h\nu = \hbar\omega$  оказывается гораздо больше, чем энергия связи внешнего электрона с атомом. В таком случае внешние электроны атома можно считать почти свободными не только у металлов, но и у диэлектриков. Поэтому диэлектрики в рентгеновском диапазоне излучения прозрачны, как и металлы.

В результате рентгеновский свет  $\omega > \omega_p$  проходит почти без ослабления не только через металлы, но и через любые вещества. Любое вещество в значительной мере прозрачно в рентгеновском диапазоне излучения.

На рентгеновских снимках регистрируют тени от органов или синтетических конструкций с большей плотностью вещества.

### **Термодинамика света.** **Экзамен. Абсолютно черное тело.**

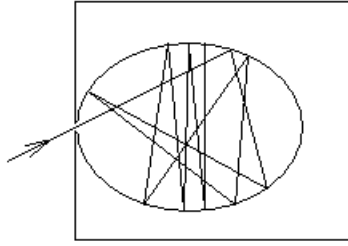
Абсолютно черное тело — это идеализация.

Абсолютно черное тело поглощает весь падающий на его поверхность свет. При этом никакой свет не отражается и не рассеивается.

Поверхность реального тела не может быть абсолютно черной, но можно смоделировать небольшой участок поверхности, который будет вести себя подобно поверхности абсолютно черного тела.

Рассмотрим большую полость внутри непрозрачного тела. Пусть полость соединяется с внешним пространством через малое отверстие. Поверхность, мысленно натянутая на плоскость отверстия, и будет моделью поверхности абсолютно черного тела.

Дело в том, что при малой площади отверстия относительно площади внутренней поверхности полости свет, попадая в отверстие, многократно отражается и рассеивается внутри полости, прежде чем попадает обратно в выходное отверстие. При каждом акте рассеивания и отражения свет частично поглощается стенками полости. В таком случае даже при высоком отражении стенок полости обратно из отверстия свет почти не выходит.



-----  
 Раньше в других вопросах мы не раз упоминали о световом поле, которое находится в тепловом равновесии с веществом.

Если снаружи в рассматриваемую полость специально не светить, то внутри полости излучение будет находиться в тепловом равновесии со стенками полости.

Нагретое тело излучает свет. Тела при комнатной температуре тоже излучают свет только в инфракрасном диапазоне.

Если стенки рассматриваемой полости нагреть, то из отверстия будет выходить свет, который называют излучением абсолютно черного тела.

### Экзамен. Закон Кирхгофа.

Смысл закона Кирхгофа в том, что нагретое тело хорошо светится, только если это черное тело.

Если тело плохо поглощает свет, то нагретое тело и излучает мало. Например, прозрачный кристалл при нагревании светится слабо, а черное тело при нагревании до той же температуры светится ярко. Зеркало при нагревании тоже плохо светится. Нагретый белый мел хуже светится, чем нагретый черный уголь.

Закон Кирхгофа — это опытный факт, но его можно обосновать исходя из термодинамики, если рассмотреть термодинамическое равновесие света и вещества при некоторой температуре. Смысл рассмотрения в том, что, сколько света поглощается, столько должно и излучаться, чтобы температура тела не изменялась в условиях равновесия. Черное тело хорошо поглощает свет, значит, оно и излучать будет хорошо.

Для количественного описания закона Кирхгофа нам понадобится понятие коэффициента поглощения поверхности, который показывает, какая часть света поглощается поверхностью. Пусть  $a(\nu)$  — коэффициент поглощения поверхности, он зависит от частоты света  $\nu$ . Коэффициент поглощения поверхности равен отношению поглощенной энергии к энергии, падающей световой волны, — это безразмерная величина. В отличие от коэффициента поглощения среды  $\kappa$ , который входит в закон Бугера  $I(z) = I_0 e^{-\kappa z}$  и который имеет размерность обратной длины. Для идеально белого тела  $a(\nu) = 0$ , для идеально прозрачного тела  $a(\nu) = 0$ , для идеального зеркала  $a(\nu) = 0$ , а для абсолютно черного тела  $a(\nu) = 1$ .

Для количественного описания излучения поверхности тела вводят понятие светимости  $R \equiv \frac{dW}{dtdS}$ . Светимость — это плотность потока энергии или энергия, которая в единицу времени излучается единицей площади поверхности. Это понятие очень близко понятию освещенности поверхности  $E \equiv \frac{dW}{dtdS}$ . Освещенность — это тоже энергия в единицу времени на единицу площади, только для падающего на поверхность света, а не для света, излучаемого поверхностью. Оба понятия близки к понятию интенсивности света  $I \equiv \frac{dW}{dtdS_{\perp}}$ , которая тоже представляет собой энергию в единицу времени через единицу площади перпендикулярной свету, только интенсивность рассматривается для света, который идет почти в одном направлении, а светимость и освещенность применимы для любого распределения света по направлениям. Если свет падает перпендикулярно на экран, то освещенность экрана равна интенсивности падающего света. Если свет падает под углом, то освещенность меньше интенсивности падающего света, их отношение равно косинусу угла падения.

В отличие от интенсивности света освещенность характеризует падение света на поверхность из телесного угла  $2\pi$ , а светимость характеризует излучение света поверхностью в телесный угол  $2\pi$ .

Для закона Кирхгофа представляет интерес величина спектральной плотности светимости  $r_{\nu} \equiv \frac{dR}{d\nu}$ , которую называют также испускательной способностью поверхности (реже — излучательной способностью поверхности). В случае термодинамического равновесия излучения с веществом спектральная плотность светимости связана со спектральной плотностью освещенности  $e_{\nu} \equiv \frac{dE}{d\nu}$  соотношением  $a(\nu) \cdot e_{\nu}(T) = r_{\nu}(T)$ . Это равенство означает, что при термодинамическом равновесии на каждой частоте света, сколько энергии поглощается поверхностью столько и излучается.

Соответственно, закон Кирхгофа утверждает, что отношение испускательной способности поверхности к ее коэффициенту поглощения  $\frac{r_{\nu}(T)}{a(\nu)}$  не зависит от свойств поверхности, а зависит только от частоты света  $\nu$  и от температуры поверхности  $T$ . Это отношение равно спектральной плотности освещенности  $e_{\nu}$  при термодинамическом равновесии света и вещества. Спектральная плотность освещенности  $e_{\nu}$  при термодинамическом равновесии света и вещества не зависит от свойств вещества. При каждой температуре есть некоторое равновесное состояние света, и сколько этого света падает в единицу времени на единицу площади поверхности — это никак не зависит от свойств поверхности.

Иногда под законом Кирхгофа понимают соотношение

$$\frac{r_\nu(T)}{a(\nu)} = e_\nu(T),$$

но левая часть равенства имеет одно и то же значение независимо от термодинамического равновесия света и вещества, а правая часть равна левой только в случае термодинамического равновесия. Равенство показывает, что чем больше коэффициент поглощения света  $a(\nu)$  (чем чернее тело), тем больше испускательная способность поверхности  $r_\nu(T)$  (тем ярче светит нагретое тело), так как их отношение не зависит от свойств поверхности.

Отношение  $\frac{r_\nu(T)}{a(\nu)}$  для любых поверхностей одинаково независимо от наличия термодинамического равновесия или его отсутствия. В случае термодинамического равновесия света и вещества отношение  $\frac{r_\nu(T)}{a(\nu)}$  равно

$e_\nu(T)$ . Оказывается, что отношение  $\frac{r_\nu(T)}{a(\nu)}$  имеет одинаковое значение,

например, для белого мела, черного угля, прозрачного кристалла и металлического зеркала.

Факультативная вставка.

Фотометрия.

Понятия освещенности  $E$  и светимости  $R$  относятся к разделу оптики — фотометрия. В фотометрии также вводятся  $I$  — сила света и  $B$  — яркость источника света.

Для источника света вводится величина силы света  $I \equiv \frac{dW}{dtd\Omega}$  — энергия,

излучаемая в единицу времени в единичный телесный угол. Сила света удобна для описания точечного источника света, например звезды. Для излучения звезды сила света не зависит от расстояния до звезды. Для любого источника света в приближении геометрической оптики сила света не зависит от расстояния до источника света.

Освещенность поверхности, создаваемая точечным источником света,  $E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}$  определяется силой света источника  $I$ , углом падения света на поверхность  $\alpha$  и расстоянием от источника до поверхности  $r$ . Если здесь силу света заменить ее определением  $I \equiv \frac{dW}{dtd\Omega}$  в выражении для освещенности

$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2} = \frac{dW}{dtd\Omega} \cdot \frac{\cos \alpha}{r^2}$ , и телесный угол  $d\Omega$  заменить его определением

$d\Omega \equiv \frac{dS_{\perp \vec{r}}}{r^2}$ . Тогда

$$E = \frac{r^2}{dS_{\perp \vec{r}}} \cdot \frac{dW}{dt} \cdot \frac{\cos \alpha}{r^2} = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{\cos \alpha}{dS_{\perp \vec{r}}}.$$

Здесь  $dS = \frac{dS_{\perp \vec{r}}}{\cos \alpha}$  — площадь освещаемой поверхности. Тогда  $E = \frac{dW}{dt dS}$  в

соответствии с определением освещенности  $E$ .

Яркость (излучения) поверхности или яркость света  $B \equiv \frac{dW}{dt d\Omega dS \cos \alpha}$  —

энергия, излучаемая в единицу времени в единичный телесный угол и с "видимой" единицы площади поверхности. Здесь  $\alpha$  — угол между нормалью к поверхности и направлением излучения. Косинус в знаменателе удобен, потому что площадь  $dS$  видна из направления  $\alpha$ , как  $dS \cos \alpha$ . Обычно введенная таким образом яркость излучения с поверхности источника света не зависит от направления  $\alpha$  — это закон Ламберта. Например, солнечный диск имеет одинаковую яркость и в центре диска и на краю диска. Для ламбертовского источника света его светимость (в телесный угол  $2\pi$ ) и яркость связаны простым соотношением  $R = \pi B$ .

В фотометрии принято рассматривать оптические величины с учетом чувствительности глаза. Так, например, для энергии, которая падает на поверхность в единицу времени (световой поток), вместо Ватта принята единица люмен. Для длины волны света, которая соответствует максимальной чувствительности глаза ( $\lambda = 555 \text{ нм}$ ), по определению  $1 \text{ Ватт} = 683 \text{ люмена}$ . Для других длин волн в одном Ватте люменов будет меньше. Освещенность, светимость и яркость измеряется в люксах. Один люкс равен одному люмену на квадратный метр  $1 \text{ лк} = \frac{1 \text{ лм}}{1 \text{ м}^2}$ . Сила света измеряется в канделах (свечах).

Такие единицы имеют смысл для того, чтобы оценить, насколько удобно освещение для человеческого глаза. На самом деле освещение в столько-то люксов никак не гарантирует удобства для человека, если, например, это будет освещение синим светом или красным. Будучи последовательными нужно было бы ввести в рассмотрение раздельно синие люксы, зеленые люксы и красные люксы. Кроме того, можно было бы ввести еще и серые люксы для сумеречной освещенности, когда нет цветового восприятия. Вместо этого введено понятие цветовой температуры источника света, но мощность источника и цветовая температура — это два параметра, а для корректного описания нужны три параметра: мощность синего света, мощность зеленого и мощность красного.

Если свет регистрируется объективными приемниками света, а не глазом, то удобно отказаться от люменов вообще и говорить только об энергетических единицах — Ваттах.

-----

Замечание к вопросу о законе Кирхгофа.

Спектральную плотность освещенности  $e_\nu$  в законе Кирхгофа обычно выражают через спектральную плотность объемной плотности энергии светового поля. Обсудим это выражение.

В кинетической теории газов доказывается, что плотность потока молекул  $J = \frac{N \cdot \langle V \rangle}{4}$ , где  $N$  — концентрация молекул,  $\langle V \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$  — средняя скорость молекул. Выражение  $J = \frac{N \cdot \langle V \rangle}{4}$  справедливо независимо от распределения Максвелла по модулю скорости молекул. Оно является следствием только изотропности распределения молекул по скоростям.

Заменим  $N \rightarrow w$  и  $\langle V \rangle \rightarrow c$ . Здесь  $w \equiv \frac{dW}{dV}$  — объемная плотность энергии. Тогда вместо количества частиц получим энергию. Вместо плотности потока молекул  $J = \frac{N \langle V \rangle}{4}$  получим плотность потока энергии или освещенность  $E = \frac{wc}{4}$ . Соответственно для спектральной плотности освещенности получим соотношение  $e_\nu = \frac{w_\nu c}{4}$ , которое справедливо при изотропном распределении света по направлениям. В случае термодинамического равновесия света и вещества  $e_\nu(T) = \frac{w_\nu(T)c}{4}$  — плотность потока спектральной плотности энергии или энергия, которая в единицу времени в единичном интервале частот проходит через единичную площадку (в одну сторону).

Тогда закон Кирхгофа  $\frac{r_\nu(T)}{a(\nu)} = e_\nu(T)$  можно записать в виде

$$\frac{r_\nu(T)}{a(\nu)} = \frac{w_\nu(T) \cdot c}{4}.$$

Это более традиционное математическое выражение закона Кирхгофа.  
Конец факультативной вставки.

### **Экзамен. Закон Стефана — Больцмана.**

Светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени температуры — это опытный факт, это и есть закон Стефана — Больцмана.

$$R(T) \equiv \int_0^{+\infty} r_\nu(T) \cdot d\nu = \sigma T^4 \quad \Rightarrow \quad R = \sigma T^4.$$

Здесь  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана. Стефан открыл закон экспериментально, Больцман позднее обосновал его теоретически.

Факультативная вставка.

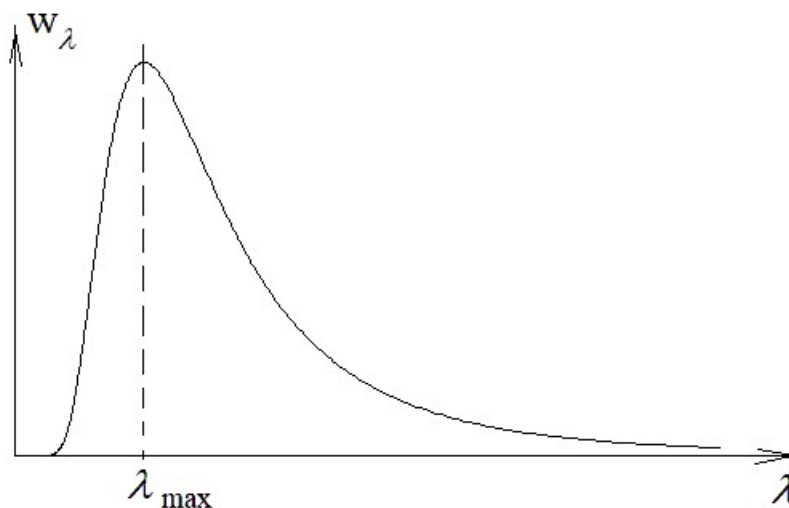
Опираясь на формулу Планка, можно доказать, что

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2}, \text{ где } k_B \text{ — постоянная Больцмана.}$$

Конец факультативной вставки.

### Экзамен. Закон смещения Вина.

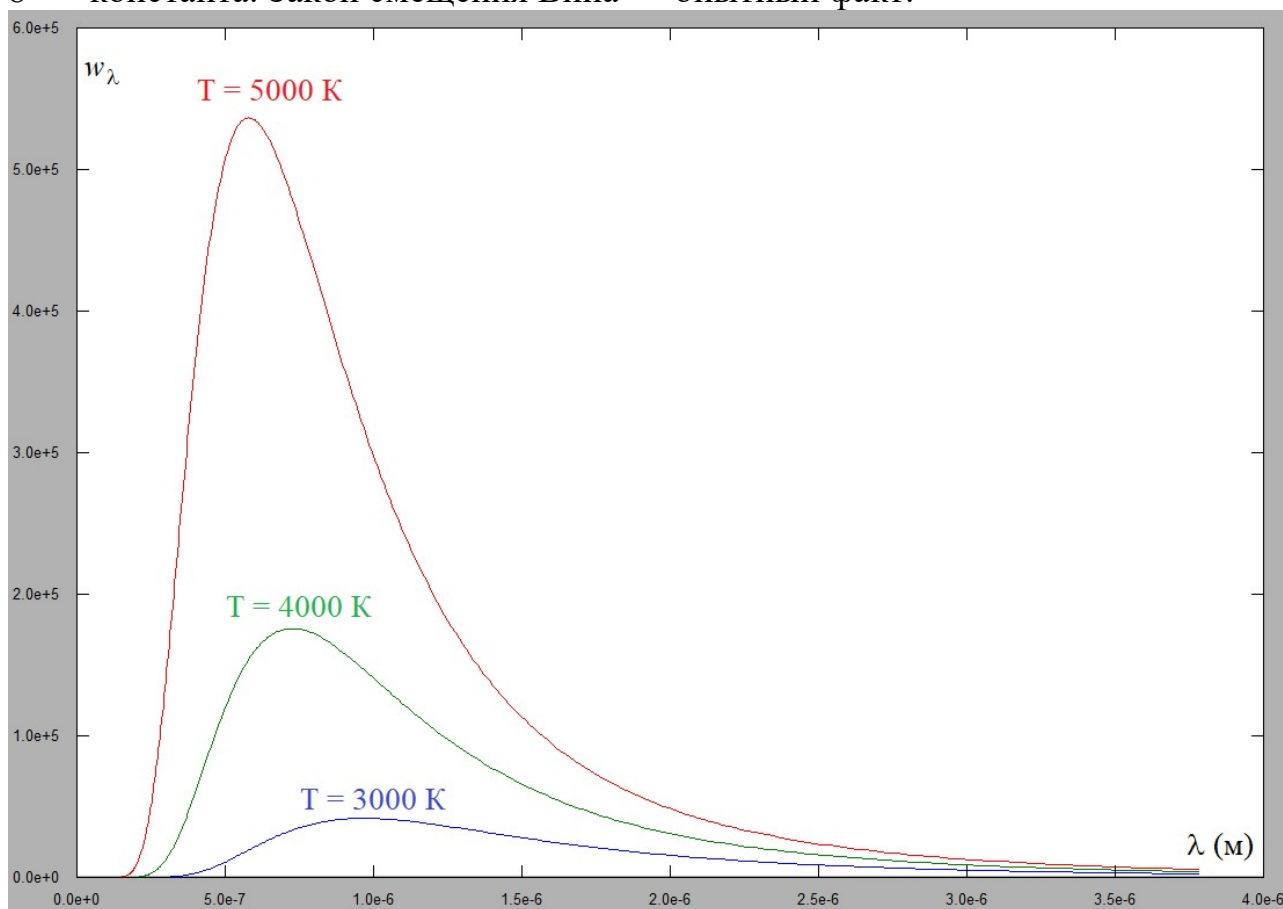
Рассмотрим распределение излучения абсолютно черного тела по длинам волн.



Назовем  $\lambda_{\max}$  такую длину волны  $\lambda$ , при которой  $w_{\lambda} = \max$ .

Тогда закон смещения Вина утверждает, что  $\lambda_{\max} \sim \frac{1}{T}$  или  $\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$ , где

$b$  — константа. Закон смещения Вина — опытный факт.



Факультативная вставка.

Постоянная в законе смещения Вина  $b = \frac{ch}{\alpha k_B}$ , где  $k_B$  — постоянная

Больцмана,  $\alpha \approx 4.965114...$  — корень уравнения  $\alpha = 5(1 - e^{-\alpha})$ .

Одну и ту же энергию можно представить через спектральную плотность по частотам и через спектральную плотность по длинам волн. Соответственно  $w_\nu d\nu = w_\lambda d\lambda$ .

Из равенства  $\lambda \nu = c$ , если его продифференцировать и разделить на произведение  $\lambda \nu$ , следует  $\left| \frac{d\lambda}{\lambda} \right| = \left| \frac{d\nu}{\nu} \right|$ . Тогда  $\left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| = \frac{\lambda}{\nu}$ , и из равенства  $w_\nu d\nu = w_\lambda d\lambda$  следует равенство  $\nu w_\nu = \lambda w_\lambda$ .

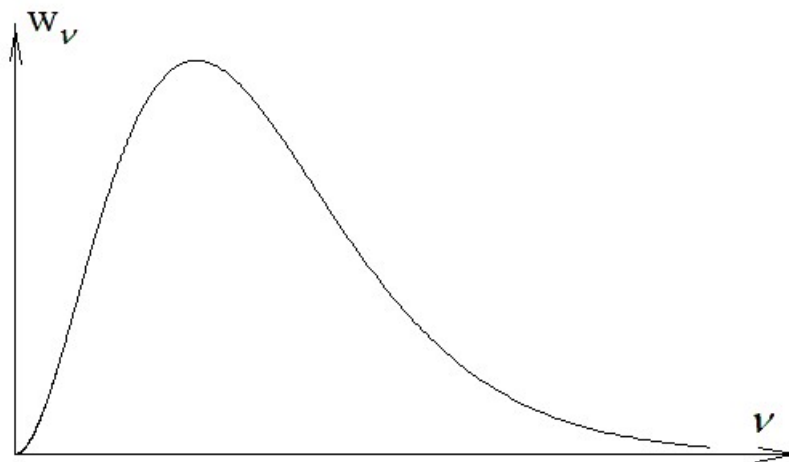
Если частоту света при условии  $w_\nu = \max$  обозначить как  $\nu_{\max}$ , то с помощью формулы Планка можно доказать, что  $\nu_{\max} \sim T$  или  $\nu_{\max} = b'T$ , где  $b' = \beta \frac{k_B}{h}$ , где  $\beta \approx 2.821439...$  — корень уравнения  $\beta = 3(1 - e^{-\beta})$ .

Конец факультативной вставки.

### Экзамен. Формула Планка.

Спектр излучения абсолютно черного тела описывается формулой Планка

$$w_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (1).$$



Здесь  $W$  — энергия электромагнитного поля,  $w \equiv \frac{dW}{dV}$  — объемная

плотность энергии,  $w_\nu \equiv \frac{dW}{dV d\nu}$  — спектральная плотность объемной плотности энергии при термодинамическом равновесии света с веществом.



В формуле Планка  $\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$  — среднее число фотонов в одном состоянии,

то есть в одном объеме когерентности;  $h\nu$  — энергия фотона;  $\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$  —

средняя энергия света в одном состоянии. Число возможных состояний в единичном интервале частот пропорционально  $\nu^2$  аналогично тому, как в распределении Максвелла по модулю скорости число состояний в единичном интервале скоростей пропорционально  $V^2$ .

#### Факультативная вставка.

Вместо объемной плотности спектральной плотности энергии  $w_\nu$  в формуле Планка иногда рассматривается спектральная плотность светимости  $r_\nu = \frac{dR}{d\nu} = \frac{dW}{dtdSd\nu}$  абсолютно черного тела, которая называется испускательной

способностью и равна энергии, которая в единицу времени излучается единицей площади поверхности в единичном интервале частот. Испускательная способность абсолютно черного тела равна спектральной плотности

освещенности  $e_\nu = \frac{dE}{d\nu} = \frac{dW}{dtdSd\nu}$  при термодинамическом равновесии излучения

и вещества. Мы уже обсуждали, что для излучения абсолютно черного тела

$e_\nu = \frac{w_\nu c}{4}$  аналогично тому, как в кинетической теории газов плотность потока

молекул равна  $J = \frac{N \cdot \langle V \rangle}{4}$ , где  $N$  — концентрация молекул,  $\langle V \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$  —

средняя скорость молекул. Соответственно формула Планка может быть еще в

двух формах с правой частью, в которой есть дополнительный сомножитель  $\frac{c}{4}$ :

$$e_\nu(T) = r_\nu(T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \quad (2)$$

При соблюдении закона Ламберта светимость  $R$  связана с яркостью  $B$  соотношением  $R = \pi B$ . Закон Ламберта выполняется в частности и для абсолютно черного тела. Это же соотношение справедливо между спектральной плотностью светимости и спектральной плотностью яркости  $r_\nu = \pi b_\nu$ . Соответственно формула Планка может быть еще в одном виде:

$$b_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \quad (3)$$

В формуле Планка вместо распределения по частотам  $\nu$  иногда рассматривают распределение по циклическим частотам  $\omega = 2\pi\nu$ . Объемная

плотность энергии в интервале циклических частот  $d\omega = 2\pi d\nu$  и в интервале обычных частот  $d\nu$  — это одна и та же объемная плотность энергии  $dw = w_\omega d\omega = w_\nu d\nu$ . Тогда  $w_\omega = \frac{d\nu}{d\omega} w_\nu = \frac{1}{2\pi} w_\nu$ . Соответственно в формуле (1) для  $w_\omega$  правая часть будет в  $2\pi$  раз меньше, чем в формуле (1) для  $w_\nu$ . И это тоже формула Планка:

$$w_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1}. \quad (4)$$

Аналогично для формул 2 и 3:

$$e_\omega(T) = r_\omega(T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1} \quad (5)$$

$$b_\omega(T) = \frac{\omega^2}{4\pi^3 c^2} \cdot \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1}. \quad (6)$$

Каждую из этих трех формул (4-6) тоже называют формулой Планка.

Кроме приведенных выше 6 форм формулу Планка можно записать еще в 3-х формах, если с учетом  $\nu \cdot w_\nu = \lambda \cdot w_\lambda$  перейти от частот к длинам волн:

$$w_\lambda(T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \quad (7)$$

$$e_\lambda(T) = r_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \quad (8)$$

$$b_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}. \quad (9)$$

Зачастую в литературе приводится одна из первых 6-и формул Планка без каких-либо пояснений, какая именно формула имеется в виду.

Конец факультативной вставки.

### **Экзамен. Световое давление. Корпускулярная и волновая трактовка.**

#### **1). Корпускулярная трактовка давления света.**

Рассмотрим свет, который нормально падает на площадку и полностью поглощается.

Давление — это сила, деленная на площадь  $P = \frac{F}{S}$ . Сила — это импульс,

деленный на время  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ , или импульс света, который в единицу времени падает на площадку. Тогда давление — это импульс, который в единицу времени падает на единицу площади или плотность потока импульса.

Для фотона импульс и энергия связаны следующим соотношением:

$$p = mV = mc = \frac{mc^2}{c} = \frac{W}{c} \quad \Rightarrow$$

$$p = \frac{W}{c} \quad (p = \frac{h\nu}{c}).$$

Сравним давление  $P$  или плотность потока импульса  $\frac{dp}{dt dS}$  с

интенсивностью  $I$  или плотностью потока энергии  $\frac{dW}{dt dS}$ . Между ними будет

тот же коэффициент  $\frac{1}{c}$ , что и между импульсом и энергией фотона  $p = \frac{W}{c}$ ,

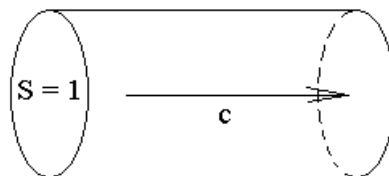
следовательно

$$P = \frac{I}{c}.$$

Здесь  $P$  — давление света,  $I$  — интенсивность света.

Факультативная вставка.

Рассмотрим цилиндр со световым полем, объемная плотность которого  $w$ , а фазовая скорость —  $c$  пусть будет направлена вдоль оси цилиндра.



Пусть площадь сечения цилиндра равна единице, а длина —  $c$ . Тогда объем цилиндра равен их произведению  $c$ , а энергия светового поля в этом объеме равна  $cw$ . Вся эта энергия в единицу времени пройдет через единичную площадку. Следовательно,

$$I = cw.$$

С учетом того, что  $P = \frac{I}{c}$ , получаем

$$P = w$$

для света, который распространяется в одном направлении.

Конец факультативной вставки.

Если свет не поглощается поверхностью, а полностью отражается от нее, то изменение импульса световых фотонов удваивается, соответственно удваивается и давление света:

$$P = 2 \frac{I}{c},$$

где  $I$  — интенсивность одной бегущей волны.

## 2). Волновая трактовка давления света.

Пусть линейно поляризованный свет нормально падает на идеальное металлическое зеркало и полностью отражается.

Поле  $\vec{E}$  световой волны вызывает электрический ток в тонком поверхностном слое металла.

Со стороны магнитного поля  $\vec{B}$  световой волны на заряды этого тока действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = q[\vec{V}, \vec{B}].$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \vec{F}_L = \frac{q}{c}[\vec{V}, \vec{B}].$$

Эта сила и создает давление света. И действительно, определим направление силы:

$$\vec{F}_L \perp \vec{V} \quad \text{и} \quad \vec{V} \parallel \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_L \perp \vec{E}.$$

Кроме того,  $\vec{F}_L \perp \vec{B}$ , что следует из  $\vec{F}_L = q[\vec{V}, \vec{B}]$ . Тогда

$$\begin{cases} \vec{F}_L \perp \vec{E} \\ \vec{F}_L \perp \vec{B} \end{cases} \text{аналогично вектору Пойнтинга } \vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}], \text{ для которого}$$

$$\begin{cases} \vec{S} \perp \vec{E} \\ \vec{S} \perp \vec{B} \end{cases}.$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } \vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}].$$

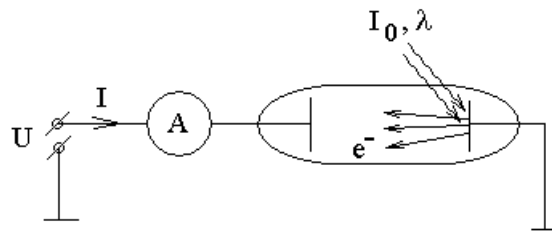
Следовательно, сила Лоренца направлена так же, как и вектор Пойнтинга — вдоль луча и перпендикулярно рассматриваемой отражающей поверхности металла.

Если свет падает не на поверхность металла, а на поверхность, например поглощающего свет диэлектрика, то в диэлектрике свет наводит связанные токи. На них тоже действует сила Лоренца со стороны магнитного поля световой волны. Эта сила Лоренца и оказывает давление света на диэлектрик.

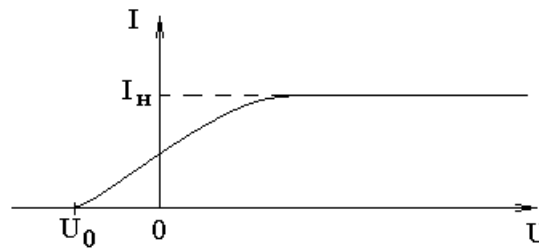
## Экзамен. Фотоэффект. Опыты Столетова. Красная граница фотоэффекта. Формула Эйнштейна.

Фотоэффект — выбивание светом электронов из вещества.

Столетов измерял зависимость фототока  $I$  от напряжения  $U$ , длины волны света  $\lambda$  и интенсивности света  $I_0$  в следующей схеме эксперимента.



Экспериментально наблюдалась следующая зависимость фототока от напряжения:



Рассмотрим график подробнее.

При нулевом напряжении  $U = 0$  (и нулевом внутреннем сопротивлении источника напряжения) в схеме течет ток, так как электроны, выбитые светом из правого электрода, частично прилипают к левому электроду, образуя электрический ток.

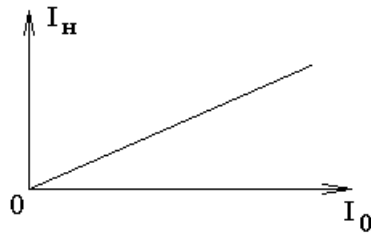
Чтобы ток электронов остановить, нужно приложить запирающее напряжение  $U_0$ , которое отталкивает подлетающие электроны. Это напряжение  $U_0$  позволяет вычислить максимальную скорость выбиваемых электронов:

$$|eU_0| = \frac{mV_{\max}^2}{2} \quad \text{— ток электронов прекращается, когда источник}$$

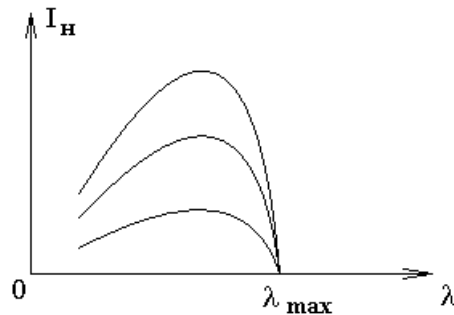
запирающего напряжения забирает всю кинетическую энергию выбитых электронов.

Выбиваемые светом электроны имеют разные кинетические энергии  $0 < \frac{mV^2}{2} \leq \frac{mV_{\max}^2}{2}$  и могут задерживаться меньшим по модулю напряжением, чем  $U_0$ . Часть выбиваемых светом электронов попадает на стенки трубки и заряжает их отрицательно. Если в схеме приложено отрицательное напряжение меньшее по модулю, чем  $|U_0|$ , или небольшое положительное напряжение, то отрицательный заряд на стенках трубки возвращает часть выбитых светом электронов обратно на освещаемый электрод.

При некотором положительном напряжении все выбитые светом из первого электрода электроны собираются на втором электроде. При таком и более высоком положительном напряжении ток достигает значения своего насыщения  $I_n$ . Из экспериментов Столетова следовало, что ток насыщения  $I_n$  пропорционален интенсивности падающего света  $I_0$ .



На другом экспериментальном графике представлена зависимость тока насыщения  $I_n$  от длины волны света  $\lambda$  при разных значениях интенсивностях света  $I_0$ :



Если длина волны света больше некоторого максимального значения  $\lambda > \lambda_{\max}$ , то фототока нет независимо от интенсивности падающего на электрод света.

Наличие  $\lambda_{\max}$  называют красной границей фотоэффекта.

-----

Эйнштейн объяснил наличие красной границы фотоэффекта и дал интерпретацию результатов опытов, предположив, что свет может поглощаться только порциями энергии  $h\nu = \hbar\omega$  или квантами.

Тогда по закону сохранения энергии получаем

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mV_{\max}^2}{2} \text{ — формулу Эйнштейна для фотоэффекта.}$$

Здесь  $h\nu$  — энергия кванта света, которая расходуется на работу выхода электрона из вещества  $A_{\text{вых}}$  и остается в виде кинетической энергии электрона

$\frac{mV^2}{2}$ . До выхода из вещества электрон может растерять часть энергии при неупругих столкновениях с другими электронами и ионами металла. Если электрон не потерял никакой части энергии, то скорость вылетевшего электрона будет максимальна, поэтому в уравнение Эйнштейна входит именно  $\frac{mV_{\max}^2}{2}$ , а не  $\frac{mV^2}{2}$ . Работа выхода электрона  $A_{\text{вых}}$  — это работа необходимая для извлечения электрона из вещества. Эта энергия связи — табличная величина, своя для каждого вещества. Работа выхода связана тем, что электрон, вылетая из металла, притягивается к своему изображению.

Из формулы Эйнштейна  $h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mV_{\text{max}}^2}{2}$  следует, что  $h\nu \geq A_{\text{вых}}$ , и минимальная частота света, который выбивает электроны:

$$h\nu_{\text{min}} = A_{\text{вых}} \quad \Rightarrow \quad \nu_{\text{min}} = \frac{A_{\text{вых}}}{h}$$

$$\lambda \nu = c \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{max}} \nu_{\text{min}} = c \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{max}} = \frac{c}{\nu_{\text{min}}} = \frac{ch}{A_{\text{вых}}} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{ch}{A_{\text{вых}}} \text{ — красная граница фотоэффекта.}$$

Фотоэффект является наиболее убедительным подтверждением квантовой природы света.